학교와 수업 연구, 청주교육대학교 교육연구원
Journal of Studies on Schools and Teaching
2022, Vol. 7, No. 1, pp. 1-27
http://doi.org/10.23041/jsst.2022.7.1.001

해법 공간 분석에 기반한 개방형 수업 실행 연구*

김남균[1], 송동현[2], 김수지[3], 오민영[4], 이현정[5]

《 요 약 》

본 연구는 개방형 과제를 활용한 수학 수업을 실행하여 교사의 실천적 지식을 도출하고 개방형 수업의 개선 방안과 후속 연구의 탐색을 목적으로 한다. 개방형 수업의 개선을 위한 방안으로, 학생 해법 공간 분석과 효과적인 논의를 위한 수학 수업 관행에 기반하여 수업을 계획하고 실행하였다. 연구 방법은 교사 4명의 공동 수업 실행 연구이며 연구자 중 4명의 교사가 역과제의 해법 공간을 분석하고 그 분석에 기반하여 수학 수업 5관행에 따라 수업을 계획하였다. 연구자 중 교사 2명이 각각 담임을 맡은 학급의 학생(각반 25명씩)들을 대상으로 수업을 실행하였다. 수업 실행 후 수업의 계획 및 실행 결과와 학생들의 반응을 중심으로 수업자 교사와 관찰자 교사가 수업을 논의하고 성찰하였다. 수업 실행과 성찰을 통하여 해법 공간 분석이 개방형 수업을 실행하는데 주는 이점, 개방형 수업에서 교사가 겪게 되는 어려움과 도전, 개방형 교수법 개선 방안을 연구 결과로 분석하였다. 연구 결과 교사들은 개방형 과제에 대한 해법 공간 분석이 개방형 수업 실행 시 학생의 현재 좌표를 판단하고 해법 공간의 발달을 돕는 교수학적 의사결정을 하는 데 긍정적인 역할을 함을 알게 되었다. 또한, 개방형 수업에서 정답만큼 오답에 대한 분석이 필요하며, 수업에 활용한 개방형 과제의 결과 공간, 방법 공간, 표현 공간의 특성을 개방형 수업 실행에 반영하는 것은 도전적이지만 매우 중요함을 인식하게 되었다. 후속 연구로 역 과제 이외의 다른 유형의 개방형 과제의 해법 공간 분석과 수업 실행 연구, 수학적 논의를 효과적으로 이끌고 학생의 해법 공간을 확장하는 발문에 관한 연구, 오답을 해법 공간 분석에 어떻게 다룰 것인지에 관한 연구가 제안되었다.

주제어 : 개방형 과제, 개방형 교수법, 해법 공간, 수학수업 5가지 관행, 수학적 논의, 실행 연구

---

* 이 논문은 2021학년도 청주교육대학교 산학협력단의 지원을 받아 수행된 연구임(No. CJE2021D007).
1. 청주교육대학교 교수, ngkim@cje.ac.kr (주저자)
2. 종촌초등학교 교사, songdonghyun@korea.kr (교신저자)
3. 개신초등학교 교사, tnwl8416@korea.kr (공동저자)
4. 연서초등학교 교사, omy8529@gmail.com (공동저자)
5. 샛별초등학교 교사, jewelry37@korea.kr (공동저자)

Ⅰ. 서론

수업 시간에 학생들이 해결하는 수학 과제는 수학 학습의 기회를 제공하는 토대가 된다. Stein 외(2017)는 학생들에게 인지적인 요구(cognitive demands)가 상당히 과해지는 과제로 수학 수업을 할 것을 권하고 있다. Becker와 Shimada(2004)는 개방형 과제를 제시하고 이에 대한 여러 가지 정답을 이용하여 수업을 전개하는 개방형 교수법(open-ended approach)을 통해 학생들이 이전에 학습했던 자신의 지식, 기능, 사고 방법을 결합함으로써 무언가 새로운 것을 발견하는 경험을 제공할 수 있다고 보았다. 개방형 과제는 학생들에게 인지적인 요구를 요하는 종류의 과제로써 많은 연구(김은혜, 박만구, 2011; 박화영, 김수환, 2006; 전평국, 문점애, 2002)에서 개방형 과제, 그리고 개방형 과제를 활용한 개방형 수업이 학생들의 수학적 사고력과 창의력을 향상시킨다는 결과를 얻어내었다.

한편, 수학 수업에서 수학적으로 의미 있고 다양한 접근이 가능한 과제 못지않게 중요한 것은 학생들이 과제를 해결하면서 의사소통하고 수학적 탐구를 수행하는 것이다. 교사들은 개방형 수업을 수행하면서 과제에 대한 학생들의 다양한 해결을 예상하고, 학생들의 학습 기회를 확대하기 위하여 의사소통하는 것과 효과적인 논의가 이루어지는 수업을 실천하는 데 어려움이 있다. 김남균(2019)은 교사들이 개방형 과제와 개방형 교수법을 이론적으로 이해하는 데 어려움은 없어 보였지만, 학생들의 다양한 반응과 수학적 논의를 바탕으로 학습이 이루어지는 수업을 계획하고 실행하는 데 필요한 실천적인 이해가 부족하다고 보았다.

개방형 과제에 대한 학생의 다양한 반응을 이해하고 분석하는 방안으로 Leikin(2007)은 해법 공간(solution space)을 사용하였다. Leikin(2007)은 다중해법 개방형 과제의 다양한 해법을 공간의 개념으로 정리하고 학생들이 해결하는 과정을 수학적 창의성 관점에서 분석하였다. 김남균 외(2020)는 약수와 배수와 관련된 개방형 과제를 6가지 유형에 따라 개발하고, Leikin(2007)의 해법 공간 개념을 상세히 체계화하여 과제별 해법 공간과 5, 6학년 학생들의 실제 해법 공간을 분석하였다. 선행연구(Leikin, 2007; 김남균 외, 2022)에서는 해법 공간 분석이 개방형 과제를 해결하면서 드러나는 학생의 다양한 수학적 해결 방법을 체계적으로 이해하는 데 유용하고 해법 공간 분석 결과를 개방형 교수법을 실행하는 데 활용할 수 있다고 보았다.

하지만 개방형 교수법에 대한 이론적 지식과 학생의 이해 분석 결과가 교사에게 구체적으로 무엇을 어떻게 해야 하는지 일련의 교수 행동에 충분한 지침을 제공해주지 못할 수도 있다. Smith와 Stein(2013)은 학생들의 생산적인 수학적 논의를 위하여 교사가 세운 목표와 선택한 과제의 일관성을 알아보고, 수업 중에 학생들의 학습 기회를 촉진하기 위하여 교사의 수업 계획

과 실행에 중요한 관행 5가지를 제안하였다. 5 관행은 수업의 계획과 실행의 전 과정에 관련되며 학생의 해법을 연결 짓고 수업의 목표를 달성하는 유의미한 안내와 발문 그리고, 구체적이고 체계적인 수업 지침들을 제공한다. Smith와 Stein(2013)이 제시한 5 관행은 학생들이 개방형 과제를 활발하게 논의하며 수학적으로 의미 있는 탐구가 일어나도록 수업을 수행하는 데 어려움을 겪고 있는 현장의 교사가 개방형 수업을 개선하고 개방형 교수법에 대한 실천적인 지식을 탐색하는 데 도움이 될 것으로 보인다.

이에 본 연구에서는 참여 교사들이 개방형 수업을 해법 공간의 관점에서 재해석하고, 5 관행에 따라 수업을 계획하고 실행하고자 노력하였다. 개방형 수업에 관한 다수의 선행연구(e.g. 박화영, 김수환, 2006; 전평국, 문점애, 2002)는 학생들의 수학적 창의성 신장에 관한 개방형 수업의 효과를 밝혔다. 이와 달리, 본 연구의 목적은 학생의 해법 공간 분석과 효과적인 논의를 위한 수학 수업 5 관행에 기반하여 개방형 수학 수업을 실행하여 교사의 실천적 지식을 도출하고 개방형 수업의 개선 방안과 후속 연구를 탐색하는 데 있다. 본 연구의 연구 문제는 다음과 같다.

첫째, 수학 과제의 해법 공간 분석은 교사가 개방형 수업을 계획하고 실행하는 데 어떤 도움이 되었는가?
둘째, 해법 공간 분석을 토대로 개방형 수업을 실행하는 데 교사는 어떤 어려움과 도전 사항을 경험하였는가?
셋째, 수업의 계획과 실행의 성찰을 통하여 얻은 개방형 수업의 개선 및 실천하는 방법은 무엇인가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 개방형 교수법

Becker와 Shimada(2004)는 개방형 교수법을 교사가 학생들에게 하나의 방법만으로는 정답이 정해지지 않는 문제 상황을 제시하고, 학생들이 이미 배웠던 모든 지식과 기능, 수학적인 사고방식을 결합함으로써 새로운 것을 발견하는 경험을 제공하기 위해 다양한 문제해결 방법을 사용하도록 하는 것으로 정의하였다. 이러한 방법을 수업에서 실행하려면 과제와 과제 상황, 예상되는 반응들과 그에 대한 논의, 교실 수업의 기록으로 나누어서 계획하여야 한다. 좀 더 자세히 살펴

보면 수업 활동은 학생들이 다른 학생들의 발견이나 방법을 보고, 서로 다른 생각들을 비교하고 검토하며, 자신들의 생각들을 수정하고 심화하면서 이루어진다. 또한, 교사는 학생들이 상황을 적절히 수학화하고, 지식과 기능을 적절히 사용함으로써 수학적인 규칙 혹은 관계를 발견하며, 문제를 해결하고, 결과를 검사할 수 있도록 구조화해야 한다. 이러한 개방형 교수법의 장점과 단점은 〈표 1〉과 같다.

〈표 1〉 개방형 교수법의 장단점(Becker·Shimada, 2004)

장점	단점
1. 학생들이 수업에 적극적으로 참여하고 자기 생각을 더욱 자주 발표한다. 2. 학생들은 자신의 지식과 기능을 광범위하게 사용할 기회를 더 많이 얻는다. 3. 비록 부진아일지라도 문제에 대하여 자신에게 유의미한 방식으로 반응할 수 있다. 4. 학생들은 증명하게끔 잠재적으로 동기화된다. 5. 학생들은 발견하는 기쁨을 누리게 되고, 학생들의 인정을 받게 된다.	1. 유의미한 수학적 문제 상황을 만들거나 준비하기가 어렵다. 2. 교사들은 문제를 성공적으로 제시하기가 어렵다. 가끔 학생들은 어떻게 반응해야 하는지를 이해하는데 어려워하거나 수학적으로 유의미하지 않은 답을 제시하기도 한다. 3. 몇몇 능력이 있는 학생들도 자신들의 답에 대하여 불안해할 수 있다. 4. 학생들은 정리하는 데 어려움이 있기 때문에 자신들의 학습이 만족스럽지 않다고 느낄 수도 있다.

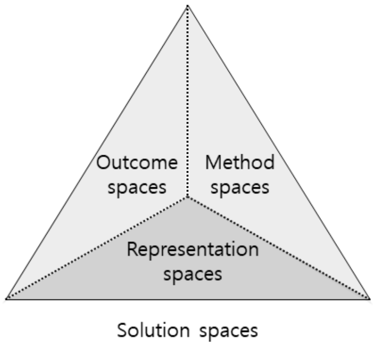
2. 해법 공간 분석

Leikin(2007)은 학생의 수학적 창의성을 측정하고자 해법 공간 개념을 제안하고, 학생들이 다중해법 과제를 해결한 다양한 해법을 분석하였다. 이때, Leikin(2009a)은 수학적 표현과 수학적 성질을 바탕으로 학생들의 해법을 서로 다른 것으로 나누었다. 그런데 Leikin의 연구(Lekin, 2007; Lekin, 2009a; Lekin, 2009b; Lekin & Lev, 2013)에서 사용되는 다중해법 과제(Multiple solution tasks)는 개방형 과제 중 하나이지만, 정답은 하나이고 그 답을 내는 방법이 여러 개다. 본 연구에서는 답이 여러 개인 개방형 과제를 사용하기 때문에 이와는 차이가 있다.

Tsamir 외(2010)는 해결한 결과와 방법이 모두 다양한 개방형 과제의 해법 공간을 분석하는 틀을 제안하였다. Tsamir 외(2010)는 과제에 대한 해법(Solutions)이 결과(Outcomes)와 이를 내는 방법(Methods)으로 이루어진다는 점을 바탕으로 해법 공간을 결과 공간과 방법 공간으로 나누어 정의하였다. 이를 바탕으로 학생들이 구성한 결과 공간과 방법 공간을 각각 분석하고, 결과 공간과 방법 공간을 연결 지어 교차 분석하였다.

김남균 외(2022)는 해결한 결과와 방법에 대한 다양한 표현이 존재하고 기록되어 있다면 수학

적 표현에 대해서도 분석할 수 있다고 보았다. 이에 개방형 과제를 해결한 학생들의 해법이 기록된 평가지를 분석하여 결과 공간(Outcome spaces), 방법 공간(Method spaces), 표현 공간(Representation spaces)으로 [그림 1]과 같이 구조화하고, 3가지 공간을 결합하여 OMR-분석 틀(OMR-framework)이라는 새로운 해법 공간 분석 틀을 제안하였다.



[그림 1] 해법 공간 분석 틀(김남균 외, 2022)

이처럼 해법 공간 개념을 통해 개방형 과제를 해결한 학생들의 해법을 연구자의 관점에 따라 다각도로 분석할 수 있다. 개방형 과제는 사용하고자 하는 목적에 따라 Leikin(2007)처럼 결과는 하나이지만 해결 방법이 여러 개인 과제를 사용할 수 있으며, Tsamir 외(2010)와 같이 결과와 방법이 둘 다 개방된 과제를 제시할 수도 있다. 본 연구에서 활용하고자 하는 과제는 결과와 방법이 모두 열려있는 과제이면서 수업 중에 활동지를 통하여 학생들의 해결 과정을 관찰할 수 있으므로 김남균 외(2022)의 해법 공간 분석 틀이 적절하다고 보았다.

3. 수학 수업 계획과 실행의 5가지 관행

수학적 논의의 목적은 특정한 문제를 해결하기 위하여 다양한 방법들을 개별적으로 발표하는 것이 아니라, 학생들이 서로의 발표를 기초로 하여 이를 이어가며 강력한 수학적 아이디어를 구성하도록 돕는 것이다. 이때 5가지 관행은 교사들에게 의사결정 일부를 수업의 계획 단계에서 미리 하게 하여 교수학적 결정을 하는 데 더 많은 시간을 할애하도록 도울 뿐만 아니라, 논의에서 일어날 법한 일에 대해 어느 정도 통제할 수 있게 한다. Smith와 Stein(2013)이 제안한 5가지 관행은 다음과 같다.

가. 도전적인 수학적 과제에 대한 학생들의 반응을 **예상하기**(anticipating)
나. 학생들이 짝과 함께 또는 모둠별로 과제를 가지고 활동하는 동안 학생들의 과제에 대한 실질적인 반응을 **점검하기**(monitoring)
다. 전체 논의 동안에 수학적인 활동을 발표할 특정한 학생들을 **선정하기**(selecting)
라. 특정한 순서로 발표될 수 있도록 학생들의 반응을 **계열짓기**(sequencing)
마. 다양한 학생들의 반응을 연결하고, 그 반응들을 핵심적인 수학적 아이디어와 **연결하기**(connecting)

각 단계별로 수업의 계획과 실행에서 중요한 점은 다음과 같다. 첫째, 예상하기 단계에서는 교사들이 가능한 한 다양한 방법으로 그 문제를 풀어보는 것이 필요하다. 교사들은 때때로 동료들과 함께 그 과제로 활동해보면서, 그 과제에 이용 가능한 반응을 검토하고, 그 과제에 내재된 수학적 아이디어에 대한 학생의 학습에 관한 연구를 참고하면서 개별적으로 생각할 수 있는 것을 확장하는 데 유용하다는 점을 확인할 수 있다.

둘째, 점검하기 단계에서는 학생들을 단지 바라보고 듣는 것 그 이상이며, 이는 매우 중요하다. 점검하는 동안에 교사는 학생들의 사고를 가시적으로 만드는 발문, 학생들이 자신들의 사고를 명확하게 하도록 돕는 발문, 반드시 모둠의 구성원 모두 활동에 참여하여야 한다는 것을 확실하게 하는 발문, 학생들이 주의를 기울일 필요가 있는 과제의 양상을 고려하게 하는 발문을 해야 한다.

셋째, 선정하기 단계에서는 교실에서 이용 가능한 학생들의 전략을 점검한 후에, 교사는 특정한 학생들을 선정하여 나머지 학급 친구들과 함께 자신들의 활동을 공유하면서 특정한 수학을 검토하게 할 수 있고, 이로써 교사는 논의를 더욱 잘 관리할 수 있다(Lampert, 2001; Smith & Stein, 2013에서 재인용).

넷째, 계열짓기 단계에서는 예시를 통해 순서를 가장 덜 정교한 전략의 가장 덜 정교한 표현으로부터 시작하여 가장 정교한 전략으로 끝맺는 것이다. 발표할 특정한 학생을 선정한 후 교사는 발표의 순서를 계열지어야 한다. 학생들의 활동을 공유하는 순서를 의도적으로 선택함으로써, 교사는 논의에서 수학적인 목표를 달성할 기회를 극대화할 수 있다.

다섯째, 연결하기 단계에서는 교사가 수업에서의 핵심적인 수학 아이디어들끼리의 연결뿐만 아니라, 학생들이 자신들의 해결 방법과 다른 학생들의 해결 방법을 서로 연결하도록 도와야 한다. 교사는 학생들이 해결할 수 있는 문제들에 대한 다른 접근 방법의 결과를 판단하고, 문제를 해결할 때 어떤 방법이 정확하고 효율적인지, 그리고 가장 쉽게 식별할 수 있는 수학적 패턴의 종류가 무엇인지 판단하도록 도울 수 있다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 참여자

본 연구의 참여자는 초등학교 교사 4명과 초등학교 5, 6학년 학생 50명이다. 본 연구에 참여한 교사 4명은 이전에 개방형 과제의 해법 공간을 분석하는 공동연구(김남균 외, 2022)를 수행하여 개방형 수업과 해법 공간에 대한 전문성을 쌓고 있으며, 해당 연구를 통하여 개방형 수업 중 학생의 실제 반응을 확인할 필요성을 인식하였다. 본 연구에 참여한 교사 4명은 해법 공간 분석을 바탕으로 한 개방형 수업을 함께 계획하고 반성하였으며, 이 중 5, 6학년 담임을 맡은 교사 2명이 각각 자신의 교실과 학생의 상황에 맞게 개방형 수업을 실행하였다. 본 연구의 목적은 해법 공간 분석에 기반한 개방형 수업 실행의 실천적 지식을 나누는 데 있으므로, 수업 계획과 실행 후 4명의 참여교사가 공동 연구자가 되어 수업의 계획과 실행을 논의하고 성찰하였다. 연구에 참여한 교사 4명을 각각 T1-T4로 지칭하고 연구 참여 교사의 특성을 요약하면 <표 2>와 같다.

T1-T4는 모두 초등수학교육 전공으로 T2, T3는 석사 학위 소지자이고, T1, T4는 석사과정 재학 중이다. <표 2>를 살펴보면 본 연구에 참여한 교사 4명의 학교 소재지, 교육 경력, 담임 학년은 각기 다양하다. 본 연구의 개방형 수업에 쓰인 개방형 과제는 약수와 배수의 개념을 활용하여 해결할 수 있는 과제이다. 따라서 약수와 배수 단원을 학습한 5, 6학년 학생을 대상으로 개방형 수업을 실행할 필요가 있었다. 이에 5, 6학년 담임교사인 T1, T2가 담임 학급 학생들을 대상으로 개방형 수업을 실행하였다. 수업 교사 두 명의 특성, 수업 문화, 수업 목표 등의 차이가 개방형 수업 실행에 영향을 줄 수 있음을 감안하고 연구 결과를 해석하였다. T1, T2 교사가 근무하는 G 초등학교, J 초등학교는 교육열이 심하지도 덜하지도 않은 동 지역에 소재한 학교이며 학력 수준이 보통이라는 평을 받는다. T1이 개방형 수업을 실행한 G 초등학교 5학년 학생 25명 중 수학 부진 학생 수는 1명이며, T2가 개방형 수업을 실행한 J 초등학교 6학년 학생 25명 중 수학 부진 학생 수도 1명이다.

<표 2> 연구 참여 교사의 특성

구분	소속	학교 소재	경력	성별	학년	수업 인원
T1*	G 초등학교	동 지역	8	여	5	총 25명 (남 14, 여 11)
T2*	J 초등학교	동 지역	3	남	6	총 25명 (남 11, 여 14)
T3	Y 초등학교	면 지역	4	여	4	·
T4	S 초등학교	동 지역	10	여	비담임	·

수업 교사*

2. 개방형 수업의 계획과 실행

본 연구에서 개방형 수업은 대면 수업 형태로 T1교사의 학급과 T2교사의 학급에서 각각 1회씩 총 2회 실시되었다. 본 연구에 참여한 교사 4명이 공동으로 작성한 교수학습지도안을 토대로 T1이 초등학교 5학년 학생 25명을 대상으로 1차 수업하고, 활동 형태와 발문의 일부를 수정하여 T2가 초등학교 6학년 학생 25명을 대상으로 2차 수업하였다. 개방형 수업의 계획을 요약하면 <표 3>과 같으며, 수업 시간은 80분으로 예상하였다.

<표 3> 개방형 수업 계획

수업 목표	1. 역 과제를 이해하고 약수, 배수, 공배수의 개념을 활용하여 두 수의 쌍을 다양하게 찾아 표현하고 검토한다. 2. 두 수의 쌍을 찾는 해법을 설명하고 친구의 해법을 이해하며 서로 다른 해법을 비교한다. 3. 두 수의 쌍을 찾는 해법을 정교화하여 공배수가 24인 두 수의 쌍을 모두 찾는다.			
개방형 과제	공배수가 24인 두 수의 쌍을 가능한 많이 찾으세요.			
교수학습자료	활동지, 점검표, 실물화상기			
교수학습 활동			**활동 형태**	
교사	**학생**	**관련 목표**	**1차**	**2차**
점검하기	약수와 배수 개념 복습하기 과제이해 및 과제 해결하기	1	개별	개별
선정하기· 계열짓기	짝 또는 모둠으로 해법 비교하기 색 볼펜으로 해법 수정·보완하기	1, 2	짝·모둠	모둠
연결하기	모둠의 해법 설명하고 검토하기 모둠의 해법 비교하기	2, 3	전체	전체
적용하기	공배수가 16인 두 수의 쌍 찾기	3	개별	개별

수업에서 사용한 개방형 과제는 김남균 외(2022)에서 개발한 역 과제로 공배수가 24인 두 수의 쌍을 가능한 많이 찾는 과제이다. 김남균 외(2022)에 따르면 해법 공간은 결과 공간, 방법 공간, 표현 공간으로 이루어지는데, 이 과제는 결과, 방법, 표현이 모두 다양하여 해법의 다양성이 보장되는 개방형 과제이다.

김남균 외(2022)의 해법 공간 분석 결과에 따르면 결과 공간은 24의 약수인 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24를 조합한 두 수의 쌍 36개로 이뤄지며 결과 공간의 유형은 결과의 개수와 특징에 따라 5가지 유형으로 나뉜다. 결과 공간 Ⅰ유형은 결과의 개수가 36개부터 15개인 경우로, 24의 약수를 모두 조합하여 전체 36개의 결과를 모두 찾은 경우, 1과 24를 제외한 2, 3, 4, 6, 8, 12를 조합하였지만 같은 수끼리 조합하지 않아 15개의 결과를 구성한 경우가 이 Ⅰ유형의 경계를 이룬다. 결과 공간 Ⅴ유형은 결과의 개수가 4개부터 1개인 경우로, (1, 24), (2, 12), (3, 8), (4, 6)과 같이 곱한 값이 24인 두 수의 쌍으로만 이루어진 점이 특징적이다.

김남균 외(2022)에서 방법 공간은 앞 수 고정, 뒷 수 고정, 두 수 변동, 쌍 위치 변환, 같은 수 조합과 같은 5가지 방법으로 이뤄지고, 표현 공간은 쌍을 나타내는 표현 5가지와 쌍과 쌍을 구분하는 표현 5가지로 구성된다. <표 4>는 개방형 과제의 해법 공간 중 방법 공간과 표현 공간을 요약한 것이다.

<표 4> 개방형 과제의 해법 공간(김남균 외, 2022)

방법 공간		표현 공간	
방법	예시	쌍을 나타내는 표현	쌍과 쌍을 구분하는 표현
앞 수 고정	1.1 / 1.2 / 1.3/1.4 / 1.6/1.12/ ~~3~~1.8	a, b	/
뒷 수 고정	(2,24), (4,24), (6,24),(8,24), (12,24)	(a, b)	,
두 수 변동	~~X~~/1,24/~~x~~6,4/2,12/3,8/2,6/1,12/2,12/	a와 b	빈 칸
쌍 위치 변환	1,24/2,12/3,8/4,6/6,4/8,3/12,2/24,1	a×b	줄바꿈
같은 수 조합	(4.4) (2.2) (3.3).(6.6) (12.12)	a-b	삼각형 배열

<표 3>을 살펴보면 개방형 수업은 총 4개의 국면으로 계획되었다. 우선, 개별 활동 형태로 학생들이 약수와 배수 개념을 복습하고 역 과제에 대한 이해를 바탕으로 과제를 해결하도록 하였다. 이때 교사는 학생들이 역 과제를 이해하고, 약수, 배수, 공배수 개념을 적절히 활용하여 두 수의 쌍을 다양하게 찾고 표현하는지 점검하고 학생들이 자신의 해법을 검토하도록 하였다.

다음으로, 짝 또는 모둠 활동 형태로 학생들이 해법을 비교하고 색 볼펜을 사용하여 해법을 수정 및 보완하도록 하였다. 이때 교사는 학생들이 두 수의 쌍을 찾는 해법을 설명하고 친구의 해법을 이해하며 서로 다른 해법을 비교하는 과정을 관찰하여 전체적으로 공유할 해법을 선정하고 공유하는 순서를 결정하였다. 계획했던 계열은 오류나 오개념이 있는 해법을 공유한 뒤 결과의 개수가 적은 순서대로 결과 공간 Ⅴ유형부터 결과 공간 Ⅰ유형을 논의하여 공배수가 24인 두 수의 쌍을 점진적으로 완성하는 것이었다.

수업의 세 번째 국면은 전체 활동 형태로, 학생들이 모둠의 해법을 설명하고 서로 검토 및 비교하도록 하였다. 이때 교사가 결정한 계열대로 학생들과 전체 논의를 진행하며 전체 결과를 찾고 전체 결과를 찾는 효과적인 방법이나 표현을 논의하였다. 마지막으로, 학생들이 전체 논의를 통해 정교화한 해법을 공배수가 16인 두 수의 쌍을 찾는 유사한 과제에 적용하도록 하였다.

Smith 외(2019)는 성공적인 수학적 논의를 위한 예상하기란 학생들의 반응을 예상하는 것에 그치지 않고 학생의 사고에 어떻게 반응해줄 것인지까지 계획하는 것을 포함한다. 따라서 Smith 외(2019)의 권고에 따라 본 연구에서는 탐색하는 질문(assessing question)과 의미와 관계를 탐구하는 질문(advancing question)을 〈표 5〉와 같이 계획하고 실행하였다.

〈표 5〉 개방형 수업의 질문 계획

탐색하는 질문 (assessing question)	의미와 관계를 탐색하는 질문 (advancing question)
• 이 과제는 우리가 복습했던 내용과 어떤 점이 다르거나 새롭나요? • 두 수의 쌍을 찾는 데 사용한 수들은 어떤 특징이 있나요? • (24, 48), (48, 96)은 알맞은 답인가요? • (2, 12), (3, 8), (4, 6)은 알맞은 답인가요? • (2, 12), (3, 8), (4, 6)을 어떻게 찾았나요? • 공배수가 24인 두 수의 쌍을 가능한 많이 찾기 위해 어떤 방법을 사용했나요?	• 빠트린 답은 없을까요? • (24, 24)도 추가할 수 있나요? • 또 어떤 답을 추가할 수 있나요? • 내가 적은 답과 짝이 적은 답은 어떤 공통점과 차이점이 있나요? • 곱해서 □가 되는 수의 쌍은 항상 공배수가 □인 두 수의 쌍인가요? • □의 약수와 □의 공배수에는 항상 □가 있나요? • □의 약수가 아닌 수와 □의 공배수에는 □가 있나요? • □의 약수와 1의 공배수에는 항상 □가 있나요?

본 연구의 목적은 1차, 2차 수업을 비교하는 데 있지 않지만, 1차 수업 결과를 반영하여 2차 수업에서는 활동 형태와 발문을 일부 수정하였다. 1차 수업에서 짝, 모둠, 전체 형태로 해법을 공유하는 과정이 중복된다는 판단 아래 2차 수업에서는 짝 활동 없이 모둠, 전체 형태로만 해법을 공유하였다. 2차 수업에서는 〈표 5〉의 질문 계획을 사용하였고, 결과, 방법, 표현을 부각하고

자 ‘가장 정답에 가까운 답과 그렇게 생각한 까닭은 무엇인가요?’, ‘과제 해결을 위한 중요한 생각은 무엇인가요?’, ‘다른 사람을 이해시키기 좋았던 표현은 어떤 것인가요?’와 같은 발문을 추가로 사용하였다. 1차 수업에서는 일부 학생들이 분수 또는 소수를 사용하여 해법을 구성할 수 있는지 수업 끝 무렵까지 고민하였는데, 2차 수업에서도 이와 같은 장면이 있었으나 교사가 일찍이 점검하기 도중에 논점이 아니라는 판단 아래 분수 또는 소수를 사용할 수 없음을 명확히 하였다.

3. 자료 수집 및 분석

본 연구 절차에 따라 수집한 자료의 목록은 <표 6>과 같다.

<표 6> 연구 절차 및 자료 수집

연구 절차	자료 수집
선행 연구 검토 및 개방형 수업 경험 나눔	
개방형 수업 공동 계획(5번의 회의)	교수학습지도안, 줌 회의 녹화 자료
1차 수업 (G 초등학교 5학년 25명)	수업 영상, 학생 활동지, 교사 수업일지
2차 수업 (J 초등학교 6학년 25명)	수업 영상, 학생 활동지, 교사 수업일지
수업 관찰(직접관찰, 영상관찰)	수업 관찰 기록 자료(T1~T4)
사후협의회(3번의 회의)	회의 녹화 영상, 회의 전사 자료

먼저, 개방형 수업에 대한 이해를 바탕으로 개방형 수업을 공동 계획하고 서면으로 작성된 교수학습지도안을 수집하였다. 그리고 1차, 2차 수업에서 수업 영상, 학생 활동지, 수업 교사의 수업일지를 수집하였다. 개방형 수업의 모습을 다양한 각도로 수집하기 위하여 촬영 장비를 교실의 앞, 뒤, 모둠별로 설치하고 수업 영상을 수집하였다. 그리고 수업 직후 학생들의 활동지와 수업 교사의 수업일지를 서면으로 수집하였다. 수업일지에는 수업의 난점 및 개선점과 같은 수업 소감을 기록하도록 하였다. 1차, 2차 수업 이후에는 연구에 참여한 초등학교 교사 4명이 각자 1차, 2차 수업의 영상과 학생 활동지를 관찰하였다. 수업 실행 교사, 수업 참여 관찰 교사, 수업 녹화 영상 관찰 교사는 수업 계획과 실행 과정을 반성하여 해법 공간 분석이 개방형 수업 실행에 주는 도움, 어려움, 개선 사항을 기록(수업 관찰 및 성찰 기록)하고 이때 4명의 수업 관찰 및 성찰 기록을 중요 자료로 삼고 분석하였다. 수업 관찰 이후 4명의 교사가 사후협의회를 약 120분간 진행하였으며 수업 관찰 기록을 토대로, 해법 공간 분석이 개방형 수업 실행에 주는 도움,

어려움, 개선 사항을 논의하고 협의하였다. 회의는 비대면 화상회의로 진행되었으며 영상을 녹화하고 전사하여 분석하였다.

자료 분석 방법은 질적인 분석과 공동 토의(집담회)를 통한 합의와 검증이다. 먼저 〈표 6〉의 자료 수집 목록 중 수업 관찰 기록과 회의 전사 자료를 반복하여 읽고 주요 의견과 공통의견을 추출하였다. 수집된 수업 영상(전체 및 모둠), 수업 계획 및 반성 회의의 영상과 전사 자료, 수업 관찰 및 성찰 기록을 본 연구 문제에 따라 분류하고 4명의 교사의 의견에서 공통점을 추출하여 연구 문제에 대한 답을 분석해내었다. 교사의 해법 공간 분석이 개방형 수업을 실행하는 데 어떤 도움과 어려움을 주는지를 범주화하고 분석하였다. 마지막으로 집담회에서 공동 수업 반성을 통해 개선된 개방형 수업의 실행을 위한 성찰적 지식을 이끌어내었다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 개방형 수업 실행에서 얻은 도움

해법 공간 분석을 기반으로 한 개방형 수업의 계획, 실행, 반성의 실행 연구를 통하여 교사들이 얻은 도움을 분석한 결과를 Smith와 Stein(2013)이 제시한 5 관행에 따라 정리하면 다음과 같다.

첫째, 가르치고자 하는 수학적인 핵심 아이디어를 학생들에게 명확하게 제시하는 수업의 목표를 설정하는 데 도움이 되었다. T4는 학생들이 약수와 배수 개념의 핵심인 곱셈 관계를 알고 이해하기를 기대하였다. 특히 학생들이 역 과제를 해결에서 한 수를 고정한 채 다른 수를 바꾸는 결과 공간, 두 수의 위치를 서로 바꾸는 방법 공간의 선택, '(a,b), a와 b, a×b' 의 표현 공간이 학생들의 가역적 사고와 곱셈 관계의 이해를 드러내는 학습의 증거로 삼아 지도에 유용하였다고 보았다. 그리고 T3는 선행연구로 수행하였던 경험 즉, 181명의 학생이 해결한 두 개방형 과제의 해법 공간을 바탕으로 결과 공간, 방법 공간, 표현 공간에 따른 학생의 반응을 예상할 수 있었다고 하였다. 예를 들면, '역 과제를 이해하고 약수, 배수, 공배수 개념을 활용하여 두 수의 쌍을 다양하게 찾아 표현하고 검토한다.', '두 수의 쌍을 찾는 해법을 설명하고 친구의 해법을 이해하며 서로 다른 해법을 비교한다.', '두 수의 쌍을 찾는 해법을 정교화하여 공배수가 24인 두 수의 쌍을 모두 찾는다.'는 것과 같이 해법 공간을 이루는 각 측면을 바탕으로 학습 목표를 좀 더 분명하게 세웠다.

역 과제는 수학적 지식 중에 관계 개념과 관련되어 있고, 수학적 사고 방법 중에서는 가역적 사고와 관련이 있어 보여요. (중략) 5관행에 따르면 인지 수준이 높은 과제를 요구하니까 수업에 사용해도 괜찮지 않을까……. (T4)

우리가 만든 역 과제와 구성 활동 과제는 181명의 답안으로 충분히 예상했잖아요. 이걸 통해서 결과 공간, 방법 공간, 표현 공간에 따라 학습 목표를 세우면 좋을 것 같아요. (T3)

둘째, 다양한 사전 지식과 경험을 가진 학생들에게 형평성을 적절하게 고려하는 과제를 선정하는 데 도움이 되었다. T2는 과제를 고를 때 난이도뿐만 아니라 교사가 활용할 때 현실적으로 부딪힐 수밖에 없는 어려운 점을 걱정하였다. 그러다 보니 학생의 수준, 학습자료 및 준비물 등 비교적 교사가 다루기에 부담이 적은 과제를 선호하였다. 이에 T3는 선행연구에서 분석하였던 역 과제와 구성 활동 과제의 해법 공간을 비교하여 사전 지식에 대한 부담이 적고, 학생들의 응답률이 높은 역 과제가 많은 학생이 탐구하기 좋다고 판단하였다. 왜냐하면, 구성 활동 과제는 완성된 직사각형의 가로와 세로의 곱이 약수와 배수의 관계임을 이용하여 크기가 다른 두 정사각형을 배치해야 하므로 역 과제보다 학생의 상당한 인지적 노력이 필요하였기 때문이다.

결국, 과제를 고른다는 것은 교사의 선택이잖아요. 그러니까 단순히 인지적인 수준으로만 놓고 보면 기존에 있는 개방형이 아닌 과제보다 확실히 높은 상태이고, 그런데 또 너무 어려우면 교사가 또 진행하기가 어렵잖아요. 그래서 한 이 정도 수준이면 학생들이랑 이야기하기가 편할 것 같고, 또 수업 준비에 대한 부담이 덜한 것에 손이 가겠죠. 아무리 좋은 문제라고 해도 준비물이 산더미 같으면 그걸 누가 고르겠어요. (T2)

응답률 측면에서 보면 구성 활동 과제는 지나치게 낮아서 교사가 수학적 논의를 이끄는데 어려울 것 같아요. 반면에 역 과제는 대부분 학생이 응답하였고, 결과와 표현도 훨씬 다양해서 해볼 만하다고 생각해요. (T3)

셋째, 학생들에게 제시한 과제를 수학적으로 어떻게 이해하고 접근할지 예상하는 데 도움이 되었다. T1은 과제에 대한 해법 공간을 분석하는 것을 회의적으로 생각하였다. 하지만, 학생들이 과제에 참여했을 때 과제를 어떻게 수학적으로 해석하는지 이해하고, 과제를 해결하기 위해 사용할 수 있는 전략들이 어떠할지 예상하는 데 도움을 받았다. 이를 통해 수업 중에 드러나는 학생 개개인의 해법 공간을 이해하여 점검하고 선정하는 데 유용했으며, 이후 논의에서 결과 공간, 방법 공간, 표현 공간으로 나누어 학생들의 해결을 다룰 수 있었다.

저는 원래 O-M-R로 나누는 거에 회의적으로 얘기했잖아요. 자꾸 결과 공간에 집중해서

하게 됐고, 특히 R이 의미가 있나, M도 앞 수 고정, 뒷 수 고정 이런 거는 의미가 있는데, 쌍 위치 변환이나 이런 게 큰 의미가 있나 했는데, 오히려 수업하면서 그냥 흘러갔을 수도 있을 것 같은데, 제가 더 많은 내용을 다룰 수 있는 것 같았고……. (T1)

넷째, 사전에 학생들의 접근 방법을 보고 어떻게 반응할지 계획하여 수업 중에 점검하는 데 도움이 되었다. T2는 수업 시간에 학생들이 과제를 해결하던 것에 어떻게 피드백할지 해법 공간을 바탕으로 미리 생각할 수 있는 여유를 얻었다. 예를 들면, '어떻게 구했는지 설명해 줄래요?' 나 '다른 친구가 이해할 수 있도록 표현을 정리해주세요.'와 같이 무엇을 어떻게 했는지 학생의 사고 과정을 살피며 방법이나 표현에 주목하여 점검하게 하였다. 그리고 '여기 두 친구는 결과의 개수가 같은데 서로 다른 것을 구했네요. 무엇이 어떻게 다른지 찾아볼래요?', '서로 비슷한 결과를 찾았는데 표현 방식이 다르네요. 같은 것인지 한번 확인해볼래요?' 또는 '다른 모둠에서는 20개도 넘게 찾았는데 아직 4개밖에 못 찾았군요. 다른 모둠은 어떻게 구했을까요?'처럼 결과 공간을 방법이나 표현과 관련지어 학생 스스로 발견할 수 있도록 안내하였다.

한 학생이 손을 들고 저에게 정답을 확인하거나 아니면 뭔가 도움을 요청했을 때 제가 이 학생에게 현재 상태에서 혼자 더 고민할 시간을 부여할지 아니면 더 나아가서 새로운 생각을 하게 할지를 좀 판단할 때 도움이 되었던 것 같아요. (T2)

다섯째, 수학적 목표에 부합하는 학생의 반응을 확인하여 공유할 대상을 선정하는 데 도움이 되었다. T1은 해법 공간 분석을 통해 수업 중에 학생들이 실제로 하던 것을 빠르게 파악하고 체계적으로 진행할 수 있었다. 그리고 T2는 순회 지도를 하면서 체크리스트를 통해 누가 무엇을 하고 있는지 확인하고, 흥미로운 아이디어가 있는지 기록하면서 이번 시간에 달성 가능한 학습 목표로 계속해서 수정하였다.

분석 틀이 있으니까 점검할 때 빠르게 파악할 수 있었던 점은 좋았고, 그러다 보니까 아까 말했던 것처럼 O-M-R이라는 체계가 있으니까 수업도 이거에 따라서 조금 진행은 됐던 것 같아요. (T1)

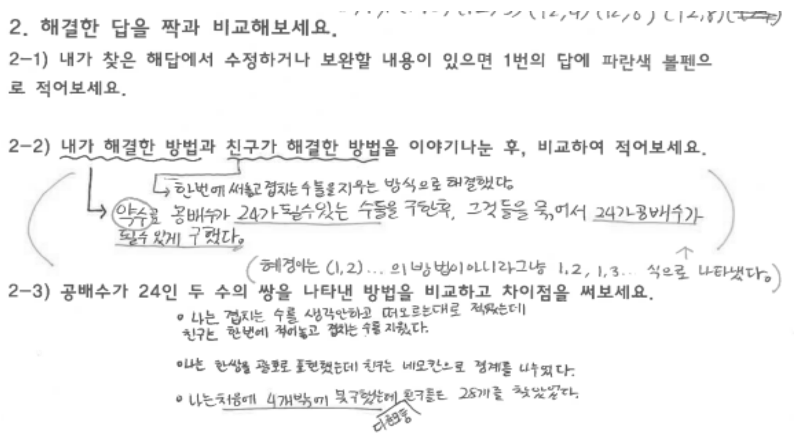
저는 자리 배치표에 처음에는 몇 개 찾았는지 표시했고, 또 서로 공유한 다음에 변화가 있는지, 그리고 눈에 띄는 전략이나 표현은 없었는지 적으면서 학생들의 전반적인 수준을 파악하는 데 노력했어요. (T2)

여섯째, 생산적인 수학적 논의를 위해 학생들의 발표를 어떻게 배열할지 계열짓는 데 도움이

되었다. T1은 비교적 결과가 부족한 전략의 가장 초보적인 표현부터 시작하여 가장 정교한 전략으로 발표시키는 방식이 좋을 것으로 판단을 내렸다. T4는 발표 순서와 관련해서 점진적으로 나아가는 장면이 학생들에게 상위 수준의 인지 구조를 가질 수 있도록 발판을 마련하는 기회로 보았다.

> 분석 틀을 토대로 발표시킬 때도 물론 평소에 할 때도 조금 못한 그러니까 개수가 적다거나 생각이 초보적인 거에서 순서대로 하긴 하지만 확실히 이런 분석 틀로 하니까 조금 더 정확하게 할 수 있었던 것 같아요. (T1)
>
> 발표 순서를 조직하는 부분이나 어떤 것을 먼저 했을 때 더 유의미하게 이야기를 발전시킬 수 있고 논의를 할 수 있는지를 다 세팅이 된 채로 이루어져서 너무 앞서서 많은 것들이 발표되어버리면 사실 뒤에는 아이들이 듣지 않는데 그게 아니라 점진적으로 나아가는 식으로 해서 상위 수준 인지 구조를 가질 수 있도록 좀 뒷받침해줄 수 있는 부분이 있었고, 그게 제공이 됐다고 느껴져서 좋게 보았습니다. (T4)

일곱째, 수업 중에 드러나는 학생들의 해법 공간을 이해하고 해석할 수 있어 과제를 공유하고 논의를 진행하도록 연결하는 데 도움이 되었다. 특히 학생들이 자신의 해결 방법과 다른 학생의 해결 방법을 서로 연결한 것을 확인할 수 있었다.


2. 해결한 답을 짝과 비교해보세요.

2-1) 내가 찾은 해답에서 수정하거나 보완할 내용이 있으면 1번의 답에 파란색 볼펜으로 적어보세요.

2-2) 내가 해결한 방법과 친구가 해결한 방법을 이야기나눈 후, 비교하여 적어보세요.

한번에 써놓고 겹치는 수들을 지우는 방식으로 해결했다.

약수로 공배수가 24가 될수있는 수들을 구한후, 그것들을 묶어서 24가 공배수가 될수 있게 구했다.

(혜경이는 (1,2)... 의 방법이 아니라 그냥 1,2, 1,3... 식으로 나타냈다.)

2-3) 공배수가 24인 두 수의 쌍을 나타낸 방법을 비교하고 차이점을 써보세요.

- 나는 겹치는 수를 생각안하고 떠오르는대로 적었는데 친구는 한번에 적어놓고 겹치는 수를 지웠다.
- 나는 한쌍을 괄호로 표현했는데 친구는 네모칸으로 경계를 나누었다.
- 나는 처음에 4개밖에 못구했는데 친구들은 28개를 찾았었다.

다섯3등

[그림 2] 역 과제를 해결한 학생 활동지

[그림 2]는 T2의 학생으로 처음에는 '(1,24), (2,12), (3,8), (4,6)'으로 해결하였다. 그런데 짝과 비교하면서 결과의 개수가 28개로 늘어났다. 이 학생은 24의 약수에서 공배수가 될 수 있는

수를 짝을 지어 생각나는 대로 나열했는데, 짝은 뒷 수를 24로 고정하다가, 앞 수를 1로 고정하면서 24의 약수를 순서대로 적고 겹치는 수를 지웠다. 그리고 이를 나타내는 방식에서도 괄호의 사용과 사각형으로 경계를 나눈 차이가 있었다. 이처럼 T2는 학생들이 과제를 공유하며 모둠 안에서 개인의 해법 공간이 늘어나는 모습을 직접 관찰하였다.

2. 교사가 직면한 도전과 어려움

해법 공간 분석을 기반으로 한 개방형 수업을 계획하고 실행하며 반성하는 실행 연구를 통하여 Smith와 Stein(2013)이 제시한 5관행의 관점에서 다음과 같은 점이 도전받고 어려움을 경험하였다고 성찰하였다.

첫째, 해법 공간 분석 시 정답의 다양한 측면만 예상하였기에 수업 중에 발생하는 학생의 오답을 논의로 이끌어내는 데 도전을 받았다. 해법 공간 분석에는 오답에 대한 정보가 담겨있지 않았다. 이 때문에 T2는 (1,24), (2,12), (3,8), (4,6)과 같은 답을 구하다가 2×24 등으로 표현을 바꾸어 적기 시작한 학생이 '이렇게 곱하면 24가 넘잖아요.'와 같이 오류를 보였을 때, 수업에서 중요한 논의로 가져올 수 있는 부분이라고 생각하였다. 하지만, 적절한 논의 시점을 찾지 못하여 결국 짚어주지 못한 채 수업을 마무리하였다. T1 또한 학생들이 공배수가 24가 되는 쌍으로 분수 혹은 소수를 제시할 것이라고 미처 예상하지 못하여 논의로 이끌어내지 못하였다.

> (1,24), (2,12), (3,8), (4,6) 이렇게 4개만 구한 학생이 있어서, 개수가 너무 적다고 얘기했거든요. 그런데 어떤 학생이 혼자 2×24 이런 식으로 바꾸기 시작했어요. 그리고 '이렇게 곱하면 24가 넘잖아요.' 하면서 막 적은 거예요. ','에서 '×'로 나가는 시점에서 뭔가 고민이 들었던 것 같은데, 중요한 논의로 가져올 수 있는 부분이지만 이러한 상황을 수업 시작한 지 10분도 채 안 된 시점에 만났어요. 학생에게 기다려달라고 할 수도 없고, 이게 저한테는 제일 어려웠어요. (T2)
>
> 학생들이 분수나 소수 쌍을 찾기도 하였는데, 이걸 수업을 계획할 때 전혀 예상하지 못했어요. 학급에서 분수나 소수 쌍을 찾은 아이들이 3명 있었거든요. 그런데 모둠별로 토의를 하며, 아이들끼리 모둠 안에서 분수나 소수에 대한 얘기가 더 활발히 얘기되었지만, 결국 제가 잘 다뤄주지 못했어요. (T1)
>
> 분수 얘기는 6모둠에서도 하더라고요. 그래서 이건 솔직히 예상하지 못했는데, 해법 공간을 분석해도 예상치 못하는 건 또 나온다는 생각도 들고……. (T3)

둘째, 학생들의 해결을 점검하면서 방법 공간과 표현 공간에 주의를 기울이도록 하는 데 도전

을 받았다. 본 연구진은 해법 공간을 이루는 결과 공간, 방법 공간, 표현 공간에 두루 주의를 기울이도록 수업을 계획하였다. 하지만, 아래 T2, T3, T4가 공통적으로 고민하는 바와 같이 학생들에게 방법 공간이나 표현 공간이 무엇인지 명확하게 설명하는 것이 되려 학생들의 논의를 저해할까 우려되어 분명하게 발문을 하지 못하였고, 이에 결과 공간으로만 이야기를 나누게 되는 어려움을 겪게 되었다.

> 아이들에게 5분을 주고 한번 돌아보니까 다 푼 거예요. 이미 다 풀어서 놀고 있길래 결과와 방법을 한번 이어볼까 생각을 했어요. 그런데 문제는 학생들이 방법이랑 표현이랑 구분할 줄 모르는 거예요. 그렇다고 그 자리에서 '이건 방법이고, 이건 표현이야.' 이럴 수가 없잖아요. 그러니까 내버려 뒀죠. 내버려 두다 보니까 이제 제가 할 수 있는 일은 그냥 결과로만 이야기할 수밖에 없는 거예요. 그래서 이 문제를 해결하기 위해서 어떻게 생각하는 것이 중요했던 것 같은지, 그러한 학생은 누군지, 그리고 친구들이랑 이야기할 때 누가 이해하기 쉽게 말을 잘했는지. 이렇게 결과 공간과 방법 공간, 표현 공간을 말로는 설명을 못 해도 그냥 약간 둘러서 그 자리에서 나름의 표현을 할 수밖에 없었어요. (T2)
>
> 우리는 해법 공간을 결과 공간, 방법 공간, 표현 공간으로 나누어 분석하지만, 학생들은 우리와 같은 시각으로 보는 게 아니다 보니, 이렇게 진행될 수밖에 없는 것 같아요. 학생들에게 결과, 방법, 표현 딱 나눠 가지고 체계적으로 말해주면 좋을 텐데, 그걸 명확하게 시키기는 어렵고……. (T3)
>
> 교사의 말이 너무 큰 단서가 되면 아이가 사고할 수 있는 폭이 줄어드는 건 확실히 맞기 때문에 선생님이 대략적으로 말을 할 수밖에 없고, 어디까지 말을 해 주어야 하는지, 사실 이 수업뿐만 아니라 항상 그렇지만 우리의 과제의 경우 더욱 어려운 부분이 있었어요. (T4)

셋째, 모둠 내에서 어떤 학생이 발표하는 것이 좋을지 선정하는 데 도전을 받았다. T1은 모둠의 모든 학생이 하나의 의견으로 통일되었을 거라고 지레짐작하였다. 이 때문에 모둠 활동 시간 대부분을 발표자를 정하는 데 보내는 모둠이 생겼고, 전체 논의 시간에 모둠의 대표 발표 학생이 결과 공간만 피상적으로 발표하여 효과적인 논의에 기여하지 못하는 상황을 겪게 되었다. 다음은 T1 교사의 수업 중 모둠 논의 시간에 이루어진 어느 모둠 대화의 일부분이다.

S1 : 선생님, 지금 분열이 생겼습니다.
T1 : 어, 왜요? 어떤 분열이요?
S1 : 얘네들이 누가 발표해야 하는지…….
T1 : 아, 발표는 여러 명이 나와도 되니까 걱정하지 말고요. 지금은 발표자 정하는 것보다는

의견을 정하는 게 중요해요. 어떻게 정리할지 생각해 보세요.

S1 : 일단 쉬운 단계를 네가 설명하고, 그다음 중간 단계를 설명하고 나머지 단계는 내가 설명하면 되나? 내가 마지막 것 맡을 테니까.

S2 : 아, 너네끼리 해.

이 모둠은 모둠 활동 시간의 대부분을 발표자를 정하는 데 치중하였다. 교사가 학생의 개인별 해법 공간과 모둠별 해법 공간을 비교하여 유용한 아이디어를 발표할 수 있는 학생을 선정하였다면, 모둠 논의 시간에 학생들이 시간을 보다 효율적으로 사용하고 전체 논의의 내용도 풍부해졌을 것이다.

모둠 활동을 하면 일단 발표자를 정하고, 발표 순서에 대해서 얘기를 더 많이 하고 내용 얘기는 나중에 하는 것 같아요. 아이들이 알아서 척척 내용 얘기부터 잘하면 좋을 텐데 이런 걸 어떻게 조성할까 하는 그런 고민도 들었고요. (T3)

넷째, 모둠 토의를 통해 구성한 모둠별 해법 공간이 개인별 해법 공간과 비교해 어느 정도로 확장될지 계열짓는데 도전을 받았다. T1과 T2는 개인별 해법 공간과 비슷하게 모둠별 해법 공간의 결과 공간이 Ⅰ~Ⅴ수준으로 다양하게 나올 것으로 예상하고, 모둠별 토의 후 Ⅴ수준에서 Ⅰ수준 순으로 연결 짓는 것을 계획하였다. 그리고 실제 수업에서 드러난 개인별 해법 공간은 Ⅲ수준을 제외한 모든 결과 공간이 드러났다. 하지만, 모둠 토의 후 모둠별 해법 공간은 모두 Ⅰ수준이거나, Ⅰ수준 혹은 Ⅴ수준으로 구성되었다. 이로 인해 T1, T2는 처음 계획과는 다르게 무엇에 초점을 두면서 수학적 논의를 이끌면 좋을지 결정하지 못해 난처하였다.

수업 계획은 분명 체계적으로 했다고 생각했는데, 아이들이 이렇게 다 Ⅰ유형으로 나올지 몰랐거든요. 이게 제가 검토했던 부분인데, 대부분이 Ⅴ유형이었고, 토의를 통해 향상될 것 같긴 했지만 Ⅰ유형이나 Ⅱ유형, Ⅳ유형 등이 나오겠구나 예상을 했는데, 학생들이 다 Ⅰ유형이 되면서 어려워졌어요. (T1)

5모둠은 모둠 토의 후 36개의 해답을 찾았다고 말했거든요. 이를 보았을 때 결과 공간을 다 구성한 것 같은데, 우리가 수업을 계획할 때는 오답이 있는 것, 그리고 개수가 적은 것에서 많은 것 순서로 쭉쭉 가야겠다고 계열 짓기를 생각했었잖아요. 그런데 생각보다 이미 잘 찾아버린 것 같은 느낌을 받았거든요. 그래서 학생들이 예상보다 못하지 않고 다 찾아버리면 발표를 안 들을 것 같더라고요. 전체 논의에서의 참여도가 떨어질 것 같고. 진짜 수준을 어떻게 맞춰야 하는지가 이 개방형 과제의 또 다른 고민인 것 같아요. (T3)

다섯째, 학생들이 자신의 생각을 다른 학생의 생각과 적극적으로 연결짓도록 하는데 도전을 받았다. 수업을 관찰한 T3가 집담회에서 지적한 바와 같이, 실제 모둠 활동에서 학생들은 무엇을 의논해야 할지 정확히 이해하지 못하여 시간을 그냥 보내거나, 결과 공간이 가장 풍부한 친구의 답에 의지하여 다양한 생각을 받아들이려고 노력하지 않는 등의 모습을 보였다.

> 전체 논의를 할 때면 갑자기 논의 수준이 막 되게 올라가 있거든요. 그런데 개개인을 들여다 보면 개개인의 수준이 거기에 따라오고 있는가, 거기에는 동의를 할 수가 없고 1모둠 같은 경우에는 잘하는 애가 발표를 맡았는데, 6모둠의 경우에는 알려주고 너네도 한번 해보라고 어떤 애가 말하더라고요. 그런데 친구가 거부하더라고요. 발표를 안하겠다고. 개방형 과제 수업을 하면 이런 의사소통이 항상 고민이에요. (T3)

수업을 실행한 T1, T2는 결과, 방법, 표현 공간을 모두 다루는데 수업 시간이 부족함을 느꼈다. T2는 점검하기 단계에서 포착했던 중요한 논의 사항을 시간에 쫓겨 전체 논의 시간에 다루지 못하여 아쉬움을 느꼈다. T1은 모둠별 논의가 예상보다 길어지자 계획했던 시간보다 더 많은 시간을 모둠 활동에 할애하였고, 이에 전체 논의 시간이 부족해지게 되었다.

> 그래서 체크리스트에 적어두고, 이거는 나중에 가서 꼭 이야기해야지 했는데 결과적으로는 시간이 부족해서 이야기를 못 했어요. (T2)
>
> 모둠별 의사소통 논의가 다 끝나는 걸 기다릴 필요 없이, 적당한 시점에 활동을 끊고 전체 논의로 갔으면 아이들의 흥미를 더 이끌어갈 수 있지 않았을까 싶어요. (T4)

또한, T1 수업에서 1~6모둠의 결과 공간이 Ⅰ수준으로 동일하였으나, 교사는 학생들이 작성한 내용을 모두 발표시켜야 한다고 생각하여 비슷한 내용을 계속 발표시키게 되었다. 학생의 발표 중에는 경청할 것을 요구할 뿐 구체적으로 어떤 것에 초점을 두며 발표를 들어야 하는지 말해주지 않아, 학생들이 서로의 발표를 토대로 자신의 해법 공간을 발표하기보다는 자신의 해법 공간을 설명하는 데에만 집중하는 경우가 있었다. 학생들은 자신의 해법 공간과 다른 학생의 해법 공간을 효과적으로 연결 짓지 못한 경우도 있었다. 해법 공간을 분석하고 이에 기반하여 수업을 계획하였어도, T3의 말처럼 학생들을 수학적 논의에 참여하고 기여하게 하는 것은 여전히 개방형 수업 실행의 어려움과 도전 사항이 되는 것으로 보인다.

> 개방형 수업을 하면서 고민이, 전체 논의를 할 때 듣는 아이들이 의미 있게 들어야 하는데,

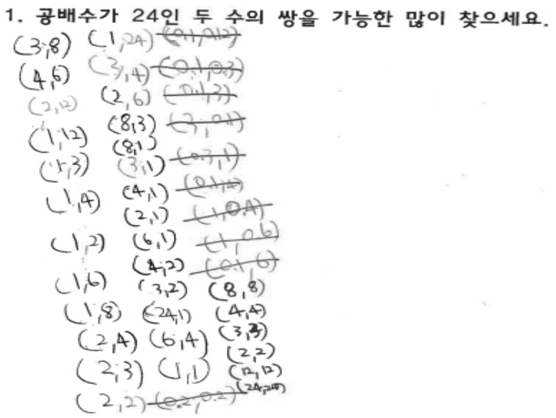
내가 이미 답을 다 찾았다는 생각에 솔직히 안 듣게 되잖아요. 얘네들을 어떻게 논의에 기여할 수 있게 할까. 쟤네는 무슨 생각으로 앉아있는 걸까. 그리고 발표 시간에 아무리 답이 똑같아도 교사는 공평하게 다 한 번씩 기회를 주고 싶지만. 오늘의 목표는 우리의 논의가 수학적으로 완성되는 거야라고 했을 때 똑같은 걸 중복해서 발표시킬 필요는 없는 거예요. (T3)

3. 개방형 수업의 실천과 개선

앞서 살펴본 바와 같이 본 연구진은 개방형 과제를 활용하여 효과적인 수학적 논의를 위해 교사가 알아야 할 5가지 관행을 중심으로 수업을 계획하고 실행하였다. 수업 실행 후 해법 공간 분석에 기반한 개방형 과제 수업의 실천에서 교사들이 경험한 도움과 도전 및 어려움을 탐색하였다. 개방형 수업 실행과 공동 연구를 통한 논의와 탐색을 통해 얻은 개방형 수업 실행의 실천적 지식과 개선 방안을 수업의 계획과 실행의 측면에서 논의하고자 한다.

가. 수업 계획하기 측면

첫째, 교사는 해법 공간뿐만 아니라 학생들이 생각할 수 있는 오답 유형도 함께 예상하는 것이 필요하다. 연구에 참여한 4명의 교사 모두 학생들이 과제를 해결할 때 분수나 소수의 활용에 대해서 예상하지 못하였다.



[그림 3] 소수를 활용하여 공배수를 구한 사례

[그림 3]은 자신의 해답을 소수의 쌍으로 작성하였지만, 짝 활동 후 소수 쌍을 지운 학생의 사례이다. 이러한 예를 볼 때 학생들의 오답 유형이나 사고 과정은 이미 관련 내용을 잘 알고 있는 교사가 예상하지 못한 방향으로 나아갈 수 있음을 인지하고, 학생의 눈으로 관련 개념을 다시 한번 살펴보며, 나타날 수 있는 오답의 유형을 보다 정교하게 예상해 볼 수 있는 과정이 필요하다. 이를 위해 교사는 동료들과 함께 가능한 한 다양한 방법으로 수업에서 제시할 과제를 풀어보며, 그 과제에서 학생들이 이용 가능한 반응을 검토해야 한다.

둘째, 개방형 수업에서 학생들의 해결을 점검할 때 일반적인 수업 상황보다 교사에 대한 의존도가 높아진 부분에 대한 보완이 필요하다. 아래의 사례에서 T2는 순회 지도 시 결과 공간을 찾아가는 과정을 격려하면서도, 교사의 피드백이 결과 공간을 지나치게 명시적으로 제시하지 않도록 유의하였다.

T2 : S1아, S1도 일부분 찾았는데 조금 더 찾아볼래요? S2랑 이야기하면서.
S1 : 원래 제가 순서대로 썼으면 잘 됐을 텐데……, 순서대로 안 써가지고 찾는데 오래 걸렸어요.
T2 : 뒷장을 이용해도 좋으니까 다시 한번 정리해 볼까요? 순서대로 하는게 편한지도 생각을 해보고요.

그리고 학생들이 해법을 어떤 전략으로 어떻게 나타냈는지 초기에 경험한 어려움에 주목하면서 각 모둠이 한 것에 관한 자료를 모았다. 이때 학생들이 과제를 해결할 때 사용했던 방법과 표현 측면에서 해법 간의 유사점과 차이점이 드러난다. 모둠별 논의 결과를 바탕으로 전체 논의가 진행되기 때문에 각 모둠에서 활발한 의사소통이 가능하도록 적절한 자극과 피드백을 수업 중에 어떻게 제시할지 계획이 필요하다. 이러한 계획은 과제 해결에 어려움을 겪는 학생들이 제대로 문제를 해결하도록 도와줌으로써 수업 목표로 나아갈 수 있도록 지원하게 된다. 또한, 과제를 올바르게 해결하고 있던 학생들에게도 자신들이 하는 것과 그것이 의미하는 것에 대해 더욱 깊이 생각하게 한다. 이를 위해 교사는 허용적인 분위기를 조성하여 학생 스스로 점검할 수 있는 기회를 적극적으로 활용할 수 있도록 해야 하며, 학생과 학생 간의 의사소통 상황을 계속해서 격려해야 한다.

나. 수업 실행하기 측면

첫째, 학생의 발전이나 변화의 과정을 파악할 수 있는 자료를 개발하여 이에 대한 적극적인

활용이 필요하다. 수업을 진행하였던 교사들은 해법 공간 분석을 통해 수업 목표에 부합하는 학생의 반응과 전반적인 수준을 확인하는 데 도움을 받았지만, 구체적으로 누구를 선정하여 공유할 것인지 결정하는 데 어려움이 있었다. 이때 〈표 7〉처럼 학습을 수행하는 과정에서 개인, 짝, 모둠 학습에 따라 변화하는 정도를 누가하여 기록할 수 있도록 체크리스트를 정교하게 조직하여 활용하는 것이 필요하다.

〈표 7〉 선정하기 단계 체크리스트 예시 자료

이름	개인 해법 공간			짝 해법 공간			모둠 해법 공간			순서
	O	M	R	O	M	R	O	M	R	

이러한 자료는 교사가 정해진 시간 동안 많은 학생에게 개별 피드백뿐만 아니라 비슷한 수준을 보이는 학생들의 소그룹 피드백 또한 동시에 가능하게 한다. 이를 위해 교사는 학생들의 활동을 주의 깊게 관찰하며, 전체 학생들이 관심을 끌 만한 흥미로운 수학적인 아이디어를 알아내기 위해 노력하여야 한다.

둘째, 모든 학생들이 접근할 수 있도록 이야기의 흐름을 일관되게 형성하기 위하여 모둠별 해법 공간 분석이 필요하다. 이때 선정하기 단계에서 활용한 체크리스트를 다시 활용할 수 있다. 먼저, 가장 공통으로 사용한 전략을 발표하게 한다. 이 방법은 학생들이 주된 해결 방법을 확인하고, 이러한 해결이 옳은지, 혹은 옳지 않은지 이해할 기회를 제공한다. 그리고 만약 옳지 않다면 학생들은 공통된 오개념을 논의할 기회를 가질 수 있다. 또는 구체적인 전략부터 추상적인 전략으로 발표하게 한다. 이 방법은 구체적인 모델을 이용하는 설명을 수학적 논의의 초반에 위치시켜 학생들이 논의에 참여하도록 진입장벽을 낮출 수 있다. 또한, 이를 토대로 후속 논의가 점차 추상적으로 나아가기에 학생들은 이전 설명과 연결 지어 궁극적으로 대수적인 해결 방법을 이해할 기회를 얻을 수 있다.

T3은 모둠 발표가 모두 끝나고 활동을 마무리할 때 T1이 결과 공간과 표현 공간이 모두 잘 드러난 개인의 결과지를 전체 학생에게 공유함으로써 전체 논의를 마무리한 수업 장면을 보고 아래와 같이 교사의 의도를 파악하였다. 교사의 마지막 정교한 해법에 대한 예시를 활용한 정리 활동은 전체 논의를 마무리 짓는 것뿐만 아니라 개인의 해법 공간의 확장에도 기여할 수 있다.

마지막에 딱 차이점을 화두로 삼으셨는데 저는 보면서 표현에 대해서는 언제 논의가 이루어질까 이러면서 이제 고민을 하던 찰나의 마지막에 차이점에 대해서 화두를 삼으실 때 이게 딱 드러나더라고요. 그래서 뭔가 OMR중에 R을 비교할 수 있는 건 아무래도 모든 답안이 다 공유된 다음에 그걸 보면서 표현에 대한 얘기가 오갈 수 있겠구나라는 걸 하나 배웠고 그래서 적절했다라고 생각을 하고요. (T3)

하지만, 수업 시간은 제한되어 있으며, 때에 따라 아무리 중요한 쟁점을 마주하더라도 계획한 수업 목표와 일치하지 않는다면 해당 수업에서 다루지 못할 수 있다. 이를 위해 위에서 제시한 방식이 항상 최선이 아니므로 대비가 필요하며, 교사는 수업 시간을 어떻게 가장 효율적으로 사용할지 결정해야 한다. 수학적 논의를 바탕으로 수업을 실행하기 위해서는 수학 교과의 내용 지식, 수학적 내용에 대한 학생의 사고에 대한 지식과 효과적인 논의를 이끌기 위한 교사의 교수학적 지식이 필요할 것이다. 그러므로 교수 · 학습 상황에서 이 세 가지 지식을 신속하고 조화롭게 구현할 수 있는 숙련된 교사의 역량이 요구된다고 할 수 있다.

셋째, 다른 모둠의 발표를 마지막까지 잘 들을 수 있도록 장치를 마련하는 것이 필요하다. 동일한 과제를 해결하다 보면 자신의 모둠이나 앞 순서에 발표한 모둠의 발표는 주의를 집중하고 듣지만, 뒤로 갈수록 학생들이 흐트러지고 잘 듣지 않는 문제가 발생하기 쉽다. 이러한 이유는 학생들의 논의로부터 해법 공간 사이의 연결이 자연스럽게 발생하지 않기 때문이다. 이때 질문을 통해 특정 아이디어에 주목하게 함으로써 여러 가지 다른 해결 방법을 서로 연결하게 하거나, 수업의 수학적 아이디어와도 연결하여 이번 시간에 배울 내용이 참여하는 모두에게 드러나도록 하여야 한다. 이를 위해 교사는 학생들의 활동 맥락에서 질문을 만들어 보며, 학생들이 어떻게 활동을 공유하도록 할 것인지 고려해야 한다. 다음의 수업 사례를 보면 T1은 학생 개인의 해결 전략과 다른 모둠의 해결 전략을 비교하도록 하면서 활동을 마무리하고 있다.

T1 : 마무리로 하나만 볼게요. J가 해결했던 활동지 좀 볼까요?
(J가 활동지를 가지고 오자 실물화상기에 J의 활동지를 올린다.)
T1 : J가 이렇게 적어 주었거든요. J가 사용한 것과 앞서 살펴본 다른 모둠에서 작성한 것과 조금은 차이가 있는 것 같죠? 어떤 차이가 있는지 말해 볼까요?
S1 : 앞에 1을 적었으면 그다음은 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 이렇게 썼어요.
(중략)
T1 : J가 한 것을 3모둠과 비교하면 이렇게 (3모둠의 결과 공간에 대각선(\ )을 그린다.)반으로 나눠진 것이겠죠? (칠판에 ◹ 을 그리며) J의 답은 (◹ 을 가르키며)

여기일 것 같아요.

또한, 발표 중 퀴즈를 제시하게 하거나 의문 사항을 질문하게 하는 등의 활발한 상호 작용을 가능하게 하는 방법을 제시해 줌으로써 주의집중이 가능하도록 안내해야 한다.

V. 논의 및 결론

해법 공간 분석을 바탕으로 한 개방형 수업 실행 연구를 통하여 본 연구에서는 해법 공간 분석이 개방형 수업 실행에 주는 이점, 개방형 수업에서 교사가 직면하는 어려움, 개방형 수업 개선 방안에 관한 실천적 지식을 결과로 제시하였다. 이 장에서는 연구 결과에 대해 논의하고 개방형 수업 실천에 관한 결론을 내리고자 한다.

해법 공간 분석은 개방형 수업에서 교사가 학생의 해법을 평가하고 학생 개개인의 해법 공간 확장을 돕는 정보를 제공한다. Leikin(2007)은 비고츠키의 근접발달영역 개념과 유사하게 개인의 해법 공간을 현재 가능한 해법 공간과 잠재적으로 가능한 해법 공간으로 구분하고, 개인의 해법 공간을 발달시키는 주요 자원이 학급 전체의 해법 공간이라고 하였다. 본 연구 결과에서 해법 공간 분석은 개방형 과제에 대한 학생의 다양한 해법을 점검하고, 모둠과 학급 전체 논의에 활용하여 해법 공간을 정교화하는 데 도움이 되었다. 보통 교사들은 개방형 과제에 대한 학생들의 다양한 해법을 평가하는 데 어려움을 겪는데(Bingolbali, 2011), 해법 공간 분석은 개방형 수업 실행 시 학생의 현재 좌표를 판단하고 해법 공간의 발달을 돕는 교수학적 의사결정을 하는 데 긍정적인 역할을 한다고 볼 수 있다.

다음에서는 본 연구의 결과와 논의를 통하여 해법 공간 분석에 기반한 개방형 수업의 연구와 실행에 제언하고자 한다. 첫째, 해법 공간의 특성을 고려하여 개방형 수업의 전개를 달리할 필요가 있다. 본 연구의 개방형 수업에서는 개인의 해법 공간을 모둠과 학급 전체 순으로 공유하였다. 모둠 활동 시 학생들은 해결 결과의 개수에 치중하여 해결 방법이나 표현에 주의를 덜 기울였고, 전체 논의 시 각 모둠의 해법은 거의 비슷하게도 모든 결과를 찾은 양상이었기에 학생들에게 흥미를 일으키는 장면이 많지 않았다. 본 연구에서 사용한 역 과제의 해법 공간은 결과 공간, 방법 공간, 표현 공간 중 특히 결과 공간의 수가 많고 전략에 따라 학생들이 구성한 결과 공간의 양상이 다양하게 발달한 특성이 있다. 본 연구의 과제의 경우 학생들의 수학 학습 흥미를 자극할 만한 요소가 결과의 개수라는 점을 반영하여 본 수업의 개선안을 생각해 보면, 개별 활동 후

모둠 활동을 생략하여 해결 결과를 전체 논의에서 공유하고 그 후에 방법 공간과 표현 공간에 주의를 기울이게 하기 위한 발문을 하는 것으로 보완하는 것도 가능해 보인다. 이렇듯 개방형 과제의 해법 공간의 하부 공간인 결과 공간, 방법 공간, 표현 공간의 특성을 개방형 수업의 계획과 실행에 반영하는 것은 수업자 교사에게는 도전적인 일이나 개방형 수업의 효과를 극대화하기 위해서는 필요한 일이다. 본 연구에서 사용한 역 과제의 해법 공간은 결과 공간이 특징적이었으나, 개방형 수업에서 사용할 수 있는 다른 개방형 과제들은 방법 공간, 표현 공간이 특징적일 수 있다. 해법 공간 분석을 바탕으로 해법 공간의 특성을 반영한 개방형 수업 실행에 관한 연구는 앞으로도 이어질 필요가 있다. 둘째, 본 연구 결과에 따르면 개방형 수업을 할 때 교사들이 방법 공간과 표현 공간을 확장하는 발문을 주저한 까닭은 교사의 발문 자체가 과도한 힌트가 되어 학생들의 탐구에 저해될까 하는 우려 때문이었다. 본 수업에서 교사의 발문을 계획하고 수업하였으나 해법 공간과 직접 연관된 발문이나 수업의 전개 양상에 따른 발문 등 수학적 논의를 효과적으로 이끌고 학생의 해법 공간을 확장하는 발문에 관한 연구와 수업 실행이 보완될 필요가 있다. 셋째, 연구 결과에 의하면 해법 공간 분석은 개방형 수업 실행에 있어 학생들의 반응을 폭넓게 예상하는 데 유용하였는데, 연구자들은 실제 수업에서 정답만큼 오답에 대한 분석도 필요함을 인식하였다. 오답에 관한 분석을 해법 공간 개념과 조화시키는 방안과 해법 공간의 하위 공간들로 나누어 어떻게 분석할지에 관한 후속 논의가 필요하다.

결론적으로, 해법 공간 분석을 토대로 한 개방형 수업을 실천한 결과 해법 공간 분석은 개방형 수업 실행에 유용한 점이 있으나 몇 가지 도전적인 과제들이 있었으며, 후속 연구의 필요를 불러일으켰다. 본 연구의 기록은 Smith와 Stein(2013)이 밝혔듯, 교사의 주요한 의사결정을 상기시킴으로써 이후의 수업 실행을 위해 수정되고 동료와 공유될 수 있다. 개방형 과제와 개방형 수업에 관한 다수의 선행연구가 학생의 수학적 창의성에 초점을 둔 것과 달리 본 연구는 교사의 개방형 수업 실행과 반성에 초점을 두었다는 데 의의가 있다. 본 연구에서 나눈 실천적 지식이 앞으로 개방형 수업 개선에 유용하게 활용되기를 기대한다.

※ 논문 투고일: 2022. 1. 1. ※ 논문 수정일: 2022. 2. 19. ※ 게재 확정일 : 2022. 2. 21.

〈참고문헌〉

김남균(2019). 교사학습공동체 참여 교사의 개방형 수학 수업설계와 실행 사례 연구. **초등교육연구논총, 35**(1), 85-103.

김남균, 김수지, 송동현, 오민영, 이현정(2020). **초등수학 개방형 과제의 해법 공간 분석 연구 -약수와 배수 단원을 중심으로-**. 청주교육대학교 연구보고서.

김남균, 김수지, 송동현, 오민영, 이현정(2022). 초등 수학 개방형 과제의 해법 공간 분석 연구. **초등수학교육, 25**(1), 81-100.

김은혜, 박만구(2011). 수학 영재교육 대상 학생과 일반 학생의 개방형 문제해결 전략 및 행동 특성 분석. **한국초등수학교육학회지, 15**(1), 19-38.

박화영, 김수환(2006). 개방형 과제를 활용한 수학 영재아 수업 사례 분석. **수학교육논문집, 20**(1), 117-145.

전평국, 문점애(2002). 초등학교 수학교육에서 개방형 학습법이 수학적 창의력에 미치는 효과. **수학교육논문집, 13**(1), 231-243.

Becker, J. P., Shimada, S.(2004). **개방형 교수법: 수학 지도를 위한 새로운 제안**. *[The Open-Ended Approach]* 구광조, 전평국, 박성선, 문성길 역. 서울: 경문사. (원저출판년도 1995년)

Bingolbali, E.(2011). Multiple solutions to problems in mathematics teaching: Do teachers really value them? *Australian Journal of Teacher Education, 36*(1), 18-31.

Leikin, R.(2007). Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks. In D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou (Eds.). *Proceedings of the fifth conference of the European Society for Research in Mathematics Education-CERME-5* (pp. 2330-2339).

Leikin, R.(2009a). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.). *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129-145). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Leikin, R.(2009b). Multiple proof tasks: Teacher practice and teacher education. *In Proceedings of ICMI Study-19: Proofs and proving*.

Leikin, R., Lev, M.(2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolecents: What makes the difference?. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 45*(2), 183-197.

Smith, M. S., Bill, V. L., & Sherin, M. G.(2019). *The five practices in practice : Successfully orchestrating mathematics discussions in your elementary classroom*. California: Corwin.

Smith, M. S., Stein, M. K.(2013). **효과적인 수학적 논의를 위해 교사가 알아야 할 5가지 관행**. *[5 Practices for orchestrating productive mathematics discussions]* 방정숙 역. 서울: 경문사. (원저출판년도 2011년)

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A.(2017). **수학 과제가 수학 수업을 만났을 때**. *[Implementing standards-based mathematics instruction, 2nd]* 김남균, 조완영, 권성룡 역. 서울: 경문사. (원저출판년도 2009년)

Tsamir, P., Tirosh, D., Tabach, M., & Levenson, E.(2010). Multiple solution methods and multiple outcomes-is it a task for kindergarten children?. *Edu Stud Math, 73*, 217-231.

〈Abstract〉

Implementation of Open-ended Approach Based on Analysis of Solution Spaces

Kim, Namgyun[1], Song, Donghyun[2], Kim, Suji[3], Oh, Minyoung[4], Lee, Hyunjung[5]

This study intends to explore the means for improving math classes using open tasks by reflecting on the experiences of teachers in planning and implementing open classes. Toward this end, the study reviewed the open-ended approach in Becker and Shimada (2004), the analysis framework of solution spaces in Kim, Nam-gyun et al.(2022), and five practices of planning and implementing math classes in Smith and Stein(2013). Against this background, four teachers planned and reflected on open classes based on analysis of the solution spaces out of which two teachers in charge of fifth and sixth graders each conducted instruction for 25 students per class. Afterward, analysis of the solution spaces to an open task served as the basis for the meaningful mathematical discussions of the teachers in the open class. The study examined the difficulties and challenges faced by the teachers in this process. In addition, the study presented suggestion on improving open classes while reflecting on this result. As such, the implementation process of this study is expected to be used by teachers who want to plan and implement open classes.

Key words : open-ended tasks, open-ended approach, solution spaces, five practices in math classes, mathematics discussions, action research

1. Professor, Cheongju National University of Education, ngkim@cje.ac.kr (Lead author)
2. Teacher, Jongchon Elementary School, songdonghyun@korea.kr (Corresponding author)
3. Teacher, Gaesin Elementary School, tnwl8416@korea.kr (Co-author)
4. Teacher, Yeonseo Elementary School, omy8529@gmail.com (Co-author)
5. Teacher, Saetbyul Elementary School, jewelry37@korea.kr (Co-author)