초등학생의 평면도형 이동의 이해에 관한 연구*
- 3~5학년을 중심으로 -

이승진[1], 김남균[2]

<< 요 약 >>

초등학생들의 평면도형의 이동을 효과적으로 지도하기 위해서는 학생들이 이해 실태에 대한 조사가 필요하다. 평면도형의 이동 이해에 관한 선행 연구가 소수 이루어졌으나 변환의 대상이 되는 도형의 유형이 구체물인지 평면도형인지에 따른 이해도나 변환의 방향 즉, 변환 전의 모습을 찾는 것을 어려워하는지 변환 후의 모습을 찾기 어려워하는지에 대한 연구는 이루어지지 않았다. 본 연구에서는 밀기, 뒤집기, 돌리기에 대한 초등학생들의 이해도를 심층적으로 조사하기 위해 변환 대상과 변환에 대상에 평면도형 이동 이해 검사지를 개발하고 검사를 실시한 후 분석하였다. 역대 교육과정에서 평면도형의 이동을 학습한 학년이 3~4학년에 파지도 조사를 5학년을 추가하여 3학년 139명, 4학년 153명, 5학년 135명(총 427명)을 연구 대상으로 삼았다. 변환별 학년의 이해도 차이분석, 각 변환에서 변환의 대상과 요소에 따른 이해도의 차이분석, 정답률이 낮은 문항 분석을 통한 어려움을 양적질적 분석하였다. 분석 결과 3~5학년 학생들은 평면도형의 이동에 대해 전반적으로 높은 수준의 이해도를 보이고 있었다. 변환 방법 중 밀기, 뒤집기, 돌리기 순으로 이해도가 높았다. 밀기 변환을 제외하고 돌리기와 뒤집기 변환의 이해도는 학습한 후 이해도가 유지되거나 상승하는 것으로 나타났다. 학생들의 이해도가 가장 낮았던 돌리기 변환의 경우 밀기와 뒤집기 변환보다 변환의 대상과 요소에 따른 이해도에 차이가 있었다. 3~5학년들은 밀기와 뒤집기 변환보다 돌리기 변환에 대한 이해가 불완전한 것으로 나타났다. 이와 같은 결과를 토대로 초등 수학에서 평면도형 이동 지도 방안과 후속 연구를 제안하였다.

주제어 : 공간감각, 도형의 변환, 평면도형의 이동, 밀기, 뒤집기, 돌리기

---

* 이 논문은 이승진의 석사학위 논문(2017)을 수정 보완하여 작성한 것임.

1. 대전봉명초등학교 교사, 1sj2236@hanmail.net (주저자)
2. 청주교육대학교 교수, ngkim@cje.ac.kr (교신저자)

www.kci.go.kr

Ⅰ. 서론

기하는 공간과 도형을 탐구하는 수학 분야로 최근 그 중요성이 매우 강조되고 있다. 학생들의 추론 및 정당화 역량을 발달시키고, 논리적인 사고력과 도형에 대한 이해를 통해 수학적 문제해결력을 기를 수 있기 때문이다.

기하적 사고의 핵심은 공간감각을 가지고 2차원과 3차원의 물체를 머릿속에서 만들고 조작하는 것인데, 여기서 공간감각은 자기 주위의 상황과 그 물체에 대한 직감을 말한다(NCTM, 1989,2007). 학생들은 공간감각에 대한 학습을 시작하기 이전부터 이미 삶 속에서 공간을 탐구하고 직간접적으로 공간감각을 길러왔다. 거울보기, 종이 접기, 투사하여 그리기, 구체물과 교구 조작을 통해 밀기, 뒤집기, 돌리기의 평면도형 이동을 탐색하여 왔다. 기하 및 공간감각의 중요성을 반영하고 학생의 일상 생활과 경험의 관련성을 고려하여 우리나라에서는 7차 교육과정부터 도형 영역에 '공간감각 기르기'가 신설되었다. 공간감각 기르기에서 도형의 변환의 기초 내용인 도형의 이동을 비형식으로 다루었다. 공간감각 영역의 하위 내용은 밀기(7차는 움직이기), 돌리기, 뒤집기이다. 7차 교육과정 시기 이후 2007년 개정 교육과정, 2009년 개정 교육과정. 2015년 개정 교육과정을 거치며 공간감각 지도 내용과 방법이 변경되고 학습 분량 감축되는 변화가 있었다. 공간감각의 일부 내용이 삭제되거나 통합되고 학년 간의 지도 내용의 이동이 있었다. 공간감각의 지도 시수와 학습내용이 감소되었으나 공간감각은 여전히 교육과정에서 강조되고 있으며 교과서의 한 단원으로 다루어지고 있다.

7차 교육과정에서 공간감각이 도입된 후 그 연구도 활발히 이루어졌다. 공간감각 중 평면도형의 이동에 대한 연구는 두 가지로 요약할 수 있다. 웹 코스웨어나 교구를 활용한 공간감각 신장 방안에 관한 연구(예, 나훈희, 2015; 이주용, 2013; 임리주, 2009; 김은영, 2009; 이보현, 2009; 홍용락, 2009)와 학생들의 공간감각 이해 실태에 관한 연구(예, 조영선, 2010; 김남균·오은선, 2008; 김유경, 2007; 이성미, 2007)로 크게 구분할 수 있다. 선행연구들을 조사한 결과 첫째, 웹 코스웨어나 교구를 활용한 공간감각 신장 연구는 다양한 분야에서 활발히 이루어진 반면 공간감각의 이해 실태에 관한 연구는 상대적으로 덜 활성화 된 것으로 보인다. 공간감각의 이해 연구 중 도형의 이동에 대한 학생들의 이해 실태에 대한 연구는 매우 적었고, 연구 내용 또한 7차 교육과정 내용을 기반으로 밀기와 뒤집기, 돌리기에 대한 학년별 이해력 비교와 오답 유형에 대한 분석이 주를 이루었다. 둘째, 학생들의 평면도형의 이동에 대한 이해의 연구 경우 밀기와 뒤집기, 돌리기 변환에 따라 분석한 연구가 주를 이루며, 변환과 관련된 다양한 요인들 예를 들어 변환의 대상이 되는 도형의 유형이 구체물인지 평면도형인지에 따른 이해도나 변환의 방향

www.kci.go.kr

즉, 변환 전의 모습을 찾는 것을 어려워하는지 변환 후의 모습을 찾기 어려워하는지에 대한 연구가 이루어지지 않았다.

초등수학 교육에서 학생들의 공간감각을 기르기 위해서 즉, 평면도형의 이동을 효과적으로 지도하기 위해서는 학생들이 어느 변환의 어떤 유형의 문제를 쉬워하고 어려워하는지에 대한 이해 실태에 대한 조사가 보완될 필요가 있다. 그리고, 이를 바탕으로 교육과정의 개편과 교과서 집필이 이루어져야 한다. 본 연구에서는 초등학교 교육과정의 도형 이동 내용인 밀기, 뒤집기, 돌리기에 대한 초등학생들의 이해도를 정교하게 조사하고자 한다. 먼저 3학년과 4학년으로 도입 시기가 변동되어 왔음을 감안하여 초등학교 3~4학년을 대상으로 하였다. 평면도형의 이동에 대한 이해의 파지력을 조사하기 위해 5학년 학생도 연구 대상으로 포함하였다. 변환의 종류(밀기, 돌리기, 뒤집기), 변환 대상(구체물, 오목다각형, 볼록다각형), 변환 요소(변환 전, 변환 후)로 범주를 나누어 검사도구를 개발하여 이해도를 분석하였다.

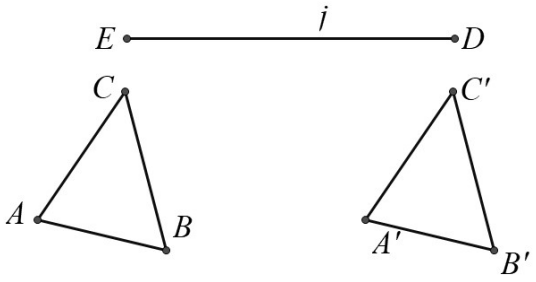
Ⅱ. 초등수학교육에서의 평면도형의 이동 지도

본 연구는 도형의 이동에 대한 학생들의 이해 실태를 분석하는 연구이다. 평행이동, 선대칭이동, 회전이동을 알아보고 초등수학교육에서 평면도형의 이동 즉, 밀기, 뒤집기, 돌리기는 어떻게 관련되는지를 설명한다. 그리고, 평면도형 이동 관련 교육과정과 교과서 내용을 밀기, 뒤집기, 돌리기의 변환 방법, 구체물, 오목다각형, 볼록다각형인지 변환의 대상, 변환의 전이나 변환 후를 묻는지의 변환 요소, 변환의 중요한 요소인 변환의 방향, 거리, 회전량을 중심으로 분석하였다.

1. 평행이동, 선대칭이동, 회전이동

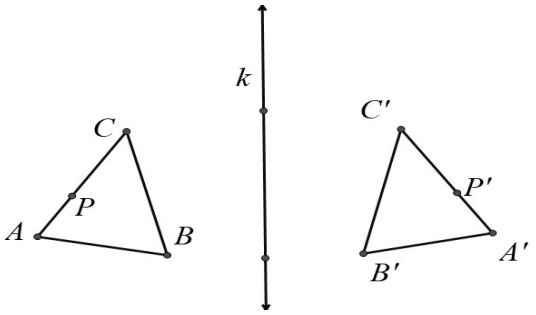
초등수학교육에서 지도하는 평면도형의 이동 방법은 밀기, 뒤집기, 돌리기가 있다. 첫째, 밀기는 평행이동과 관련된다. 평행이동은 방향과 거리 즉, 벡터에 따라 도형을 이동하고 그 변화를 알아보는 것이다. 평행이동에서 변환의 거리와 방향은 벡터로 결정된다. [그림 Ⅱ-1] $\triangle ABC$를 선분$\overline{ED}$를 벡터로 하여 $\triangle A'B'C'$로 평행이동한 것이다. 벡터 $\overline{ED}$의 길이를 d라 하면, $\overline{AA'}=\overline{BB'}=\overline{CC'}=d$이다.

www.kci.go.kr



[그림 Ⅱ-1] 평행이동

둘째, 뒤집기는 선대칭 이동과 관련된다. 대칭에는 점대칭, 선대칭, 면대칭이 있으나 초등수학에서는 선대칭(line symmetry 또는 symmetry reflection)과 점대칭(point symmetry)만을 취급하고 있다(강홍재 외, 2018: 194). 초등학교에서는 도형의 내부를 지나는 한 직선을 대칭축으로 하여 접었을 대 완전히 겹쳐지는 도형을 선대칭 도형이라 한다. 평면도형의 선대칭 이동은 대칭이동(symmetric transformation)한 것을 을 말한다. [그림 Ⅱ-2]는 $\triangle ABC$를 평면 위의 한 직선 k 를 대칭축으로 하여 $\triangle A'B'C'$로 선대칭이동시킨 것이다. $\triangle ABC$ 위의 한 점 P는 직선 k로부터 같은 거리에 있다. 선 대칭이동에서 변환의 대상이 되는 도형으로부터 대칭축이 어느 방향으로 얼마큼 떨어져 있는지가 중요한 요소이다. 초등수학의 뒤집기는 선대칭 이동을 초등화한 것이다. 초등수학의 뒤집기에서 구체물이나 사물을 뒤집기한 경우는 앞뒤의 차이가 있을 수 있어 선대칭 이동과 차이가 있다.

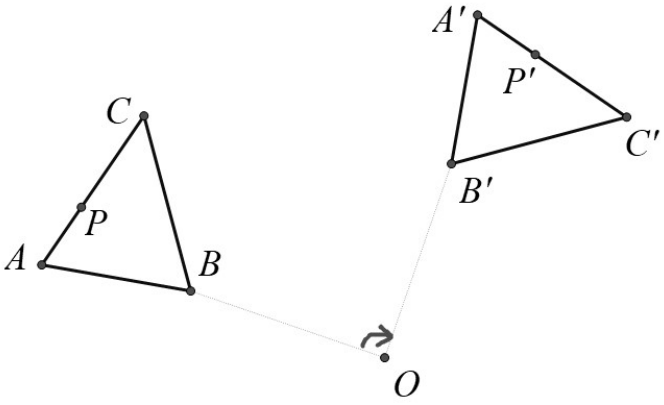


[그림 Ⅱ-2] 선대칭이동

셋째, 돌리기는 회전이동과 관련된다. 원래 도형이 회전 이동의 중심을 중심으로 시계방향이나 반시계 방향으로 일정한 각만큼 회전하여 상을 만들었을 때 이 이동을 회전이동(rotation)이라고 한다. [그림 Ⅱ-3]은 $\triangle ABC$를 평면 위의 한 점 O를 중심으로 하여 시계방향으로 90°

www.kci.go.kr

$\triangle A'B'C'$로 회전이동시킨 것이다. 회전이동에서는 회전의 중심이 되는 한 정점과 회전하는 방향과 회전의 양인 각도가 주어진다.



[그림 Ⅱ-3] 회전이동

2. 교육과정 및 교과서 분석

가. 평면도형의 이동 관련 교육과정 분석[1)]

평면도형의 이동에서 다루는 내용 요소는 밀기, 뒤집기, 돌리기, 변화 과정 설명하기, 규칙적인 무늬 꾸미기이다. 평면도형의 이동은 제7차 교육과정 이후로 제시된 내용으로 주로 3학년의 내용으로 다루어졌다.

〈표 Ⅱ-1〉 평면도형의 이동의 교육과정 분석

교육과정 / 내용	1	2	3	4	5	6	7	2007	2009	2015
학년	×	×	×	×	×	×	2, 3	3	3	4
변환							옮기기, 뒤집기, 돌리기	밀기, 뒤집기, 돌리기	밀기, 뒤집기, 돌리기	밀기, 뒤집기, 돌리기
변환 대상							구체물, 그림(2) 평면도형, 무늬(3)	평면도형	구체물 평면도형	구체물 평면도형

(×는 다루어지지 않음, 숫자는 다루어진 학년을 의미함)

1) 교육부(1997), 교육인적지원부(2007), 교육과학기술부(2009), 교육부(2015)에 고시된 교육과정을 분석함.

www.kci.go.kr

서보억 등(2017)의 연구에 따르면 평면도형 이동은 제3차 교육과정에서 접어보기 및 이동관계 알기로서 3학년과 4학년에서 다루어졌던 도형 접어보기(3학년)와 이동관계 알기(4학년)의 내용과 관련된다. 공간감각, 평면도형의 이동(밀기, 돌리기, 뒤집기)이 본격적으로 교육과정에 제시된 것은 7차 교육과정부터이다. 평면도형의 이동 중에서 밀기, 뒤집기, 돌리기 교육과정을 분석한 결과는 〈표 Ⅱ-1〉과 같다. 밀기, 뒤집기, 돌리기는 제7차 교육과정부터 2015 개정 교육과정까지 2학년, 3학년, 4학년의 내용으로 제시되었다. 제7차 교육과정에서는 '옮기기, 뒤집기, 돌리기'를 변환 교육과정의 내용으로 제시하여 2학년과 3학년의 교육과정 내용으로 제시되었다. 2007 개정 교육과정 이후 2015 개정 교육과정까지 밀기, 뒤집기, 돌리기 활동을 통하여 변화를 이해하는 것으로 목표로 하고 있다. 성취기준과 교수학습 상에 명시된 변환의 대상에서 약간의 차이가 있다. 7차 교육과정에서는 2학년에서는 구체물이나 그림의 옮기기, 뒤집기, 돌리기를 통한 변화 관찰, 3학년에서는 모눈종이에 그려진 간단한 평면도형이나 무늬의 옮기기, 뒤집기, 돌리기를 통한 변화 관찰의 내용이 제시되었다. 2007 개정 교육과정에서는 성취기준에서는 평면도형을 변환대상으로 제시하고 교수학습 상의 유의점에서 구체물, 그림, 모눈종이에 그려진 간단한 평면도형을 조작하여 변화를 관찰하게 하고 있다. 2009 개정 교육과정과 2015 개정 교육과정의 성취기준에서는 변환 대상을 구체물과 평면도형으로 제시하고 있다.

나. 평면도형의 이동 관련 교과서 분석

1) 7차 교육과정 교과서

7차 교육과정 교과서에서 평면도형의 이동을 다루는 단원은 '2-가-3. 도형과 도형 움직이기', '3-가-5. 도형 움직이기'이다. '2-가-3. 도형과 도형 움직이기' 단원은 기본적인 평면도형과 구체물의 이동을 다루는 단원으로, 다루는 대상이 교과서나 인형, 숫자나 문자 등 구체물의 비율의 훨씬 높다. 대부분의 활동이 변환 요소 중 변환 후의 모습을 묻는 유형이었다. 단원의 뒤쪽으로 갈수록 적용된 변환의 종류를 묻는 활동도 일부 제시되었다. '3-가-5. 도형 움직이기' 단원은 도형의 이동을 본격적으로 학습하는 단원이다. 변환의 대상이 되는 도형은 오목다각형이 볼록다각형에 비해 많으며. 도형 옮기기, 도형 뒤집기, 도형 돌리기 차시에서 대부분 변환 후 모습을 묻고 있다. 변환 후의 평면도형 이동의 모습을 그리는 활동에 대부분의 활동에 오목다각형이 대상이 된다. 볼록다각형은 단원의 마무리의 한 차시에 제시된다.

www.kci.go.kr

2) 2007년 개정 교육과정 교과서

2007년 개정 교육과정에서 평면도형의 이동은 '3-1-5. 평면도형의 이동' 단원에서 도형의 이동을 집중적으로 다루어진다. 본 단원은 평면도형의 밀기, 뒤집기, 돌리기, 뒤집고 돌리기, 단원평가, 탐구활동으로 이루어져 있으며, 뒤집고 돌리기 차시가 추가되었다. 변환 요소는 변환 후의 모습을 묻는 유형에 집중되어 있었으나, 변환 대상의 경우 고르게 활용되었다. 대체로 구체물로 차시를 도입하였고, 그 다음 과제에서 오목다각형이나 볼록다각형을 이동해 보게 하고 있다. 오목다각형과 볼록다각형의 변환 비율은 비슷하다.

3) 2009년 개정 교육과정 교과서

2009년 개정 교육과정에서도 도형의 이동은 '3-1-2. 평면도형' 단원에서 다루어진다. 평면도형 단원에서 선분, 직선, 각, 직각, 직각삼각형, 직사각형, 정사각형 차시 후 이들 도형에 차례로 밀기, 뒤집기, 돌리기 변환을 학습하게 하고 있다. 대체로 변환 후의 모습을 묻는 유형의 활동이 많지만, 7차 교과서와 2007년 개정 교과서와 달리 변환 전 모습을 묻는 활동이 제시되어 있다. 변환 대상의 경우는 모든 차시에서 차시의 처음에는 오목다각형의 변환 후 모습을, 두 번째 활동에서 볼록다각형의 변환 후 모습을 찾게 한다. 각 차시의 후반부 내용인 마무리 부분에서 펜토미노 조각을 밀기, 뒤집기, 돌리기 하여 빈 공간을 채울 방법을 찾는 활동에서 변환 전의 모습을 생각해보게 된다. 2009년 개정 교육과정에서 평면도형의 이동 지도에서 변환 전의 모습을 다루고 있지만 명시적으로는 변환 후의 지도가 주를 이룬다고 볼 수 있다.

4) 2015 개정 교육과정 교과서

2015 개정 교육과정에서는 도형의 이동을 4학년 1학기에서 지도하고 있다. 3학년에서 선분, 직선, 각, 직각, 직각삼각형, 직사각형, 정사각형에 대하여 학습하고 4-1-2에서 각도를 학습한 후 4단원에 평면도형의 이동에서 밀기, 뒤집기, 돌리기를 학습하도록 구성되어 있다. 각 차시의 도입은 실생활 장면으로 시작된다. 실생활에서 밀기, 뒤집기, 돌리기가 적용되는 장면을 보고 각 용어를 도입하거나 생각해보게 한다. 활동1에서는 패턴블록이나 투명필름에 그려진 종이를 밀기, 뒤집기, 돌리기 하여 변환을 신체로 표현하고 직관적으로 변화 전후의 도형을 알아보게 한다. 활동2에서는 주어진 삼각형, 사각형 등의 도형을 밀기, 뒤집기, 돌리기 하였을 때의 도형의 모양과 방향을 추론해보게 하고 모눈종이에 변환 후의 도형을 그려 알아보게 한다. 활동3에서는 패턴블록이 조합된 모양 조각을 변환한 후에 어떻게 변환한 것인 변환 방법을 알아맞히는 놀이를 하게 된다. 밀기, 뒤집기, 돌리기를 학습한 후에 뒤집기와 돌리기 차시와 규칙에 따라 모양

www.kci.go.kr

만들기를 학습한다. 2015교육과정에서 다루는 변환 역시 밀기, 뒤집기, 돌리기이며 합성변환으로 밀기, 뒤집기, 돌리기 각각의 반복변환과 뒤집기와 돌리기 또는 돌리기와 뒤집기의 합성을 다룬다. 변환 대상 일상의 사물과 모양, 패턴블록으로 이루어진 도형, 삼각형과 사각형의 다각형, 펜토미노 조각 모양이 있다. 2015교육과정은 이전 교육과정 교과서와 달리 변화 전후의 도형이나 모양을 보고 어떤 변환을 한 것인지 이야기하는 활동이 포함되어 있다.

5) 교과서 분석 결과

평면도형 이동 관련 교과서 내용을 밀기, 뒤집기, 돌리기의 변환 방법, 구체물, 오목다각형, 볼록다각형인지 변환의 대상, 변환의 전이나 변환 후를 묻는지의 변환 요소, 변환의 중요한 요소인 변환의 방향, 거리, 회전을 중심으로 분석하여 정리한 결과는 〈표 Ⅱ-2〉와 같다.

〈표 Ⅱ-2〉 평면도형의 이동의 교과서 분석

교육과정	7차	2007 개정	2009 개정	2015 개정
단원	■2-가-3.도형과 도형 움직이기 ■3-가-5.도형 움직이기	■3-1-5.평면도형의 이동	■3-1-2.평면도형	■4-1-4.평면도형의 이동
변환의 대상	■구체물(인형,숫자, 문자)→오목다각형→볼록다각형(단원의 마무리)	■구체물→오목다각형 또는 볼록다각형	■오목다각형→볼록다각형→펜토미노	■패턴블록(볼록다각형)→볼록다각형(삼각형,사각형)→오목 또는 볼록다각형(패턴블록,펜토미노)
변환요소 (변환전, 후)	■변환 후	■변환 후	■변환 후 ■변환 전(펜토미노 활동에서)	■변환후 → 변환전
방향(밀/뒤) 거리(밀/뒤) 회전량(돌)	■방향 : 위,아래,오른쪽, 왼쪽 ■거리 : × ■회전 : 오른쪽 90°, 180°, 270°, 360°	■방향: 위,아래,오른쪽, 왼쪽 ■거리 : × ■회전 : 시계방향 90°, 180°, 270°, 360°	■방향 : 위,아래,오른쪽, 왼쪽 ■거리 : × ■회전 : 시계방향 90°, 180°, 270°, 360° 반시계방향 90°	■방향 : 위, 아래, 오른쪽, 왼쪽 ■거리 : 밀기 cm ■회전 : 시계방향90°, 180°, 270°, 360° 반시계 방향 90°, 180°, 270°, 360°

www.kci.go.kr

분석 결과 첫째, 초등학교 평면도형의 이동 지도에서 변환의 주요 대상은 오목다각형과 볼록다각형이며, 구체물 변환은 감소하는 추세에 있다. 7차에는 구체물, 오목다각형, 볼록다각형의 변환을 다루었지만, 그 이후 교육과정에서는 점차 구체물의 변환이 줄고 펜토미노와 패턴블록 같은 교구의 변환과 오목다각형, 삼각형, 사각형 등의 다각형의 변환으로 변하였다. 구체물의 경우 뒤집기 변환에서 앞면과 뒷면이 달라 합동변환의 이해에 혼란을 줄 수 있기 때문에 2007개정 교과서부터는 그림이나 투명종이 위의 그림으로 대체가 이루어진 것으로 보인다. 현장의 교구 보급이 많아지고 교과서 뒤에 준비물에 필요한 교구를 삽입하면서 2009와 2015 개정 교과서에서는 교구의 조작 활동이 많아지고 체계화되었다. 둘째, 초등학교 평면도형의 이동 지도에서는 주어진 구체물이나 도형의 변환후를 주로 다루었으나 2009와 2015로 오면서 점차 변환전의 모습을 다루는 내용이 포함되고 있다. 셋째, 초등학교 평면도형의 이동 지도에서 밀기와 뒤집기의 변환의 방향은 위, 아래, 오른쪽, 왼쪽의 4개 방향을 주로 다루고, 변환에서 거리는 2015의 밀기의 거리를 제외하고는 다루어지지 않았다. 회전량의 경우 90°, 180°, 270°, 360°의 네 가지를 다루며 시계방향만 다루다가 점차 반시계 방향까지 포함하여 8가지의 경우를 돌리기 조작하도록 하고 있다. 교육과정이 변화하면서 밀기, 돌리기, 뒤집기의 내용이 점차 체계화되어 가는 추세를 발견할 수 있다. 하지만 학습자의 입장에서는 학습 내용이 복잡하고 어렵게 느껴질 수 있을 것으로 생각된다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구의 대상은 3~5학년 학생들이다. 일반화 가능성을 높이기 위하여 경기도, D 광역시, 충북 여러 지역 학교에서 학생을 선정하였다. 대도시인 D 광역시에서 2학교, 중도시인 P시와 C시에서 각각 1학교씩, 소도시인 CH시와 J군에서 각각 1학교씩 임의로 선정하였다. 조사에 참여한 연구 대상은 3학년 139명, 4학년 153명, 5학년 135명으로 전체 427명이다.

www.kci.go.kr

〈표 Ⅲ-1〉 학교별 연구 대상 인원

	지역	3학년		4학년		5학년	
	성별	남	여	남	여	남	여
대도시	D광역시 A	13	11	19	14	11	11
	D광역시 B	8	9	8	10	9	9
중도시	P시	14	13	13	16	12	15
	C시	14	11	12	11	11	12
소도시	CH시	14	11	14	11	11	12
	J군	10	11	13	12	12	10
합계		73	66	79	74	66	69
		139		153		135	

2. 검사 도구

연구 문제를 해결하기 위한 범주에 따라 연구자가 제작한 검사지를 검사도구로 활용하였다. 검사지는 학년 1학기 '2. 평면도형' 단원에서 다루고 있는 밀기와 뒤집기, 돌리기의 내용을 기본으로 구성되었다. 구체물과 오목다각형, 볼록다각형을 대상으로 변환 전 모습을 묻는 유형, 변환 후 모습을 묻는 유형, 변환 전과 후의 모습을 보고 변환의 종류를 찾는 세 가지 유형의 문제로 검사지를 구성하였다. 검사지의 문항 구성은 〈표 Ⅲ-2〉와 같다.

〈표 Ⅲ-2〉 검사지 문항 구성표

변환 종류	변환 요소			변환 대상			문항 유형
	변환 전후	방향, 각도		구체물	오목 다각형	볼록 다각형	
밀기	변환 전	위쪽		1	1	1	선다형
		오른쪽		1	1	1	
	변환 후	위쪽		1	1	1	
		아래쪽		1	1	1	
		오른쪽		1	1	1	
		왼쪽		1	1	1	
뒤집기	변환 전	위쪽		1	1	1	
		오른쪽		1	1	1	
	변환 후	위쪽		1	1	1	
		아래쪽		1	1	1	
		오른쪽		1	1	1	
		왼쪽		1	1	1	
돌리기	변환 전	시계 방향	90°	1	1	1	
			180°	1	1	1	
	변환 후	시계	90°	1	1	1	

www.kci.go.kr

변환 종류	변환 요소			변환 대상			문항 유형
	변환 전후	방향, 각도		구체물	오목 다각형	볼록 다각형	
		방향	180°	1	1	1	
			270°	1	1	1	
		반시계 방향	90°	1	1	1	
			180°	1	1	1	
			270°	1	1	1	

밀기, 뒤집기, 돌리기에 대해서 변환 요소(변환 전후, 방향), 변환 대상의 종류에 따른 이해도를 묻는 선다형 문항을 60문항을 구성하였다. 밀기와 뒤집기는 각각 18문항씩 제시하였고, 방향과 각도가 더 다양한 돌리기는 24문항을 제시하였다. 교육과정에서 변환 후의 모습을 묻는 유형을 더 비중 있게 다루고 있으므로 검사지에서도 이 유형의 문항 수를 더 많게 하였다. 예비검사를 통하여 오류 여부, 시행 시간, 문항 표현 등을 점검하여 수정 과정을 거쳐 검사지를 보완하였고, 초등수학교육 전문가 3명과 협의를 거쳐 문항의 타당성을 점검하였다.

3. 자료 수집 및 분석

가. 검사 실시 및 자료 수집

본 검사는 2016년 3월 14일부터 3월 25일 사이에 학생들이 재학하고 있는 학급의 교실에서 검사를 실시하였다. 3~5학년 연구대상을 대상으로 검사를 실시하였는데, 3학년 학생들은 평면도형의 이동 단원을 학습한 후였다. 각 학생들에게 인쇄한 검사지를 나누어주고 친구들과 상의하지 않고 개별적으로 해결하게 하였다. 검사 시간은 40분이었으며, 학급 담임 선생님의 감독하에 검사를 실시하였다.

나. 자료 분석

밀기와 뒤집기, 돌리기 변환별로 학생들의 점수의 평균과 각 문항에 대한 정답률의 기술통계를 구하였다. 변환 별 학년에 따른 학생들의 이해도, 도형이동의 대상에 따른 이해도 점수, 변환 요소에 따른 이해도의 평균 차이 검증을 t-검정이나 일원분산분석으로 실시하였다. 허용 유의수준 0.05에서 실시하였다. 기술통계 처리와 평균 차이 검증에 Excel 프로그램을 활용하였다. 밀기, 돌리기, 뒤집기 별로 변환 대상, 변환 요소 및 방향에 따른 문항별 정답률을 검토한 후 정답률

www.kci.go.kr

이 가장 낮은 문항들의 오답을 보고 학생들의 어려움을 분석하였다.

Ⅳ. 평면도형의 이동 이해도 분석 결과

1. 3~5학년 학생들의 밀기 변환의 이해

밀기 변환의 학년별 점수 평균은 〈표 Ⅳ-1〉과 같다. 밀기 변환 이해도 점수는 전체 18점 중에서 점수 평균이 15.185~16.410점으로 밀기 변환 이해도가 상당히 높은 것으로 나타났다.

〈표 Ⅳ-1〉 학년별 밀기 변환의 점수 평균

변환 대상	응답자 수	점수 평균
3학년	139	16.410
4학년	153	15.268
5학년	135	15.185

〈표 Ⅳ-2〉 학년에 따른 밀기 변환의 이해도 차이 분석 결과

변동의 요인	제곱합	자유도	제곱 평균	F 비	P-값	F 기각치
처리	131.232	2.000	65.616	3.324	0.037	3.017
잔차	8370.009	424.000	19.741			
계	8501.241	426.000				

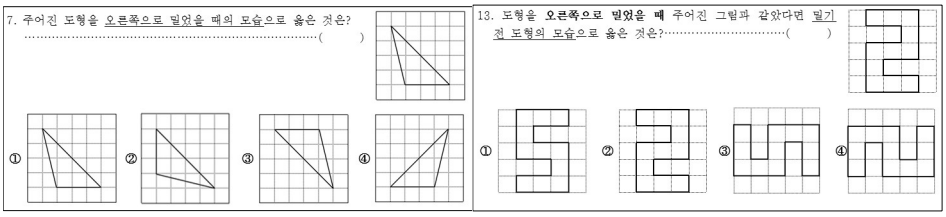
학년에 따라 밀기 변환의 이해에 차이가 있는지 알아보기 위해 학년별로 일원분산분석을 실시하였다〈표Ⅳ-2〉. 유의확률이 0.037로 3학년과 4학년 및 5학년 학생의 밀기 변환 이해에 유의미한 차이가 있는 것으로 나타났다. 사후 검증 결과 3학년과 4학년 간(<.05), 3학년과 5학년 간(<.02) 유의미한 차이가 있었고, 4학년과 5학년 간에는 유의미한 차이가 있다고 볼 수 없었다. 도형의 이동 지도가 3학년에서만 이루어진다는 점을 고려할 때, 3학년에서 학습 후 4학년이 될 때까지 이해도가 떨어지나, 4학년과 5학년의 이해도는 큰 차이가 없는 것으로 보인다. 밀기 변환의 이해도를 변환 대상, 변환 요소, 변환 방향에 따라 정리한 표는 다음과 같다〈표 Ⅳ-3〉.

www.kci.go.kr

〈표 Ⅳ-3〉 밀기 변환 정답자 수 및 정답률

대상	요소	방향	3학년 (N=139)	4학년 (N=153)	5학년 (N=135)
구체물	변환 전	위쪽	128(92.1)	136(88.9)	120(88.9)
		오른쪽	124(89.2)	133(86.9)	118(87.4)
	변환 후	위쪽	134(96.4)	142(92.8)	124(91.9)
		아래쪽	131(94.2)	123(80.4)	115(85.2)
		오른쪽	129(92.8)	127(83.0)	111(82.2)
		왼쪽	122(87.8)	122(79.7)	104(77.0)
오목다각형	변환 전	위쪽	122(87.8)	127(83.0)	112(83.0)
		오른쪽	130(93.5)	127(83.0)	107(79.3)
	변환 후	위쪽	128(92.1)	129(84.3)	115(85.2)
		아래쪽	120(86.3)	125(81.7)	115(85.2)
		오른쪽	127(91.4)	131(85.6)	114(84.4)
		왼쪽	128(92.1)	132(86.3)	113(83.7)
볼록다각형	변환 전	위쪽	130(93.5)	132(86.3)	116(85.9)
		오른쪽	125(89.9)	134(87.6)	116(85.9)
	변환 후	위쪽	126(90.6)	136(88.9)	120(88.9)
		아래쪽	128(92.1)	134(87.6)	116(85.9)
		오른쪽	128(92.1)	122(79.7)	107(79.3)
		왼쪽	121(87.1)	124(81.0)	107(79.3)

밀기 변환의 대상 즉, 구체물과 오목다각형, 볼록다각형별로 6문항씩 묶어 일원분산분석한 결과 유의미한 차이가 있다고 볼 수 없었다. 대상별 평균은 구체물을 밀기 변환하는 문항의 점수가 가장 높았고, 그 다음으로 볼록다각형, 오목다각형을 변환하는 문항의 점수 순이었다. 밀기 변환의 요소에 따른 이해도 즉, 변환 전을 묻는 문항과 변환 후를 문항에 대한 점수를 t-검증한 결과 통계적으로 유의미한 차이가 있다고 볼 수 없었다. 도형을 밀기한 방향에 따라서도 이해도의 차이는 통계적으로 유의미하지 않았다. 밀기 변환 전과 후의 도형을 조사하는 선다형 문항 중에서 가장 정답률이 낮은 문항은 [그림 Ⅳ-1]과 같다.



[그림 Ⅳ-1] 밀기 변환 전후를 묻는 문항 중 가장 낮은 정답률을 보인 문항

www.kci.go.kr

오른쪽으로 밀기 한 후의 모습을 묻는 7번 문항에 대해 오답으로 ④번을 선택한 학생들이 많았다. ④번 보기는 주어진 볼록다각형을 좌우로 뒤집기 변환을 적용한 것이었다. 밀기 변환에서 좌우로 뒤집기 한 모습과 좌우로 밀기 한 후의 모습을 구분하기 어려움이 있다는 것을 알 수 있다. 13번 오른쪽으로 밀기 전의 모습을 묻는 문항에 학생들이 많이 보이는 오답은 ①번이다. 주어진 오목다각형을 좌우로 뒤집기 하기 전 모습을 보여주는 보이이다. 학생들이 오목다각형의 밀기 변환 전의 모습을 생각하는 문제에서 좌우로 뒤집기와 구분하기 어려워한다는 것을 알 수 있다.

2. 3~5학년 학생들의 뒤집기 변환의 이해

학년별 학생의 점수 평균은 〈표 Ⅳ-4〉과 같다. 뒤집기 변환 이해도 점수는 전체 18점 중에서 점수 평균이 14.667~15.496점으로 밀기 변환의 점수보다 약간 낮지만 전체적으로 뒤집기 변환의 이해도도 상당히 높은 것으로 나타났다.

〈표 Ⅳ-4〉 학년별 뒤집기 변환의 점수 평균

변환 대상	응답자 수	점수 평균
3학년	139	15.496
4학년	153	14.667
5학년	135	15.133

학년에 따라 뒤집기 변환의 이해에 차이가 있는지 알아보기 위해 학년별로 일원분산분석을 실시하였다〈표 Ⅳ-5〉. 3학년과 4학년 및 5학년 학생의 뒤집기 변환 이해에 통계적으로 유의미한 차이가 없는 것으로 나타났다.

〈표 Ⅳ-5〉 학년에 따른 뒤집기 변환의 이해도 차이 분석 결과

변동의 요인	제곱합	자유도	제곱 평균	F 비	P-값	F 기각치
처리	50.617	2	25.308	2.139	0.119	3.017
잔차	5016.348	424	11.831			
계	5066.965	426				

뒤집기 변화의 이해도를 변환 대상, 변환 요소, 변환 방향에 따라 정리한 표는 다음과 같다〈표

www.kci.go.kr

Ⅳ-6〉.

〈표 Ⅳ-6〉 뒤집기 변환 학년별 정답자 수 및 정답률

대상	요소	방향	3학년 (N=139)	4학년 (N=153)	5학년 (N=135)
구체물	변환 전	위쪽	100(71.9)	107(69.9)	108(80.0)
		오른쪽	115(82.7)	124(81.0)	120(88.9)
	변환 후	위쪽	113(81.3)	111(72.5)	89(65.9)
		아래쪽	127(91.4)	133(86.9)	117(86.7)
		오른쪽	132(95.0)	134(87.6)	120(88.9)
		왼쪽	122(87.8)	124(81.0)	112(83.0)
오목다각형	변환 전	위쪽	100(71.9)	96(62.7)	87(64.4)
		오른쪽	119(85.6)	125(81.7)	119(88.1)
	변환 후	위쪽	117(84.2)	118(77.1)	113(83.7)
		아래쪽	117(84.2)	136(88.9)	116(85.9)
		오른쪽	123(88.5)	124(81.0)	110(81.5)
		왼쪽	131(94.2)	137(89.5)	126(93.3)
볼록다각형	변환 전	위쪽	111(79.9)	118(77.1)	113(83.7)
		오른쪽	113(81.3)	118(77.1)	114(84.4)
	변환 후	위쪽	121(87.1)	126(82.4)	107(79.3)
		아래쪽	132(95.0)	141(92.2)	127(94.1)
		오른쪽	130(93.5)	137(89.5)	124(91.9)
		왼쪽	131(94.2)	135(88.2)	121(89.6)

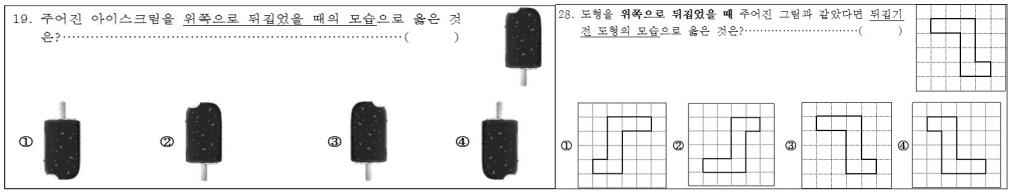
뒤집기 변환의 대상에 따른 학생들의 이해를 분석하기 위하여 변환 대상의 종류(구체물, 오목다각형, 볼록다각형)별로 6문항씩 묶어 일원분산분석한 결과, 유의미한 차이가 있다고 볼 수 없었다($p=0.647$). 변환 대상에 따른 점수 평균을 보면 구체물을 뒤집기 변환하는 문항의 점수가 가장 높았고, 그 다음으로 볼록다각형, 오목다각형을 변화하는 문항의 점수 순이었다. 뒤집기 변환의 요소에 따른 이해도 즉, 변환 전을 묻는 문항과 변환 후를 문항에 대한 점수를 t-검증한 결과 통계적으로 유의미한 차이가 있다고 볼 수 없었다. 도형을 뒤집기 한 방향에 따라서도 이해도의 차이는 통계적으로 유의미하지 않았다.

뒤집기는 밀기와 달리 구체물, 오목다각형, 볼록다각형별로 가장 높은 정답률과 가장 낮은 정답률을 보인 문항의 유형이 상이하였다. 대상별로 가장 낮은 정답률을 보인 문항의 오답을 분석한 결과, 상하 뒤집기를 좌우 뒤집기와 혼동하는 경향을 찾을 수 있었다.

학생들은 학년에 상관없이 대체로 볼록다각형을 아래쪽으로 뒤집기 변환 후의 모습을 묻는

www.kci.go.kr

문항에서 높은 정답률을 보였다. 특히 변환 후를 묻는 문항들에서는 대체로 다른 방향에 비해 아래쪽으로 뒤집은 후의 모습을 찾는 문항들에게 정답률이 높은 것 또한 확인할 수 있었다. 뒤집기 변환 전과 후의 도형을 조사하는 선다형 문항 중에서 가장 정답률이 낮은 문항은 구체물을 위쪽으로 뒤집었을 때를 묻는 문항(19번)과 오목다각형을 뒤집기 전의 모습을 묻는 문항(28번)이었다[그림 Ⅳ-5]. 19번 문항의 가장 많은 오답은 구체물을 위쪽으로 뒤집지 않고 오른쪽 혹은 왼쪽으로 뒤집은 ③번이었다. 다음으로 구체물을 180°돌린 것인 ④번을 오답으로 선택한 학생이 많았다. 19번 문제에서 좌우로 뒤집을 때와 상하로 뒤집을 때 변화 후의 모습이 상이하다는 것을 감안한다면 ③번을 선택한 학생은 뒤집기의 개념이 확실히 자리 잡히지 않은 것으로 보인다. 반면에 ④번의 경우는 180° 돌린 후의 모습이 위로 뒤집은 후의 모습과 비슷하다는 점을 감안해 보면 아이스크림을 베어 문 모양의 위치를 간과했을 수 가능성도 점쳐진다. 28번 문항에 대해서도 오목다각형을 좌우로 뒤집은 ①번 보기를 오답으로 선택한 학생들이 가장 많았다. 이와 비슷하게 주어진 오목다각형을 밀기 변환한 보기인 ③번을 오답으로 선택한 학생이 많았다. ①번과 ③번을 선택한 학생들 모두 위로 뒤집은 후의 모습과 상이한 답을 선택한 것으로 보아 상하 뒤집기 중에서도 위로 뒤집기를 어려워함을 알 수 있었다.



[그림 Ⅳ-2] 뒤집기 변환 전후를 묻는 문항 중 가장 낮은 정답률을 보인 문항

정답률과 정답률이 낮은 문항에 대한 학생들의 반응을 분석 한 결과 나타난 학생들의 뒤집기 변환 유형과 요소에 따른 어려움의 특징은 다음과 같다. 첫째, 학생들은 오른쪽과 위쪽으로 변환하는 문제에 어려움이 있었다. 변환 전의 모습을 묻는 문항의 가장 낮은 정답률을 보인 문항을 분석한 결과, 가장 많은 오답은 구체물을 좌우로 뒤집기 전의 모습을 찾는 문항에서 나타났다. 이 경향은 변환 후의 모습을 묻는 문항에서도 동일하였다. 변환 후의 모습을 묻는 문항에서 구체물을 위쪽으로 뒤집고 난 후의 모습을 묻는 문항과 오목다각형을 오른쪽으로 뒤집은 후의 모습을 묻는 문항에 대해 많은 학생들이 오답을 보였다. 둘째, 학생들은 위쪽으로 뒤집기와 좌우로 뒤집기 한 후의 모습을 혼동하는 어려움이 있었다. 구체물을 위쪽으로 뒤집고 난 후의 모습을 묻는 문항에서 많은 학생들이 위쪽으로 뒤집고 난 후의 모습을 좌우로 뒤집고 난 후의 모습과

www.kci.go.kr

혼동하는 오답을 보였다. 셋째, 변환 전의 모습을 묻는 문항에서는 학생들이 오른쪽보다는 위쪽으로 뒤집기 변환하기 전의 모습을 찾는 것을 어려워한다.

3. 3~5학년 학생들의 돌리기 변환의 이해

돌리기 변환의 학년별 점수 평균은 〈표 Ⅳ-7〉과 같다. 뒤집기 변환을 묻는 문항은 전체 24문항 있었다. 학생들의 뒤집기 변환 이해도 점수 평균은 18.399~19.022점으로 밀기와 돌리기에 비해 정답률이 낮은 편이다. 학생들은 돌리기 변환의 이해를 가장 어려워하고 그 다음으로 뒤집기 변환을 어려워하고 밀기 변환을 가장 쉬워한다는 것을 알 수 있다.

〈표 Ⅳ-7〉 학년별 돌리기 변환의 점수 평균

변환 대상	응답자 수	평균
3학년	139	19.022
4학년	153	18.399
5학년	135	18.563

학년에 따라 돌리기 변환의 이해에 차이가 있는지 알아보기 위해 학년별로 일원분산분석을 실시하였다〈표 Ⅳ-8〉. 3학년과 4학년 및 5학년 학생의 뒤집기 변환 이해에 통계적으로 유의미한 차이가 없는 것으로 나타났다.

〈표 Ⅳ-8〉 학년에 따른 돌리기 변환의 이해도 차이 분석 결과

변동의 요인	제곱합	자유도	제곱 평균	F 비	P-값	F 기각치
처리	29.87	2	14.936	0.675	0.510	3.017
잔차	9382.83	424	22.129			
계	9412.70	426				

돌리기 변환의 이해도를 변환 대상, 변환 요소, 변환 방향에 따라 정리한 표는 다음과 같다〈표 Ⅳ-9〉.

www.kci.go.kr

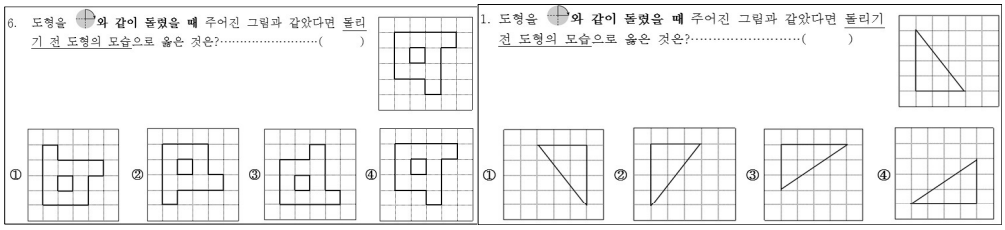
〈표 Ⅳ-9〉 돌리기 변환 학년별 정답자 수 및 정답률

대상	요소	방향		3학년 (N=139)	4학년 (N=153)	5학년 (N=135)
구체물	변환 전	시계	90	105(75.5)	107(69.9)	102(75.6)
			180	97(69.8)	103(67.3)	97(71.9)
	변환 후	시계	90	115(82.7)	105(68.6)	103(76.3)
			180	122(87.8)	121(79.1)	121(89.6)
			270	105(75.5)	113(73.9)	94(69.6)
		반시계	90	124(89.2)	135(88.2)	123(91.1)
			180	113(81.3)	120(78.4)	106(78.5)
			270	121(87.1)	126(82.4)	118(87.4)
오목다각형	변환 전	시계	90	81(58.3)	94(61.4)	93(68.9)
			180	111(79.9)	125(81.7)	105(77.8)
	변환 후	시계	90	128(92.1)	137(89.5)	122(90.4)
			180	114(82.0)	129(84.3)	107(79.3)
			270	115(82.7)	119(77.8)	105(77.8)
		반시계	90	125(89.9)	131(85.6)	119(88.1)
			180	120(86.3)	136(88.9)	122(90.4)
			270	95(68.3)	106(69.3)	81(60.0)
볼록다각형	변환 전	시계	90	83(59.7)	63(41.2)	74(54.8)
			180	96(69.1)	123(80.4)	96(71.1)
	변환 후	시계	90	127(91.4)	135(88.2)	108(80.0)
			180	109(78.4)	126(82.4)	109(80.7)
			270	105(75.5)	98(64.1)	86(63.7)
		반시계	90	116(83.5)	128(83.7)	112(83.0)
			180	110(79.1)	121(79.1)	105(77.8)
			270	107(77.0)	114(74.5)	98(72.6)

돌리기 변환의 대상(구체물, 오목다각형, 볼록다각형)에 따른 학생들의 이해를 분석하기 위하여 대상별로 일원분산분석한 결과, 유의수준 0.05에서 유의미한 차이가 있었다($p=0.00015$). 사후검증 결과 오목다각형 및 구체물의 변환에 대한 이해와 볼록다각형의 이해에서 유의미한 차이가 있었다. 8점 만점 중에서 오목다각형의 변환에 대해서 6.039으로 가장 높았고, 구체물의 변환은 5.982점, 볼록다각형의 변환은 5.589이었다. 돌리기 변환의 요소(변환 전, 변환 후)에 따른 이해를 분석하기 위하여 6문항씩 묶은 점수를 t-검정한 결과 통계적으로 유의미한 차이가 있었다($p<.05$). 변환 후를 묻는 문항(평균 4.721점)이 변환 전을 묻는 문항(평균 3.882점)보다 이해도가 높다고 할 수 있다. 밀기와 뒤집기에 비하여 돌리기의 경우 변환 후보다 변환 전을 이해하는데 어려움이 많은 것으로 판단된다.

돌리기 변환 문항 중에서 가장 정답률이 낮은 문항은 [그림 Ⅳ-3]과 같다.

www.kci.go.kr



[그림 Ⅳ-3] 돌리기 변환 전후를 묻는 문항 중 가장 낮은 정답률을 보인 문항

6번의 오목다각형의 시계방향으로 90° 돌리기 전의 모습을 묻는 문항과 1번의 볼록 다각형의 시계방향으로 90° 돌리기 전의 모습을 묻는 문항이 가장 정답률이 낮았다. 정답률과 정답률이 낮은 문항에 대한 학생들의 반응을 분석 한 결과 나타난 학생들의 돌리기 변환 유형과 요소에 따른 어려움의 특징은 다음과 같다. 첫째, 학생들은 돌리기 변환에서 변환 후보다 변환 전을 묻는 문항에 정답률이 낮았다. 둘째, 변환 전을 묻는 문항들 중에서도 특히 시계방향으로 90° 돌리기 전의 모습을 찾는 것을 어려워하고, 이는 구체물보다 오목다각형과 볼록다각형에서 더 분명히 드러나는 것으로 보인다. 셋째, 같은 오목다각형임에도 불구하고 6번의 오목다각형을 시계방향으로 90° 돌리기 전의 모습을 묻는 문항은 오목다각형을 시계방향으로 180° 돌리기 전의 모습을 찾는 문항은 가장 높은 정답률을 보인 반면, 90° 돌리기 전의 모습을 찾는 문항은 정답률이 20%p가량 낮은 것으로 보아 학생들이 돌리는 각도에 많은 영향을 받고 있음을 알 수 있다. 넷째, 돌리기 변환 후의 모습을 찾을 때에는 90°나 180° 돌린 후의 모습을 찾을 때보다는 270° 돌리기 한 후를 묻는 문항을 어려워했다. 돌리기 변환에서 270° 돌린 후의 모양을 찾으려면 반대 방향으로 90° 돌리면 된다는 것을 이해하는데 어려움이 있는 학생들이 많다는 것을 알 수 있다.

Ⅳ. 논의 및 결론

본 논문의 연구 결과를 바탕으로 얻은 결론은 다음과 같다. 첫째, 3~5학년 학생들은 평면도형의 이동에 대해 전반적으로 높은 수준의 이해도를 보이고 있었다. 변환 방법 중 밀기, 뒤집기, 돌리기 순으로 이해도가 높았다. 교과서의 차시 구성이 일반적으로 밀기, 뒤집기, 돌리기의 순서로 되어 있는데 학생들의 이해도를 감안한다면 차시 구성의 순서가 적절하다고 볼 수 있다. 둘째, 밀기 변환을 제외하고 돌리기와 뒤집기 변환의 이해도는 학습한 후 이해도가 유지되는 것으

www.kci.go.kr

로 나타났다. 밀기 변환의 이해에 있어 변환 대상이나 변환 요소 간의 이해에 유의미한 차이는 없었으나, 밀기 변환을 학습한 직후인 3학년 보다 4, 5학년의 점수 평균이 낮아지는 양상을 보였다. 이에 대한 추가 연구가 필요하지만 평면도형의 이동학습의 파지 기간이 길지 않은 것으로 보인다. 평면도형의 이동을 3학년에 학습하고 검사를 실시했던 5학년 기간까지 합동과 대칭에 대해서 학습하지 않았고 그 사이에 평면도형의 이동에 대해 망각이 많았던 것으로 보인다. 현재 평면도형의 이동 단원은 도형의 변환에 대한 첫 단원이지만 관련 단원이 거의 없는 형편이다. 공간감각의 중요성을 고려해 볼 때 평면도형의 이동을 4학년이나 5학년 시기에 추가적으로 학습할 기회를 제공할 필요가 있다. 셋째, 오답 분석 결과 많은 학생들이 밀기를 뒤집기와 혼동하고 있음이 발견되었다. 학생들은 학습 초기에 밀기 변환 어려워하지 않지만 밀기 학습이 끝나면 다른 변환 보다 이해도가 떨어지는 것으로 보인다. 이를 통해서 볼 때, 밀기 변환에 대해서도 다른 변환과 마찬가지로 변환 대상의 모양, 방향, 거리 등을 다양화하여 충분히 조작하고 변하지 않는 수학적 성질을 충분히 탐구하게 할 필요가 있어 보인다. 또한 일상의 용어인 밀기, 뒤집기, 돌리기를 수학적 내용으로 이해하도록 지도방법이 보완되어야 할 필요가 있다. 넷째, 뒤집기 변환의 경우 대상과 요소 간에 따라 학생의 이해에 통계적으로 유의미한 차이는 없었다. 정답률을 비교하고 오답을 분석한 결과 상하 뒤집기 보다는 좌우 뒤집기를 더 어려워하고 상하 뒤집기와 좌우 뒤집기를 혼동하는 경우가 많았다. 뒤집기의 경우 전 학년에서 볼록다각형을 아래쪽으로 뒤집은 후의 모습을 묻는 문항의 정답률이 가장 높고, 오목다각형을 위쪽으로 뒤집기 전의 모습을 묻는 문항의 정답률이 가장 낮았다. 이를 통해 많은 학생들이 위쪽으로 뒤집기 전의 모습이 아래쪽으로 뒤집은 후의 모습과 같다는 것을 알고 있지 못하다는 것을 알 수 있다. 학생들이 뒤집은 후의 모습을 능숙하게 그릴 수 있다면, 더 나아가 뒤집은 후의 모습들을 서로 비교하여 뒤집기 변환을 더 깊이 이해할 수 있는 기회를 부여할 필요가 있다. 다섯째, 학생들의 이해도가 가장 낮았던 돌리기 변환의 경우 밀기와 뒤집기 변환보다 변환의 대상과 요소에 따른 이해도에 차이가 있었다. 변환의 대상이 오목다각형인 경우에 이해도가 가장 높았고, 그 다음은 구체물과 볼록다각형의 변환이었다. 변환 후의 모습을 묻는 문항 보다 변환 전의 모습을 묻는 문항에 대한 이해도가 높았다. 3~5학년 학생들이 밀기와 뒤집기 변환 보다 돌리기 변환에 대한 이해가 불완전함을 보여주는 것이라 생각된다. 여섯째, 돌리기 변환에 대해서 학생들은 대상이나 요소에 따른 이해에 유의미한 차이를 보였고, 특히 학생들은 변환 전의 모습을 찾는 것을 어려워하였다. 돌리기는 밀기나 뒤집기보다 조작하고 추론할 내용이 상대적으로 많다. 2015교육과정의 교과서 분석 결과를 보면 초등수학에서 제시되는 변환의 방향만 고려하여도 밀기나 뒤집기는 상하좌우 4가지이지만, 돌리기의 경우 시계 방향과 반시계 방향으로 각각 90°, 180°, 270°, 360°을 화전

www.kci.go.kr

하게 되어 8가지 경우가 생긴다. 하지만 교과서의 차시 배분과 교과서 지면 구성이 밀기나 뒤집기와 동일하다. 이 점이 학생들이 밀기나 뒤집기에 비해 돌리기를 더 어려워하는 원인이 될 수 있을 것이다. 교과서 분석 결과 최근의 교과서로 올수록 변환 대상, 요소, 방향 등 체계화되고 복잡해지는 경향을 볼 수 있었다. 향후 교육과정과 교과서를 집필할 때에는 학생들에게 돌리기를 다양한 방향과 각도로 충분히 변환해 볼 수 있는 경험을 부여할 수 있도록 교육과정의 교수학습 상의 유의점, 교과서의 지면과 차시 증대, 돌리기 변환의 대상과 요소에 따른 다양한 조작과 추론 활동을 보완할 필요가 있다.

마지막으로 후속 연구에 대해 다음과 같이 제언하고자 한다. 첫째, 본 연구를 통해 학생들이 밀기, 뒤집기, 돌리기에 대해 변환 대상, 변환 요소, 변환 방향과 각도에 따라 이해도가 다르다는 것을 알 수 있었다. 그러나 본 연구에서는 검사지 문항 개수의 한계로 방향이나 각도의 모든 경우를 조사할 수 없었다. 따라서 뒤집기나 돌리기의 경우 뒤집는 방향이나 돌리는 방향과 각도에 따라 학생들의 이해 정도가 어떻게 다른지 더 심층적으로 연구해 볼 필요가 있다. 둘째, 본 연구에서는 구체물과 오목다각형, 볼록다각형의 이해도를 살펴보기 위하여 구체물의 경우 바나나와 체리, 휴대폰 등 6가지의 구체물 그림을 검사지에 활용하였고, 오목다각형과 볼록다각형도 서로 다른 6가지의 도형을 2009년 개정 교육과정의 교과서에 근거하여 제작하고 활용하였다. 이렇게 서로 다른 대상을 활용한 이유는 본 연구의 검사지가 문항의 개수가 많고 유형이 다양하여 모든 문항의 대상을 같은 것으로 사용하면 학생들이 서로 다른 문항을 같은 문항으로 착각하는 경우가 생기는 것을 방지하기 위함이었다. 따라서 구체물 그림의 복잡한 정도나 도형의 난이도에 따라 학생들의 문항 정답률에 차이가 있을 수 있기 때문에, 문항의 변환 대상 도형을 같게 하고 변환 방법과 요소를 달리하였을 때 어떻게 이해하는지를 추가 연구할 필요가 있다. 셋째, 본 연구는 학생들의 평면도형의 이동에 대한 이해도를 알아보기 위해 검사지를 제작하여 해결하게 한 후 그 검사 결과를 분석하였다. 평면도형의 이동의 교수·학습이 이루어지는 과정을 분석한 후속 연구를 통하여 학생들의 평면 도형의 이해 정도를 보다 심층적으로 보완 분석할 필요가 있다. 본 연구에서는 2009 개정 수학과 교육과정의 교과서를 학습한 학생들의 이해도를 조사하였다. 현재는 2015 교육과정의 교과서가 현장에 적용되고 있다. 교과서 분석 결과 교육과정에 따라 평면도형의 이동을 지도하는 방법에 차이가 있었다. 2015 교육과정의 변화와 그에 따른 국정교과서 및 현재 집필 중인 다종의 검정교과서의 평면도형의 이동 내용에 대한 분석 연구에 그것으로 학습한 학생들의 이해도와 어려움에 대한 연구를 후속 연구의 몫으로 넘겨 두고자 한다.

※ 논문 투고일: 2020. 8. 21. ※ 논문 수정일: 2020. 8. 25. ※ 게재 확정일 : 2020. 8. 31.

www.kci.go.kr

〈참고문헌〉

강홍재, 권성룡, 김성준, 김수환, 신준식, 이대현, 이종영, 최창우(2018). **2015 교육과정에 따른 초등수학교수법**. 동명사.

교육과학기술부(2011). **수학과 교육과정 : 교육과학기술부 고시 제 2011-361호**. 교육과학기술부.

교육부(2015). **2015 수학과 교육과정**. 국가교육과정정보센터 홈페이지(http://ncic.go.kr/).

교육부(1997). **수학과 교육과정 : 교육부 고시 제 1997-15호**. 교육부.

교육인적자원부(2007). **수학과 교육과정 : 교육인적자원부 고시 제 2007-79호**. 교육인적자원부.

김남균, 오은선(2007). **초등학생의 공간능력에 대한 조사 연구. 초등수학교육 11권 1호**, 21-38.

김유경(2007). **초등학교 6학년 학생들의 공간감각과 공간추론능력 실태조사**. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위청구논문.

김은영(2009). **4D frame 활용 학습이 초등학생의 공간감각 능력 신장에 미치는 효과**. 서울교육대학교 교육대학원 석사학위청구논문.

나훈희(2015). **탐구형 앱이 공간감각과 수학적 태도에 미치는 효과**. 서울교육대학교 교육대학원 석사학위청구논문.

서보억, 김남균 ,도종훈, 박윤범, 김기탁, 박영은, 최인영, 이화영(2017). **수학과 교육과정 변천에 대한 분석 연구**. 한국과학창의재단 연구 보고서.

이보현(2009). **쌓기나무와 지오픽스를 활용한 학습이 공간감각 및 수학적 태도에 미치는 영향**. 부산교육대학교 교육대학원 석사학위청구논문.

이성미(2007). **초등학생들의 공간감각 이해능력 실태조사**. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위청구논문.

이승진(2017). **초등학생의 평면도형 이동의 이해에 관한 연구 : 3~5학년을 중심으로**. 청주교육대학교 교육대학원 석사학위청구논문.

이주용(2013). **4D 프레임 활용 학습이 초등 수학영재학생의 공간감각 및 수학적 창의성에 미치는 영향**. 대구교육대학교 교육대학원 석사학위청구논문.

임리주(2009). **디지털교과서를 활용한 도형 수업이 초등학교 6학년 학생들의 공간감각과 수학 교과학습태도에 미치는 영향**. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위청구논문.

조영선(2010). **초등학생들의 공간감각 실태 조사**. 경인교육대학교 교육대학원 석사학위청구논문.

홍용락(2009). **초등학교 아동의 공간인지능력 향상을 위한 3차원 컴퓨터 그래픽 Shade 프로그램 적용 : 초등학교 6학년을 중심으로**. 대구교육대학교 교육대학원 석사학위청구논문.

NCTM(1989). **수학교육과정과 평가의 새로운 방향**. 구광조, 오병승, 류희찬(공역). 서울: 경문사.(영어원작은 1989년 출판).

NCTM(2007). **학교수학을 위한 원리와 규준**. 류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙(공역). 서울: 경문사.(영어원작은 2000년 출판).

www.kci.go.kr

〈Abstract〉

A study on elementary students' understanding of the transformation of plane figures: a focus on 3rd-5th graders

Lee, Seung Jin[1], Kim, NamGyun[2]

In elementary school, transformation of plane figures aims to cultivate a sense of space. Sliding, flipping, and rotating are the contents of plane figure transformations in elementary school curriculum. The purpose of this study was to elaborately investigate elementary school students' understanding of the transformation of plane figures.

For this, the following research question had been set up: 1) Are there any differences in understanding the three kinds of transformations (sliding, flipping, rotating) according to objects and elements of transformation?; 2) What are the difficulties that elementary school students face when transforming plane figures?

To find the answers to these questions, sixty items were developed and the tests were conducted with 427 3rd to 5th graders from 6 schools. The analysis results were as follows. Students in the 3rd to 5th graders showed a high level of overall understanding of the transformation of plane figures. Students' degree of understanding was high in the order of sliding, flipping, and rotating. Excluding the sliding transformation, the degree of understanding of the transformation was found to be maintained or increased after learning. Compared to the sliding and flipping transformations, the rotating transformation ranked the lowest in students' understanding of the object and element at hand being transformed as it was found that the 3rd to 5th graders had an incomplete understanding of the rotating transformation. Based on these results, some ideas were proposed to improve teaching methods as well as future studies on the topic.

Key Words : the sense of space, transformation of plane figures, movement of plane figures, sliding, flipping, rotating

1. Teacher, Daejeon Bongmyeong Elementary School, 1sj2236@hanmail.net (lead author)
2. Professor, Cheongju National University of Education, ngkim@cje.ac.kr (corresponding author)

www.kci.go.kr