



직각삼각형 교구를 활용한 예각삼각형과 둔각삼각형 구성 및 정당화

김남균¹, 오민영², 이미림³, 김수지⁴, 송동현⁵

<< 요약 >>

본 연구는 직각삼각형 형태의 직소 교구를 활용한 초등학생의 예각삼각형과 둔각삼각형 이해를 탐구하는 것을 목적으로 한다. 이를 위하여 초등 4학년생 15명을 대상으로 직각삼각형 교구로 예각삼각형과 둔각삼각형을 구성한 결과를 양적으로 분석하고 삼각형의 정의와 성질에 대한 정당화 유형을 질적으로 분석하였다. 연구 결과, 학생들은 직각삼각형 교구를 사용하여 다양한 예각, 둔각삼각형을 구성하였으며, 둔각삼각형보다 예각삼각형을 더 쉽게 많이 만드는 등 삼각형의 종류에 따라 구성 결과에 차이가 있었다. 교구로 구성된 예각, 둔각삼각형을 정당화하는데 나타난 특징은 교구 조작이나 직관을 사용한 경험적 정당화와 수학적 성질을 사용한 분석적 정당화를 한다는 점이다. 학생의 삼각형 이해도에 따라 정당화의 유형과 특징이 다르게 나타난 점도 주목할 만하다. 본 연구를 통하여 볼 때 직각삼각형 교구가 초등학생의 예각, 둔각삼각형의 구성과 정당화에 유용하다고 할 수 있으며 학생의 도형 구성과 정당화의 특성을 고려한 교수학습의 후속연구가 필요하다.

주제어 : 직각삼각형 교구, 예각삼각형, 둔각삼각형, 수학적 정당화, 교구 조작

* 이 논문은 2022학년도 청주교육대학교 학술연구비(CJE2022D033)에 의하여 연구된 것임.

1. 청주교육대학교 교수, ngkim@cje.ac.kr (주저자)
2. 세종시교육청 파견교사, omy8529@gmail.com (교신저자)
3. 부용초등학교 교사, halfalove@naver.com (공동저자)
4. 칠금초등학교 교사, tnwl8416@korea.kr (공동저자)
5. 종촌초등학교 교사, songdonghyun@korea.kr (공동저자)

I. 서론

도형의 예를 구성하고 분석하는 교수학습 활동을 통해 학생은 도형에 대한 이해를 발전시키고 교사는 도형에 대한 학생의 이해를 확인할 수 있다. 이때, 도형 학습은 학생들의 기하학습수준에 맞추어 이루어져야 한다. 반 힐레의 기하학습수준에 따르면 초등학생은 대부분 1수준인 시각적 수준 또는 2수준인 서술적·분석적 수준에 해당한다. 시각적 수준이란 도형의 구성요소를 고려하지 않고 도형의 시각적 외관에 의해 도형을 파악하는 수준이다. 서술적·분석적 수준이란 탐구, 관찰, 실험과 같은 비형식적 분석을 통해 도형의 구성요소와 성질을 파악하지만 도형을 기하학적으로 정의하거나 도형 사이의 관계를 논리적으로 증명하기 어려운 단계이다. 기하학습수준을 고려할 때 초등학교의 도형 학습은 구체적 조작 활동이나 직관적 활동을 기반으로 해야 한다.

본 연구에서는 초등학교에서 학습하는 다양한 평면도형 중에서도 특히 예각삼각형과 둔각삼각형에 초점을 둔다. 초등학교의 삼각형 학습은 1학년부터 4학년까지 걸쳐 있는데 1학년에서는 도형의 외형을 관찰하고 세모 모양이라고 일컫는다. 2학년에서는 변이 3개인 도형을 삼각형으로 정의하고, 3학년에서는 직각에 대한 이해를 바탕으로 직각삼각형을 정의한다. 또한 4학년에서는 예각삼각형과 둔각삼각형, 이등변삼각형과 정삼각형을 정의하고 각 삼각형의 성질을 탐구한다. 이렇듯 초등학교 4학년까지 삼각형에 대한 개념과 성질에 대한 학습이 차근차근 이루어진다.

한편, 1, 2학년에서 다루는 일반적인 삼각형의 예와 그 예에 대한 학생 이해를 살펴본 연구에 비해(예, 김경미, 김현은, 2010; 김지원, 2016; Tirosh 외, 2013; Tsamir 외, 2008) 3, 4학년에서 다루는 특수한 삼각형의 예와 그 예에 대한 학생 이해를 살펴본 연구는 많지 않다. 초등학교 4학년 학생을 대상으로 예각삼각형, 둔각삼각형, 이등변삼각형, 정삼각형을 정의하고 그리도록 하는 검사를 진행한 연구(최수임, 김성준, 2012)에서 초등학교 4학년 학생들은 한두 개의 각만 예각인 삼각형이나 직각이등변삼각형을 예각삼각형으로 여기는 등 다양한 혼동을 보였다. 이에 따라 1, 2학년에서 다루는 일반적인 삼각형 외에 3, 4학년에서 다루는 예각삼각형과 둔각삼각형에 초점을 두고 삼각형 구성과 이에 대한 학생의 이해를 살펴보는 연구가 필요하다.

본 연구에서는 구체적으로 도형의 예를 구성하고 분석하는 데 유용하다고 판단되는 교구인 직각삼각형 교구를 사용하여 초등학교 4학년 학생들의 예각삼각형과 둔각삼각형에 대한 구성과 이해를 살펴보고자 한다. 직각삼각형 교구는 오민영 외(2019)가 개발한 교구로 다양한 크기와 모양의 직각삼각형으로 구성되어 있는데 직각삼각형을 결합하여 다각형을 구성하고 변형할 수 있기 때문에 다각형 학습에 활용되어 왔으며(오민영, 김남균, 2021), 삼각형을 구성하는데 또한 적합하다.

학생의 이해는 수학적 정당화의 과정에서 잘 드러난다. 수학적 정당화란 적당한 논리에 의해 추측이 참임을 자신 또는 다른 사람에게 확신시키는 방법으로 정의되며, 외적 확신에 의한 정당화, 경험적·귀납적 정당화, 포괄적 예를 통한 연역적 정당화, 연역적 정당화, 형식적·이론적 정당화와 같이 다양한 유형으로 나뉜다(김정하, 2010). 정당화 유형은 연구자마다 그 용어와 구분에 차이가 있는데, 공통적으로 연구자들이 구분한 정당화의 유형은 위계적인 측면에 있기 때문에 학생의 반응을 통해서 그들의 수준을 파악하는 데 도움이 된다(권성룡, 2003).

초등학생의 수학적 정당화에 대한 선행연구는 주로 영재학생, 그리고 특히 초등학교 5, 6학년 학생들을 대상으로 이루어져 왔다. 그런데 초등학교 3학년 일반학생들도 경험적 정당화와 분석적 정당화가 가능하며, 이때 구체적 조작 활동이 선행되는 경우 분석적 정당화를 더 잘한다고 보고된다(서지수, 류성립, 2012). 다만 도형 학습에 초점을 두고 수학적 정당화 과정에서 학생의 이해를 분석한 연구가 많지 않고 더군다나 초등학교 4학년 일반학생을 대상으로 한 연구는 부족한 실정이다.

본 연구는 직각삼각형 형태의 직소 교구를 활용한 초등학생의 예각삼각형과 둔각삼각형 이해를 탐구하는 것을 목적으로 한다. 이를 위해 초등학교 4학년 학생 15명을 대상으로 직각삼각형 교구로 예각삼각형과 둔각삼각형을 구성한 결과를 양적으로 분석하고, 삼각형의 정의와 성질에 대한 정당화 유형을 질적으로 분석한다. 구체적으로 본 연구의 문제는 다음과 같다.

1. 초등학생들이 직각삼각형 교구를 활용하여 만든 삼각형은 어떠한가?
2. 초등학생들은 직각삼각형 교구로 만든 삼각형을 어떻게 정당화하는가?

II. 이론적 배경

1. 초등학생들의 삼각형 이해와 지도 방법

삼각형은 도형 학습의 기본이 된다. 초등학교 수학에서 도형 영역의 지도는 시각적인 수준에서부터 진행되며, 학생 수준에 적절한 구체물의 조작과 그 구성에서부터 여러 가지 활동을 통해 전개된다(김성준 외, 2013). 학생들은 2015 개정 교육과정에 따른 교과서를 통해 삼각형과 관련하여 2학년 1학기에 삼각형의 구성 요소를 학습하고, 3학년 1학기에 직각과 함께 직각삼각형을, 4학년 1학기에 예각과 둔각, 삼각형의 세 각의 크기의 합을 알아본다. 4학년 2학기에는 삼각형의 변의 길이에 따라 분류해 보고, 이등변삼각형과 정삼각형의 성질을 구체적 조작 활동으로 탐구한다. 그리고 삼각형을 분류하는 또 다른 기준인 각의 크기에 따라 삼각형을 분류해 보고, 예각삼각형과 둔각삼각형을 학습한다. 본 연구와 관련하여 예각삼각형과 둔각삼각형에 대한 학생들의 이해 및 지도방법을 탐색한 선행연구를 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 예각삼각형과 둔각삼각형에 대한 학생들의 이해를 분석한 선행 연구로 노영아와 안병곤(2007), 김경미와 김현은(2010), 최수임과 김성준(2012), 임지현과 최창우(2016) 등이 있다. 노영아와 안병곤(2007)은 4-가, 나 단계의 도형 영역에서 보이는 학생들의 오류를 파악하기 위해 4학년 학생 205명을 대상으로 오류 경향을 분석하였다. 학생들은 예각삼각형과 둔각삼각형을 분류하는 문항에서 84명이 오답을 보였는데, 이 중 63명(75%)의 학생들이 예각삼각형과 직각삼각형을 혼동하였다. 이와 비슷하게 임지현과 최창우(2016)의 연구에서도 4학년 7개 반 약 240명을 대상으로 학생들의 오류 유형을 분석하였는데 예각삼각형, 둔각삼각형, 직각삼각형을 혼동하는 경우가 많이 있었다. 한편, 김경미와 김현은(2010)은 삼각형인 예와 아닌 예의 식별 과정에서 나타나는 추론 유형을 3~6학년 학생 29명을 대상으로 조사하였다. 대부분은 도형의 본질적인 속성에 기초하여 삼각형을 식별했지만, 일부는 도형의 크기, 방향 등 도형의 비본질적인 속성에 기초하여 삼각형을 식별했고, 전체적인 형태에 기초한 시각적 추론도 있었다. 최수임과 김성준(2012)은 도형 영역의 기본 개념 및 성질의 이해 정도를 파악하기 위해 4학년 학생 25명을 대상으로 4학년 1학기 도형 개념을 정의하는 문항에서 드러나는 특징을 분석하였다. 학생들은 예각삼각형을 삼각형의 세 각 중 한 각 또는 두 각이 예각이면 예각삼각형이라고 설명하였다. 반면 둔각삼각형은 각의 개수로 인한 오류가 발견되지 않았다.

둘째, 예각삼각형과 둔각삼각형에 대한 지도 방법을 제안한 선행 연구로 홍갑주와 박지환(2015), 남지현과 장혜원(2017) 등이 있다. 홍갑주와 박지환(2015)은 삼각형에서 직각이 있는

조건을 기하판의 격자점 위치와 관련지어 탐구하고, 직각삼각형과 둔각삼각형에서는 각각 직각과 둔각이 왜 하나뿐인지 그 이유를 추론하는 방안을 제안하였다. 남지현과 장혜원(2017)은 삼각형의 세 각 중 두 예각을 먼저 찾아 표시한 후, 나머지 한 각이 예각, 직각, 둔각 중 어느 각인지 찾아보는 활동을 제안하였다. 도형 학습 단계는 구체물을 수집하고 분류하면서 공통성을 발견하는 수집·관찰 단계, 도형의 특징을 관찰하고 구성 요소를 조사하여 간단한 성질을 발견하는 조작·실험 단계, 특수한 개념에서 일반적인 개념으로 심화하고 추론이나 논리를 통해 사고하는 이론화 단계로 구분할 수 있다(김성준 외, 2013). 선행연구를 종합하면 예각삼각형과 둔각삼각형을 지도할 때 그 구성 요소를 조사하여 예각삼각형은 세 각이 모두 예각이지만 둔각삼각형은 한 각이 둔각이라는 점을 학생 스스로 발견하게 하는 조작·실험 단계가 강조될 필요가 있다.

2. 도형 학습에서 교구의 활용

수학 수업에서 교구를 활용하는 것은, 인지적·정의적인 측면에서 긍정적인 영향을 준다. 교구 활용이 수학 이해에 도움을 주어 학업 성취도가 높아지기도 하며(남승인, 권민성, 2007), 학습 내용에 대한 흥미를 이끌어내기도 한다(최은주, 최창우, 2009). 신종석과 표용수(2011)는 5학년 교과서의 각 단원을 교구를 활용하여 재구성하였다. 도형의 합동 단원에서 펜토미노를 이용하여 합동인 도형 찾기, 도형의 대칭 단원에서 기하판, 패턴블럭으로 선대칭도형 만들기, 펜토미노로 선대칭도형 찾고 점대칭도형 알아보기 활동을 구성하였다. 교구를 활용한 수업 실행 결과, 강의식 수업을 적용한 비교반에 비해 도형 영역의 문제해결력이 우수해짐을 확인하였다.

도형 학습에서 기하판(정동권, 2001)이나 탱그램(김남희, 2000)을 활용하는 방안을 제시한 연구들이 있다. 기하판은 다양한 도형의 구성과 수정이 용이하여, 기하판에 변의 길이가 다른 도형을 구성해 보게 함으로써 도형의 정의에 대한 이해를 심화할 수 있다. 또한 기하판 위에서 구성 가능한 것과 그렇지 않은 것들에 대한 논의를 거치게 할 수 있는데, 이를 통해 수학적 표현과 의사소통 능력을 기를 수 있다(정동권, 2001). 한편, 탱그램 조각에는 초등학교 수학 학습에서 다루는 삼각형, 사각형, 평행사변형이 포함되어 있다. 이에 김남희(2000)는 조각의 형태에 주목하여 형태를 관찰하고 비교하며 성질을 탐구하는 활동을 제안하였다. 또한, 탱그램의 7개 조각으로 삼각형 혹은 평행사변형과 같은 평면도형을 구성하는 활동을 제안하였다. 도형을 구성할 때 조각들의 변의 길이나 넓이를 비교하기 때문에 도형의 구성 활동은 도형의 특징을 인식하거나 공간 감각, 측정 개념, 추론의 발달에 도움이 된다.

선행 연구를 보면(신종석, 표용수, 2011; 정동권, 2001; 김남희, 2000), 도형 학습에 패턴블럭,

펜토미노, 탱그램, 기하판 등의 교구가 활용되어 왔다. 패턴블럭, 탱그램과 같은 타일형 교구의 경우, 교구 조각을 관찰하고 비교하는 활동을 할 수 있다. 조각을 모아 다른 평면도형을 구성해 보고 도형의 정의나 특징을 인식할 수 있다. 만든 도형을 비교하거나, 구성 가능한 것과 불가능한 것들에 대한 추가적인 논의를 하며 수학적 표현과 의사소통 능력을 기를 수도 있다.

한편, 평면도형 중 삼각형 학습에서 직소 교구의 활용은 제한적인 것으로 보인다. 김남희(2000)는 탱그램의 조각을 다양하게 활용하여 크기가 다양한 삼각형을 만들어보는 활동을 제시하였는데, 탱그램 조각에서 확인할 수 있는 각도는 45° , 90° , 135° 뿐이기 때문에 크기가 다른 직각삼각형만 만들 수 있어 삼각형 학습에 활용하기에 제한적이다. 삼각형 학습을 위해서는 여러 가지 모양의 삼각형을 구성하고, 분류하는 조작 활동이 가능한 교구가 필요하다.

모든 종류의 다각형은 삼각형으로 분할되며, 삼각형 역시 두 개의 직각삼각형으로 분할될 수 있다. 따라서 직각삼각형을 기본 단위로 하여 다각형을 구성하고 탐구하는 경험을 제공할 필요가 있다. 오민영 외(2019)는 여러 직각삼각형을 기본 단위로 직각삼각형 교구를 개발하였다. 오민영 외(2019)가 개발한 직각삼각형 교구는 직각을 낀 두 변의 길이가 1~6cm인 여러 직각삼각형 조각으로 이뤄진 타일형 교구이다. 오민영 외(2019), 오민영과 김남균(2020)에 따르면, 직각삼각형 교구를 다양한 다각형을 만들어 성질을 탐구하고, 등적 변형하여 넓이 구하는 방법을 추론하는데 활용할 수 있다. 직각삼각형 직소 교구는 직각을 이루는 변의 길이나 각도가 다양해서, 여러 조각을 결합하여 다양한 종류의 삼각형을 구성할 수 있다.

3. 도형 학습에서의 정당화

초등학생의 수학적 정당화에 대한 선행연구는 주로 영재학생, 그리고 특히 초등학교 5, 6학년 학생들을 대상으로 이루어져 왔다. 수학적 정당화란 ‘적당한 논리에 의해 추측이 참임을 자신 또는 다른 사람에게 확신시키는 방법’으로 정의되며, 정당화를 하는 주체의 수학적 발달에 따라 다양한 표현 방법으로 나타날 수 있다(김정하, 2010). 정당화의 유형은 연구자에 따라 다양하게 분류되어 왔는데 김정하(2010)는 외적 확신에 의한 정당화, 경험적·귀납적 정당화, 포괄적 예를 통한 연역적 정당화, 연역적 정당화, 형식적·이론적 정당화와 같이 정당화의 유형을 5단계로 나누고 각 단계를 세분화하였다. 또한, 서지수와 류성림(2012)은 정당화의 유형을 권위적 정당화, 경험적 정당화, 분석적 정당화로 구분하였는데 각 정당화의 유형에 대한 설명을 요약하면 다음 <표 1>과 같다.

〈표 1〉 정당화의 유형 (서지수, 류성림, 2012)

정당화의 유형	설명
권위적 정당화	옳고 그름을 교과서, 부모, 교사 등의 권위를 의존해 설명
경험적 정당화	구체적 활동이나 예를 증거로 자신의 주장이 옳다고 설명
분석적 정당화	수학적 추론을 통해 설명하거나 일반성과 논리성을 포함

김정하(2011)는 수학적 정당화에 대한 지도가 잘 이루어지지 않고 있다고 지적하며 일반학생들의 수학적 정당화의 단계를 살펴볼 필요성을 주장하였다. 이에 그의 연구에서는 초등학교 5학년부터 중학교 3학년까지 학생들을 대상으로 수학적 정당화에 대한 인식을 조사하였는데 모든 학년에서 단순 연역적 정당화 단계가 가장 많이 나타났다고 보고하고 있다. 단순 연역적 정당화는 김정하(2010)의 정당화 유형 5단계 중 4단계인 연역적 정당화의 하위 유형 중 하나이다.

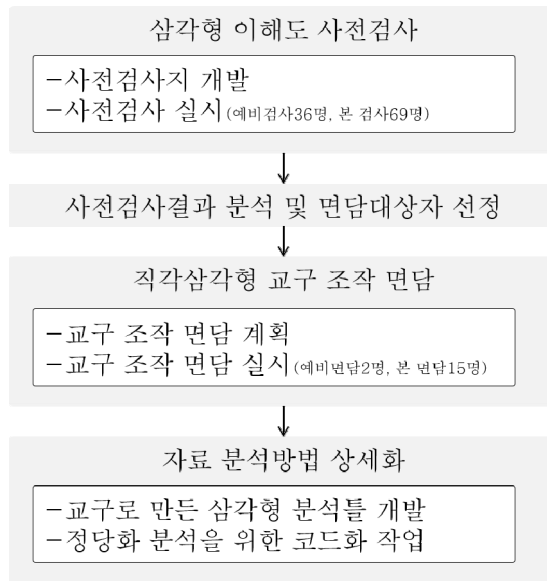
한편, 초등학생의 수학적 정당화에 대한 연구결과를 살펴보면 11세 이전의 학생들도 연역적 사고나 증명이 가능하다(예, Stylianides, 2007). 초등학교 3학년 학생들의 수학적 정당화 유형을 탐색하기 위해 설문조사와 인터뷰를 실시한 서지수와 류성림(2012)은 경험적 정당화의 유형이 가장 많았지만 분석적 정당화도 다수 발견됐으며 이때 시각적 표현을 보조적으로 이용했다고 보고한다. 다만, 그들의 연구에서는 수와 연산 영역과 도형 영역에서 학생들의 정당화 유형에 차이가 있었다. 초등학교 3학년 학생들이 수와 연산 영역에서는 경험적 정당화와 분석적 정당화를 고르게 사용했는데 익숙한 연산 문제에서는 분석적 정당화가 많이 나타났고, 익숙하지 않은 연산 문제에서는 경험적 정당화가 많이 나타났다고 한다. 반면, 도형 영역에서는 분석적 정당화에 비해 경험적 정당화 비율이 높게 나타났다는 점에서 수와 연산 영역과 차이가 있었다. 분석적 정당화를 이용한 학생들도 그림과 같은 시각적 자료를 보조적으로 사용하였기 때문에 연구자들은 도형 학습에서 시각적 자료를 활용하는 경험적 정당화의 필요성을 주장하였다.

선행연구를 종합하면 초등학생들은 경험적이고 귀납적인 정당화부터 분석적이고 연역적인 정당화까지 다양한 유형을 보인다. 본 연구 대상이 초등학교 4학년인 점을 고려할 때 학생들은 경험적 정당화에 속하거나 분석적이지만 구체물을 보조적으로 사용하는 정당화를 보일 가능성이 높을 것으로 예상된다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구절차

본 연구의 내용은 초등학교 4학년 학생들을 대상으로 직각삼각형 교구를 조작하면서 예각삼각형과 둔각삼각형을 만들고 자신이 만든 삼각형에 대해서 정당화하는 과정을 분석하는 것이다. 연구 절차는 [그림 1]과 같다.



[그림 1] 연구절차

먼저 4학년에서 학습하는 예각삼각형, 둔각삼각형, 이등변삼각형, 정삼각형에 대한 이해를 포괄적으로 확인할 수 있는 삼각형 이해도 사전검사를 개발하고 4학년 2학기에 삼각형 단원을 학습한 후인 10월에 검사를 실시하였다. 사전검사 결과를 바탕으로 검사에 응한 학생들을 상, 중, 하 수준으로 구분하고 면담 대상자 선정에 활용하였다. 선행연구를 폭넓게 검토하여 교구를 조작하는 면담 내용을 계획하고 예비 면담을 통해 면담 내용을 확정하는 다음, 11월에 초등학교 4학년 학생 15명을 대상으로 직각삼각형 교구를 조작하여 예각삼각형과 둔각삼각형을 구성하고 정당화하는 면담을 실시하였다. 교구로 만든 삼각형 분석틀을 개발하고, 정당화 분석을 위한 코드화 작업을 거쳐 면담에서 수집한 자료를 분석하였다. 끝으로 교구를 활용한 예각삼각형과 둔각삼각형 학습에 관한 시사점을 논의하였다.

2. 삼각형 이해도 사전검사

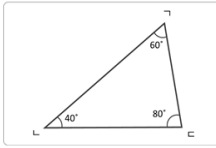
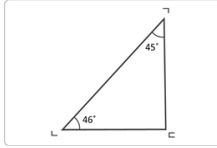
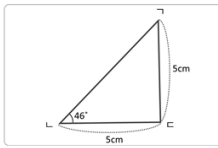
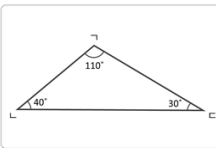
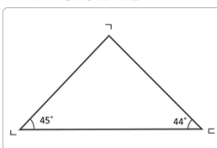
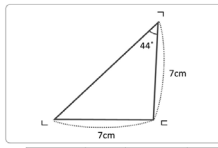
가. 검사지 개발

학생들의 삼각형 이해에 대한 정보를 얻고 면담 대상자를 선정하기 위해 사전 검사지를 개발하였다. 삼각형 이해도 검사는 변의 길이와 각의 크기를 다양하게 변화시킨 삼각형을 어떻게 인지하는지, 인지한 삼각형의 정의나 성질을 어떻게 정당화하는지 알아보는 데 목적이 있다. 이를 위해 선행연구 검토, 교과서 분석, 연구자 간 아이디어 공유, 예비검사의 과정을 거쳤다.

먼저, 선행연구를 검토하여 Tisamir 외(2008), 김경미와 김현은(2010), 최수임과 김성준(2012), Tirosh 외(2013)에서 사용한 과제를 본 연구의 목적에 맞게 재구성하였다. 검사 문항 형태(그리기, 정의하기, 분류하기 등)와 삼각형 제시 방법(하나씩 제시, 한 번에 제시 등)을 검토하고, 정례, 비례, 직관적인 예, 비직관적인 예를 하나씩 제시하여 삼각형의 종류를 판별하게 하는 검사 양식을 마련하였다. 다음으로 4학년 수학 교과서의 삼각형 단원에서 삼각형 종류, 격자 종류 등을 분석하고 본 검사지에서는 정삼각형을 비롯한 다양한 삼각형을 문항에 포함하기 때문에 일관성을 위해 격자를 사용하지 않기로 결정하였다. 그리고 Dimmel과 Herbst(2015)가 구분한 네 가지 기호 체계를 참고하여 검사지에 제시할 삼각형을 놓는 방향, 도형 내부의 색 포함 여부, 변의 길이나 각의 크기 표시 등을 종합적으로 고려하여 구성하였다.

구체적으로 검사지 문항은 총 17문항으로 정례를 제시하는 유형과 비례를 제시하는 유형으로 구분된다. 이때 정례를 제시하는 유형은 연구자 간 아이디어를 공유하여 <표 2>와 같이 전형적 과제, 1단계 추론 과제, 2단계 추론 과제와 같이 세 가지로 세분화하였다. 전형적 과제란 교과서의 정의를 바탕으로 <표 2>에서처럼 세 각의 크기가 주어질 때 삼각형의 종류를 판단하는 문제이다. 추론 과제란 주어진 정보로부터 추론이 추가로 필요한 문제로 그 과정이 1번 혹은 2번이나에 따라 1단계 추론 과제와 2단계 추론 과제로 구분된다. 1단계 추론 과제는 <표 2>에서처럼 두 각의 크기가 주어질 때 삼각형 내각의 크기 합을 이용해서 다른 한 각의 크기를 추론하고 삼각형의 종류를 판단하는 과제이다. 2단계 추론 과제는 <표 2>에서처럼 두 변의 길이와 한 밑각의 크기가 주어질 때 이등변삼각형 성질을 이용하여 다른 밑각의 크기를 추론한 다음(1차) 삼각형 내각의 크기 합을 이용해서 남은 한 각의 크기를 추론하고(2차) 삼각형의 종류를 판단하는 과제이다. 비슷한 방식으로 예각삼각형과 둔각삼각형 외에 직각삼각형, 이등변삼각형, 정삼각형에 대한 문항도 구성하였다. 한편, 비례를 제시한 유형은 이등변삼각형과 정삼각형에 대해 각 1문항씩 있었다. 또한, 학생들의 이해를 보다 면밀히 파악하기 위해 삼각형의 종류를 판별한 결과를 선택하는 객관식 및 진위형, 판별 이유를 쓰는 주관식을 혼합하였다.

〈표 2〉 삼각형 이해도 사전검사 문항 일부

분류	전형적 과제	1단계 추론 과제	2단계 추론 과제												
예각 삼각형	<p>㉓ 다음 그림이 어떤 삼각형인지 모두 골라 번호를 쓰세요. 그렇게 생각한 이유를 쓰세요.</p>  <p>● 예각삼각형 ● 둔각삼각형 ● 직각삼각형</p> <p>- 어떤 삼각형일까? _____</p> <p>- 이유는? _____</p>	<p>㉔ 다음 그림이 어떤 삼각형인지 모두 골라 번호를 쓰세요. 그렇게 생각한 이유를 쓰세요.</p>  <p>● 예각삼각형 ● 둔각삼각형 ● 직각삼각형 ● 알 수 없음</p> <p>- 어떤 삼각형일까? _____</p> <p>- 이유는? _____</p>	<p>㉕ 다음 그림이 어떤 삼각형인지 O, X로 표시하세요. O로 표시한 이유를 쓰세요.</p>  <table border="1" data-bbox="978 529 1178 588"> <tr> <td>예각삼각형</td> <td>(O, X)</td> <td>이등변삼각형</td> <td>(O, X)</td> </tr> <tr> <td>둔각삼각형</td> <td>(O, X)</td> <td>정삼각형</td> <td>(O, X)</td> </tr> <tr> <td>직각삼각형</td> <td>(O, X)</td> <td></td> <td></td> </tr> </table> <p>- 이유는? _____</p>	예각삼각형	(O, X)	이등변삼각형	(O, X)	둔각삼각형	(O, X)	정삼각형	(O, X)	직각삼각형	(O, X)		
예각삼각형	(O, X)	이등변삼각형	(O, X)												
둔각삼각형	(O, X)	정삼각형	(O, X)												
직각삼각형	(O, X)														
둔각 삼각형	<p>㉖ 다음 그림이 어떤 삼각형인지 모두 골라 번호를 쓰세요. 그렇게 생각한 이유를 쓰세요.</p>  <p>● 예각삼각형 ● 둔각삼각형 ● 직각삼각형</p> <p>- 어떤 삼각형일까? _____</p> <p>- 이유는? _____</p>	<p>㉗ 다음 그림이 어떤 삼각형인지 모두 골라 번호를 쓰세요. 그렇게 생각한 이유를 쓰세요.</p>  <p>● 예각삼각형 ● 둔각삼각형 ● 직각삼각형 ● 알 수 없음</p> <p>- 어떤 삼각형일까? _____</p> <p>- 이유는? _____</p>	<p>㉘ 다음 그림이 어떤 삼각형인지 O, X로 표시하세요. O로 표시한 이유를 쓰세요.</p>  <table border="1" data-bbox="978 833 1178 891"> <tr> <td>예각삼각형</td> <td>(O, X)</td> <td>이등변삼각형</td> <td>(O, X)</td> </tr> <tr> <td>둔각삼각형</td> <td>(O, X)</td> <td>정삼각형</td> <td>(O, X)</td> </tr> <tr> <td>직각삼각형</td> <td>(O, X)</td> <td></td> <td></td> </tr> </table> <p>- 이유는? _____</p>	예각삼각형	(O, X)	이등변삼각형	(O, X)	둔각삼각형	(O, X)	정삼각형	(O, X)	직각삼각형	(O, X)		
예각삼각형	(O, X)	이등변삼각형	(O, X)												
둔각삼각형	(O, X)	정삼각형	(O, X)												
직각삼각형	(O, X)														

개발한 검사지를 각각 면지역과 동지역에 소재한 두 초등학교의 4학년 학생 36명에게 적용하여 예비검사를 실시하고 검사 시간, 수정 사항 등을 확인하였다. 이때 실제 답의 개수가 한 개이든 여러 개이든 구분하지 않고 모든 객관식 문항에는 ‘모두’ 고르도록 지시하였고, 보기에 ‘알 수 없음’을 추가하는 등의 수정을 통해 최종 검사지를 개발하였다.

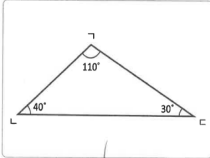
나. 자료 수집 및 분석

S시 동지역에 소재한 초등학교 한 학급, C시 읍지역에 소재한 초등학교 한 학급, Y군 읍지역에 소재한 초등학교 한 학급, 총 3개 학급의 4학년 69명을 대상으로 삼각형 이해도 사전검사를 실시하였다. 각 학급의 담임교사가 검사지를 배포하고 검사를 감독하였는데 이때 별도의 지도를 하지는 않았으며 검사 시간은 40분이었다.

수집한 검사지에 학생이 응답한 내용을 학생별, 문항별로 구분하고 살펴본 결과 문항 해결 정도와 주관식 서술 내용에 따라 학생의 삼각형 이해도를 상, 중, 하로 구분할 수 있었다. 상 수준 학생은 각 삼각형의 정의를 명확히 알고 서술하였고, 삼각형의 세 각의 크기의 합이나 이등변삼각형의 성질을 이용해서 삼각형의 종류를 올바르게 추론하고 판별하였다. 중 수준 학생은 각 삼각형의 정의를 명확히 알고 있지만, 삼각형의 외형에 의존하여 삼각형의 종류를 판단하는

경향이 있어 1단계 추론 과제를 틀리기도 하였다. 예를 들면 [그림 2]는 중 수준 학생의 4, 5번 답안이다. 전형적 과제인 4번 문항의 서술을 보면 둔각삼각형의 정의를 정확히 알고 있지만, 1단계 추론 과제인 5번 문항의 서술을 보면 각 \sphericalangle 의 외형을 보고 직각으로 잘못 판단하였다. 하 수준 학생은 예각, 직각, 둔각의 개념은 알고 있지만, 각 삼각형의 정의는 혼동하였다. 예를 들면 [그림 3]은 전형적 과제인 1, 4번 문항의 하 수준 학생 답안인데, 예각과 둔각의 의미는 알고 있지만, 둔각삼각형을 판별하는 데 오류가 있다.

14 다음 그림이 어떤 삼각형인지 모두 글라 번호를 쓰세요. 그렇게 생각한 이유를 쓰세요.

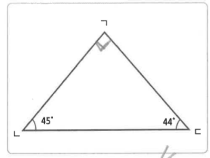


● 예각삼각형 ● 둔각삼각형 ● 직각삼각형

어떤 삼각형일까? ① 둔각삼각형

이유는? 3각중 1각이 90도가
둔각이 90도를 넘는다

15 다음 그림이 어떤 삼각형인지 모두 글라 번호를 쓰세요. 그렇게 생각한 이유를 쓰세요.

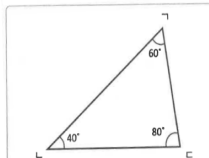


● 예각삼각형 ● 둔각삼각형 ● 직각삼각형

어떤 삼각형일까? ② 직각삼각형

이유는? 1각이 직각이고 나머지
두각은 예각이기 때문
입니다

16 다음 그림이 어떤 삼각형인지 모두 글라 번호를 쓰세요. 그렇게 생각한 이유를 쓰세요.

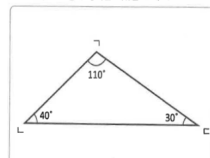


● 예각삼각형 ● 둔각삼각형 ● 직각삼각형

어떤 삼각형일까? 1

이유는? 각도 다 예각
이어서

17 다음 그림이 어떤 삼각형인지 모두 글라 번호를 쓰세요. 그렇게 생각한 이유를 쓰세요.



● 예각삼각형 ● 둔각삼각형 ● 직각삼각형

어떤 삼각형일까? 2

이유는? 70이 90를 넘어서
나 90이 예각이어서

[그림 2] 중 수준 학생의 삼각형 이해

[그림 3] 하 수준 학생의 삼각형 이해

3. 연구 대상

삼각형 이해도 사전검사에 응한 초등학교 4학년 학생 중에서 연구 참여에 동의하고, 담임교사의 소견을 통해 면담에 적극적으로 참여할 것으로 예상되는 학생들을 중심으로 상, 중, 하 수준 별 5명씩 총 15명을 면담 대상으로 선정하였다. 이 학생들은 2015 개정 교육과정에 따른 4학년 2학기 교과서의 삼각형 단원 학습을 10월에 마쳤으며, 면담에는 약 한 달 뒤인 11월에 참여하였다. 본 면담은 연구자 1명과 동질 수준의 학생 2명씩 1:2 형태로 진행되었는데, 함께 구성된 학생 두 명은 서로 같은 반 학생으로 친숙한 사이이다.

4. 직각삼각형 교구 조작 면담

가. 직각삼각형 교구

본 연구에서 사용한 교구는 오민영 외(2019)가 개발한 직각삼각형 직소 교구로 다양한 크기와 모양의 직각삼각형들로 구성되어 있다. 직각삼각형을 결합하여 다각형을 구성하고 변형할 수

있으며, 자석 퍼즐 형태로 제작되어 있고 1cm 간격의 자석 모눈판과 세트이다(오민영, 김남균, 2021). 직각삼각형 교구의 장점은 학생들이 도형을 그리거나 자르지 않아도 다양한 다각형을 쉽게 만들고 또 변형할 수 있다는 것이다. 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이는 1cm부터 6cm까지 1cm 간격의 자연수로 고안되어 있다. 또한, 직각을 낀 두 변의 길이 중 짧은 쪽을 밑변, 긴 쪽을 높이라고 명명할 때 밑변이 1cm인 6종은 초록색, 밑변이 2cm인 5종은 빨간색, 밑변이 3cm인 4종은 파란색, 밑변이 4cm인 3종은 노란색, 밑변이 5cm인 2종은 보라색, 밑변이 6cm인 1종은 검은색이다(오민영, 2020). 본 연구에 사용된 교구는 학생들이 친숙하게 부를 수 있도록 직각삼각형 교구를 줄인 말인 ‘직삼이’라는 별칭이 있다. 직각삼각형 교구를 조작하여 삼각형을 구성하고 정당화하는 면담에서 교구를 지칭할 때 ‘직삼이’라는 표현을 사용하였다. 이하 본문에서 직각삼각형 교구 조각의 크기를 지칭할 때, 예를 들어 (5,6)이라고 하면 직각을 낀 두 변의 길이 중 짧은 쪽이 5cm, 긴 쪽이 6cm인 조각을 의미한다.

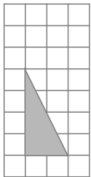
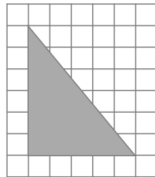

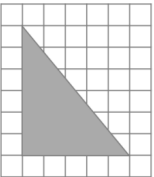


직각삼각형 직소 교구는 직각을 낀 두 변의 길이가 다양하여 이등변삼각형, 예각삼각형, 직각삼각형, 둔각삼각형 등 다양한 종류의 삼각형을 구성할 수 있다. 또한 만든 도형에 교구 조각의 직각 부분을 대보면 각의 종류를 판단할 수 있다. 교구 조각을 뒤집고 돌리는 다양한 조작 활동 또한 가능하다.

나. 면담 내용

본 면담의 내용은 직각삼각형 교구를 조작하여 예각삼각형과 둔각삼각형을 만들고 자신이 만든 삼각형이 왜 예각삼각형 또는 둔각삼각형인지 정당화하는 것이다. 면담은 크게 3부로 구성 되는데 1부(교구 이해)의 목적은 학생들이 직각삼각형 교구를 이해하고 교구 사용에 익숙해지는 것이다. 2부(예각삼각형 만들기 및 정당화)의 목적은 학생들이 교구를 이용하여 예각삼각형을 만들고 자신이 만든 삼각형이 왜 예각삼각형인지 정당화하는 과정을 관찰하는 것이다. 이때 한 직각삼각형 조각을 제시하고 학생들에게는 한 조각을 더 붙여서 예각삼각형을 만들어보라고 요청하였다. 학생들에게 제시한 조각을 총 세 가지인데, 한 번에 하나씩 미리 계획한 방향으로 제시하였고(〈표 3〉 참조), 학생이 조각은 움직이는 것은 제시하지 않았다. 학생이 삼각형을 다 만든 것을 확인한 뒤에 ‘왜 예각삼각형이라고 생각했나요?’라고 질문하였다. 학생의 정당화 과정을 들으면서 면담자가 이해되지 않는 부분이 있다면 재설명을 요청하거나 삼각형의 어느 부분에 대한 설명이었는지 부연 설명을 요청하기도 하였으나, 전반적으로 학생의 생각을 수정하려는 구체적인 시도는 하지 않았다. 학생의 정당화 과정을 들은 뒤에 ‘다른 조각을 붙여서 다른 예각삼각형을 만들어보세요.’라고 요청하였다. 다르게 만든 삼각형에 대해서도 정당화를 요청하였고

학생들은 1차로 제시된 조각에 대해서 두 개씩 삼각형을 만들었기 때문에 면담자는 최대 6번의 정당화를 관찰하였다. 3부(둔각삼각형 만들기 및 정당화)의 목적과 진행은 2부와 유사하였다. 삼각형을 만들 때 조각을 붙이는 방향에 제한을 두지는 않았으며, 삼각형 만들거나 정당화에 어려움이 있는 경우에는 자연스럽게 다음 차례로 넘어갔다. 면담의 내용은 학생의 삼각형 이해를 관찰하기 위해 면담을 실시한 선행연구(Tirosh 외, 2013; Tsamir 외, 2008)를 검토하고 결정된 것이며 예비 면담을 바탕으로 최종 수정 및 확정되었다.

〈표 3〉 면담에서 제시한 직각삼각형 조각

예각삼각형			둔각삼각형		
1차	2차	3차	1차	2차	3차
					
(2,4)*	(5,6)	(4,4)	(5,6)	(2,4)	(4,4)

*직각을 낀 두 변의 길이 중 짧은 쪽의 길이와 긴 쪽의 길이를 차례로 나타낸 것임

다. 자료 수집 및 분석

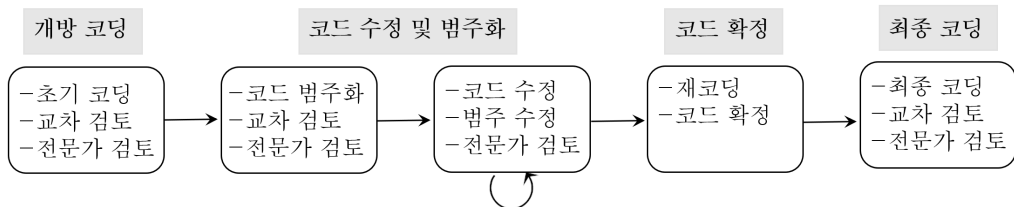
면담 대상 학생들은 나란히 앉았으며 면담자와는 서로 마주 보고 앉았다. 이때 학생들의 개별 책상에는 직각삼각형 교구(직각삼각형 종류별로 구분된 교구 상자와 모눈판)가 각 한 세트씩 놓여 있었다. 두 대의 촬영 기기를 사용하여 학생들이 삼각형을 만들고 정당화하는 과정을 교구를 조작하는 손을 중심으로 학생별로 각각 촬영하였다. 또한, 면담자는 학생들을 동시에 마주 보고 있었기 때문에 학생들의 조작 과정을 관찰하기 용이하였고 발견된 특이사항 등을 현장 노트에 기록하였다. 학생별로 촬영한 영상은 다시 학생별로 전사하였는데 교구를 조작하는 면담 특성상 전사 내용만 보고 상황을 이해하는 데 한계가 있기 때문에 학생이 만든 삼각형이나 정당화 과정에 대한 이해를 돕는 사진을 추가적으로 전사에 포함시켰다.

첫 번째 연구문제(초등학생들이 직각삼각형 교구를 활용하여 만든 삼각형은 어떠한가?)에 응답하기 위해서 먼저 면담 영상에서 학생들이 만든 삼각형 모양을 추출하여 정리하였다. 또한 학생들이 만든 예각삼각형의 종류와 개수, 둔각삼각형의 종류와 개수를 정답과 오답별로 구분하여 분석하였다. 학생들이 만든 삼각형의 종류나 오답에 특징적인 부분이 있는지 살펴보고 제시한 조각에 따라 만든 삼각형에 차이가 있는지 등도 분석하였다. 또한 면담 영상과 전사를 동시에

참고하여 학생들이 예각삼각형과 둔각삼각형을 만드는 방법을 분석하였다.

두 번째 연구문제(초등학생들은 직각삼각형 교구로 만든 삼각형을 어떻게 정당화하는가?)에 응답하기 위해서 학생별 전사 내용 중 정당화 부분에 대해 NVivo 프로그램을 사용하여 수학적 정당화 과정에서 눈에 띄는 특징을 개방 코딩하였다. 코드들을 범주화하는 몇 차례의 과정을 거쳐 정당화 과정을 분석하는 코드를 도출하였으며, 예시적으로 다시 전사 내용에 적용해보고 귀납적으로 최종 코드를 확정하였다(〈표 11〉 참조). 최종 코드에 따라 학생별로 정당화 과정을 재코딩하고 재코딩한 결과를 검토하여 학생별로 정당화의 특징을 분석하였고, 6번의 정당화 과정에서 변화하거나 개선된 부분이 있는지 검토하였다.

분석 결과의 타당도를 확보하기 위하여 정당화 분석 코드에 대한 검토를 수학교육 전문가 1인을 포함한 공동연구자들이 함께 다섯 차례 이상 실시하였다. 이때 주된 검토 사항으로 교구 조작 환경에서 수학적 정당화를 시도할 때 유의미하게 관찰될 수 있는 지점들이 코드에 충분히 반영되어 있는지, 예각삼각형과 둔각삼각형에 관련된 코드가 각각 균형 있게 분포하는지, 코드의 명칭이 적합하고 명확한지, 코드의 세 가지 영역 내 또는 영역 간 위계가 맞는지 등이 있었다. 또한, 분석 결과의 신뢰도를 확보하기 위하여 최종 코드에 따른 재코딩 결과를 교차 검토하고 의견이 일치하지 않는 부분에 대해서는 논의하고 합의하였다. 앞서 설명한 정당화 코딩 과정을 요약하면 [그림 4]와 같다.



[그림 4] 정당화 코딩 과정


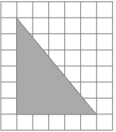

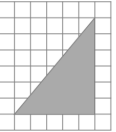
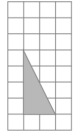
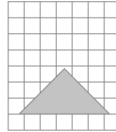
IV. 연구 결과

1. 직각삼각형 교구로 만든 삼각형 분석

가. 삼각형 구성의 정당률 분석

면담에 참여한 4학년 학생 15명은 제시된 직각삼각형 교구 조각에 다른 조각을 붙여서 예각삼각형과 둔각삼각형을 만들었다. <표 4>는 제시된 교구 조각별로 학생들의 응답을 정답과 오답으로 구분하여 정리한 것이다. 제시된 조각별로 삼각형을 만들 기회가 두 번씩 있었기 때문에 제시된 조각에 따라 학생별로 1~2회의 응답 수를 보여 학생 수보다 응답 수가 더 많다.

<표 4> 제시된 직각삼각형 교구 조각별 학생들의 응답

구분		예각삼각형						둔각삼각형					
모양													
		(2,4)		(5,6)		(4,4)		(5,6)		(2,4)		(4,4)	
학생	수준	정답 수	오답 수	정답 수	오답 수	정답 수	오답 수	정답 수	오답 수	정답 수	오답 수	정답 수	오답 수
1	상	2	-	2	-	2	-	1	-	2	-	2	-
2		2	-	2	-	2	-	-	1	2	-	2	-
3		1	-	1	-	1	-	1	1	-	1	1	-
4		1	-	1	-	1	-	1	-	-	1	1	-
5		2	-	2	-	2	-	2	-	2	-	2	-
6	중	2	-	2	-	2	-	1	-	2	-	2	-
7		2	-	2	-	1	-	1	-	2	-	1	-
8		1	-	1	-	2	-	1	-	-	-	1	-
9		1	-	1	-	1	-	1	-	-	-	1	-
10		2	-	1	1	2	-	-	-	2	-	2	-
11	하	2	-	2	-	2	-	2	-	-	-	-	-
12		2	-	2	-	2	-	-	2	-	2	-	1
13		1	-	2	-	1	1	1	-	-	-	1	-
14		1	-	1	1	1	-	1	-	-	-	1	-
15		2	-	1	1	-	-	1	1	-	2	1	1
응답수		24	0	23	3	22	1	14	5	12	6	18	2
정답률(%)		100		88.5		95.7		73.7		66.7		90	

먼저, 직각삼각형 교구 조각 (2,4)는 밑변이 2cm, 높이가 4cm인 직각삼각형으로 시각적으로 얇아 보이는 특징이 있고, 한 변의 길이가 2cm 또는 4cm인 교구 조각 중에서 한 가지 조각을 붙여 예각삼각형이나 둔각삼각형을 만들 수 있다. 학생들이 만든 예각삼각형은 모두 24개로

상 수준에서 8개, 중 수준에서 8개, 하 수준에서 8개를 만들었는데, 둔각삼각형은 모두 12개로 상 수준에서 6개, 중 수준에서 6개를 만들었다. (2,4)를 제시했을 때 예각삼각형의 정답률은 100%이었는데, 둔각삼각형은 전체 응답 18개 중 12개인 66.7%만 정답이었다.

다음으로, 직각삼각형 교구 조각 (5,6)은 밑변이 5cm, 높이가 6cm인 직각삼각형으로 시각적으로 두꺼워 보이는 특징이 있고, 한 변의 길이가 5cm 또는 6cm인 교구 조각 중 한 가지 조각을 붙여서 예각삼각형이나 둔각삼각형을 만들 수 있다. 학생들이 만든 예각삼각형은 모두 23개로 상 수준에서 8개, 중 수준에서 7개, 하 수준에서 8개를 만들었는데, 둔각삼각형은 모두 14개로 상 수준에서 5개, 중 수준에서 4개, 하 수준에서 5개를 만들었다. (5,6)을 제시했을 때 예각삼각형은 26개 중 23개인 88.5%만 정답이었고, 둔각삼각형은 19개 중 14개인 73.7%만 정답이었다.

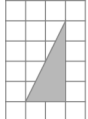
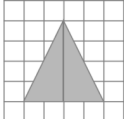
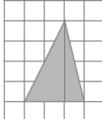
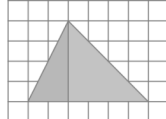
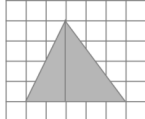
마지막으로, 직각삼각형 교구 조각 (4,4)는 밑변과 높이가 4cm인 직각이등변삼각형으로 조각을 붙였을 때 두 조각이 결합된 부분에 위치한 각의 크기를 모눈과 비교하기 편리하다. 학생들이 만든 예각삼각형은 22개로 상 수준에서 8개, 중 수준에서 8개, 하 수준에서 6개를 만들었는데, 둔각삼각형은 총 18개로 상 수준에서 8개, 중 수준에서 7개, 하 수준에서 3개를 만들었다. (4,4)를 제시했을 때 예각삼각형은 23개 중 22개인 95.7%가 정답이었고, 둔각삼각형은 20개 중 18개인 90%가 정답이었다.

나. 교구로 만든 예각삼각형

학생들이 교구로 만든 예각삼각형을 제시한 조각별로 자세히 분석한 결과는 다음과 같다. 먼저 <표 5>는 (2,4) 조각을 제시했을 때 학생들이 만든 예각삼각형을 많이 만든 순서대로 나타낸 것이다. (2,4) 조각을 제시했을 때 학생들은 총 6종류의 예각삼각형을 만들었는데(총 24개), 이때 사용된 교구 조각은 (2,4) 10개, (1,4), (4,4), (3,4) 각 4개, (4,5) 1개, (4,6) 1개 순으로 많이 선택되었다. <표 5>에는 3개 이상 만들어진 예각삼각형 모양을 많이 만들어진 순서대로 제시하였는데, 만들어진 개수가 같은 경우에는 1차에서 많이 만들어진 것, 1차에서 상 수준 학생이 많이 만든 것 순서대로 배치하였고, 이런 배치 기준은 <표 5~10>에 일관되게 적용하였다.

(2,4) 조각이 제시되었을 때 학생들이 예각삼각형을 만들기 위해 1차로 가장 많이 선택한 조각은 제시된 것과 같은 (2,4)였다. 총 10명의 학생(상 2명, 중 4명, 하 4명)이 (2,4)조각과 (2,4)변의 길이가 4cm인 쪽으로 붙여 <표 5>의 (2,4;2,4)와 같은 예각삼각형을 만들었다. 학생들은 제시된 것과 같은 (2,4) 조각을 붙여 예각삼각형이 됨을 확인한 다음 2차로 밑변의 길이가 2cm보다 짧은 것(예, (1,4)조각)을 붙여보거나 밑변의 길이가 2cm보다 긴 것(예, (4,4), (3,4))을 붙여서 예각삼각형을 추가로 만들었다.

〈표 5〉 (2,4) 조각을 제시했을 때 학생들이 교구로 만든 예각삼각형

구분	제시한 조각		만든 예각삼각형 예시				
모양							
	(2,4)		(2,4;2,4)*	(2,4;1,4)	(2,4;4,4)	(2,4;3,4)	
학생	수준	정답 수	만든 순서**				
1	상	2	1차	-	2차	-	
2		2	-	1차	-	2차	
3		1	-	-	1차	-	
4		1	-	1차	-	-	
5		2	1차	-	-	-	
6	중	2	1차	-	2차	-	
7		2	1차	-	-	2차	
8		1	1차	-	-	-	
9		1	1차	-	-	-	
10		2	-	-	-	2차	
11	하	2	1차	2차	-	-	
12		2	1차	2차	-	-	
13		1	1차	-	-	-	
14		1	1차	-	-	-	
15		2	-	-	2차	1차	
계		24개	10개	4개	4개	4개	

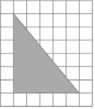




* (2,4) 조각과 (2,4) 조각을 변의 길이가 4cm인 쪽으로 붙여 만든 삼각형 의미(〈표 5~10〉 동일)

** 제시된 조각별로 삼각형을 만들 기회가 두 번씩 있었음. 1차는 첫째로 만든 삼각형, 2차는 둘째로 만든 삼각형 의미(〈표 5~10〉 동일)





다음으로, (5,6) 조각을 제시했을 때 학생들은 총 10종류의 예각삼각형을 만들었는데(총 23개), 〈표 6〉은 이 중 3개 이상 만들어진 예각삼각형 모양을 많이 만들어진 순으로 나타낸 것이다. 이때 사용된 조각은 (2,6) 6개, (4,6) 5개, (3,6) 4개, (5,6) 3개 순으로 많이 선택되었다. (5,6) 조각이 제시되었을 때 학생들이 예각삼각형을 만들기 위해 가장 많이 선택한 조각은 1, 2차를 종합하면 (2,6)이지만, 1차로 가장 많이 선택한 조각은 (2,6)과 (5,6)이었다. 학생들은 (5,6) 조각이 제시되었을 때 주로 높이가 6cm인 조각을 선택했으며 밑변의 길이가 제시된 것보다 짧은, 즉 5cm보다 짧은 조각을 선택하여 예각삼각형을 완성하였다.

끝으로, (4,4) 조각을 제시했을 때 학생들은 총 3종류의 예각삼각형을 만들었는데(총 22개), 〈표 7〉은 많이 만들어진 순서대로 나타낸 것이다. 이때 사용된 조각은 (3,4) 10개, (2,4) 9개, (1,4) 3개 순으로 많이 선택되었다. (4,4) 조각이 제시되었을 때 학생들이 예각삼각형을 만들기 위해 1차로 가장 많이 선택한 조각은 (3,4)였다. 학생들은 한 변의 길이가 4cm인 조각을 고르는 동시에 다른 한 변의 길이는 제시된 것, 즉 4cm보다 1~2cm 짧은 조각을 선택하여 예각삼각형을 완성하였다.

〈표 6〉 (5,6) 조각을 제시했을 때 학생들이 교구로 만든 예각삼각형

구분	제시한 교구		만든 예각삼각형 예시			
모양						
	(5,6)		(2,6;5,6)	(4,6;5,6)	(3,6;5,6)	(5,6;5,6)
학생	수준	정답 수	만든 순서			
1	상	2	2차	-	1차	-
2		2	1차	-	2차	-
3		1	-	-	1차	-
4		1	-	-	-	-
5		2	2차	1차	-	-
6	중	2	1차	-	-	-
7		2	1차	-	-	-
8		1	-	-	-	-
9		1	-	-	-	-
10		1	2차	-	-	-
11	하	2	-	2차	-	1차
12		2	-	1차	2차	-
13		2	-	2차	-	1차
14		1	-	-	-	1차
15		1	-	2차	-	-
계		23개	6개	5개	4개	3개


〈표 7〉 (4,4) 조각을 제시했을 때 학생들이 교구로 만든 예각삼각형

구분	제시한 교구		만든 예각삼각형 예시			
모양						
	(4,4)		(4,4;3,4)	(4,4;2,4)	(4,4;1,4)	
학생	수준	정답 수	만든 순서			
1	상	2	2차	1차	-	
2		2	-	2차	1차	
3		1	-	1차	-	
4		1	-	1차	-	
5		2	2차	1차	-	
6	중	2	2차	-	1차	
7		1	-	2차	-	
8		2	1차	2차	-	
9		1	1차	-	-	
10		2	1차	-	2차	
11	하	2	1차	2차	-	
12		2	1차	2차	-	
13		1	2차	-	-	
14		1	1차	-	-	
15		0	-	-	-	
계		22개	10개	9개	3개	

다. 교구로 만든 둔각삼각형

학생들이 교구로 만든 둔각삼각형을 제시한 조각별로 자세히 분석한 결과는 다음과 같다. (5,6) 조각을 제시했을 때 학생들은 총 3종류의 둔각삼각형을 만들었는데(총 14개), <표 8>은 많이 만들어진 순서대로 나타낸 것이다. 이때 사용된 조각은 (5,6) 5개, (5,5) 5개, (6,8) 4개 순으로 많이 선택되었다. (5,6) 조각이 제시되었을 때 학생들이 둔각삼각형을 만들기 위해 1차로 가장 많이 선택한 조각은 제시된 것과 같은 (5,6) 조각이었다.




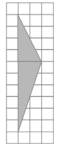

<표 8> (5,6) 조각을 제시했을 때 학생들이 교구로 만든 둔각삼각형

구분	제시한 교구	만든 둔각삼각형 예시			
모양	 (5,6)	 (5,6;5,6)	 (5,6;5,5)	 (5,6;6,8)	
학생	수준	정답 수	만든 순서		
1	상	1	1차	-	-
2		0	-	-	-
3		1	-	-	2차
4		1	-	-	1차
5		2	1차	2차	-
6	중	1	1차	-	-
7		1	-	1차	-
8		1	-	-	1차
9		1	-	-	1차
10		0	-	-	-
11	하	2	1차	2차	-
12		0	-	-	-
13		1	-	1차	-
14		1	1차	-	-
15		1	-	2차	-
계		14개	5개	5개	4개

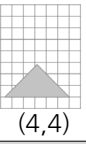
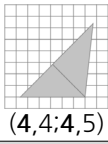

다음으로, (2,4)를 제시했을 때 학생들은 총 4종류의 둔각삼각형을 만들었고(총 12개), <표 9>는 많이 만들어진 순서대로 나타낸 것이다. 이때 사용된 조각은 (2,4) 5개, (2,2) 3개, (2,6) 2개, (2,3) 2개 순으로 많이 선택되었다. (2,4) 조각이 제시되었을 때 학생들이 둔각삼각형을 만들기 위해 1차로 가장 많이 선택한 조각은 제시된 것과 같은 (2,4) 조각이었다. 학생들은 주로 변의 길이가 2cm인 쪽으로 붙여서 둔각삼각형을 완성하였다.

끝으로, (4,4) 조각을 제시했을 때 학생들은 총 두 종류의 둔각삼각형을 만들었는데(총 18개), <표 10>은 많이 만들어진 순서대로 나타낸 것이다. 이때 사용된 조각은 (4,5) 10개, (4,6) 8개 순으로 많이 선택되었다. 학생들은 한 변의 길이가 4cm인 조각을 고르는 동시에 다른 한 변의 길이는 제시된 것, 즉 4cm보다 1~2cm 긴 조각을 선택하여 둔각삼각형을 완성하였다.

〈표 9〉 (2,4) 조각을 제시했을 때 학생들이 교구로 만든 둔각삼각형

구분	제시한 교구		만든 둔각삼각형 예시			
모양						
	(2,4)					
		(2,4;2,4)	(2,4;2,2)	(2,4;2,6)	(2,4;2,3)	
학생	수준	정답 수	만든 순서			
1	상	2	-	1차	2차	-
2		2	1차	2차	-	-
3		0	-	-	-	-
4		0	-	-	-	-
5		2	2차	-	1차	-
6	중	2	2차	1차	-	-
7		2	1차	-	-	2차
8		0	-	-	-	-
9		0	-	-	-	-
10		2	1차	-	-	2차
11	하	0	-	-	-	-
12		0	-	-	-	-
13		0	-	-	-	-
14		0	-	-	-	-
15		0	-	-	-	-
계		12	5	3	2	2

〈표 10〉 (4,4) 조각을 제시했을 때 학생들이 교구로 만든 둔각삼각형

구분	제시한 교구		만든 둔각삼각형 예시		
모양					
	(4,4)				
		(4,4)	(4,4;4,5)	(4,4;4,6)	
학생	수준	정답 수	만든 순서		
1	상	2	1차	2차	
2		2	1차	2차	
3		1		1차	
4		1		1차	
5		2	2차	1차	
6	중	2	2차	1차	
7		1	-	1차	
8		1	1차	-	
9		1	1차	-	
10		2	2차	1차	
11	하	0	-	-	
12		0	-	-	
13		1	1차	-	
14		1	1차	-	
15		1	2차	-	
계		18	10	8	

2. 삼각형에 대한 정당화 분석

가. 삼각형에 대한 정당화의 전반적인 특징

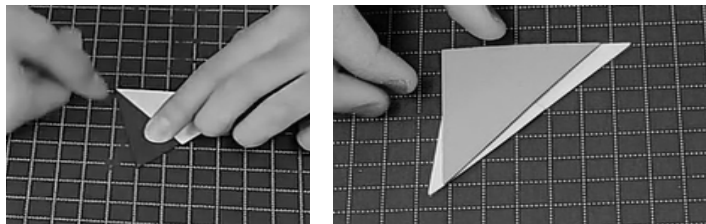
면담에 참여한 4학년 학생 15명은 자신이 만든 삼각형이 왜 예각삼각형 또는 둔각삼각형인지 정당화하였다. <표 11>은 정당화 코드의 빈도수를 삼각형 이해도 사전검사 결과에 따라 구분된 상, 중, 하 수준별로 나타낸 것이다.

<표 11> 수준별 정당화 코드의 빈도수

정당화 코드		상	중	하	계	
조작, 직관 활용	모눈	9	11	8	28	115
	직삼이	14	19	17	50	
	손 참조	1	1	2	4	
	시각적 인식	17	6	10	33	
도형의 정의, 성질 활용	정의	1	5	8	14	48
	성질	33	1	0	34	
설명의 타당성	타당한 판별	36	25	12	73	213
	상세한 설명	39	12	1	52	
	불충분한 설명	7	8	10	25	
	불필요한 설명	0	0	7	7	
	설명 중 오류 발견	3	1	12	16	
	잘못된 설명	4	4	11	19	
설명 못 함	2	10	9	21		
합계		166	103	107	376	

<표 11>을 살펴보면 조작이나 직관 활용이 도형의 정의나 성질 활용보다 두 배 이상 많았다. 조작이나 직관을 활용하는 경우를 구체적으로 살펴보면 직삼이(직각삼각형 교구), 시각적 인식, 모눈, 손 순으로 많이 활용되었다. 이때, 직삼이, 모눈, 손의 경우 수준별로 거의 비슷하게 활용된 반면 시각적 인식의 경우 중, 하 수준에 비해 상 수준에서 더 많이 나타났다.

삼각형의 정당화에서 학생들은 각의 종류를 직각과 비교하여 밝혔는데, 이때 직각삼각형 교구의 직각 부분, 모눈, 손으로 만든 직각이 이용되었다. [그림 5]의 왼쪽은 결합된 부분에 위치한 각이 예각인지 확인하기 위해 모눈과 비교해보는 장면이고, 오른쪽은 결합된 부분의 각이 둔각인지 확인하기 위해 직각삼각형 교구의 직각 부분과 비교해보는 장면이다.



[그림 5] 각의 종류를 알기 위해 모눈과 직각삼각형 교구 활용

예각인지, 둔각인지 판단하기 위해 직각삼각형 교구를 활용할 때, 중, 하 수준은 삼각형의 세 각을 직각삼각형 교구의 직각 부분과 비교하기 쉽도록 삼각형을 돌리는 반면에 상 수준은 삼각형을 돌리지 않았다. 교구를 조작하지 않고 직관적으로 각의 크기나 종류를 판단할 때, 각의 크기를 인식하기 쉽도록 삼각형을 돌리는 모습은 하 수준에서만 관찰되었다.

〈표 11〉에서 도형의 정의나 성질을 활용하는 경우를 구체적으로 살펴보면 성질 활용이 정의 활용보다 두 배 이상 많았는데, 성질 활용은 대부분 상 수준의 정당화에서 관찰되었고(34건 중에서 33건), 정의 활용은 대부분 중, 하 수준의 정당화에서 나타났다(14건 중에서 13건).

설명의 타당성 코드를 자세히 살펴보면 타당한 판별이나 상세한 설명은 상, 중, 하 수준의 순서대로 빈도수가 많았다. 상 수준은 대부분 타당한 판별과 상세한 설명을 제공하는 반면 중, 하 수준으로 갈수록 설명의 상세함이 부족해졌다. 설명 중 오류를 발견하고 수정까지 하는 경우가 하 수준에서 많이 확인되었는데, 그만큼 다른 수준에 비해 하 수준이 오류를 많이 보였기 때문일 수도 있겠지만, 적어도 오류를 보이는데 그치지 않고 발견 및 수정까지 나아간 점은 고무적이었다. 끝으로, 정당화를 말없이 행동으로만 보이거나 모르겠다고 답하는 등 설명을 못하는 경우가 전체 21건 중 19건이 중, 하 수준에서 나타났다.

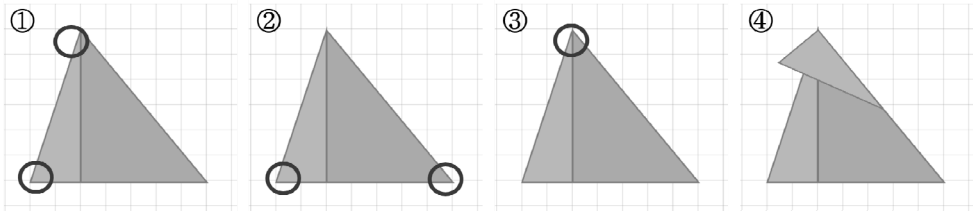
나. 예각삼각형에 대한 정당화

수준별로 예각삼각형에 대한 정당화의 특징을 분석한 결과는 다음과 같다. 면담에서 학생들은 예각삼각형에 대해 최대 6번의 정당화 기회가 있었기 때문에 변화 또는 개선된 점이 있는지 추가로 분석하였다.

1) 상 수준: 수학적 성질을 활용한 자세한 설명과 타당한 판별

상 수준의 정당화는 설명이 상세하고, 판별이 타당하였다. 예각삼각형의 세 각이 예각인지 확인하기 위해 수학적 성질을 주되게 활용하고 조작이나 직관을 보조적으로 활용하였는데, 이때 삼각형의 세 각의 위치에 따라 교구를 효과적으로 활용하였다.

수학적 성질을 주로 사용하여 예각삼각형을 정당화하는 사례를 구체적으로 살펴보면 다음과 같다. 먼저 직각삼각형 교구 한 조각에서 직각이 아닌 두 각은 예각이다(그림 6의 ①). 따라서 직각삼각형 교구 두 조각을 결합해 만든 삼각형에서 결합되지 않은 부분에 위치한 두 각은 예각이다(그림 6의 ②). 결합된 부분에 위치한 한 각은 두 예각을 합한 것이므로 직각일 가능성도 있다(그림 6의 ③). 하지만 다른 직각삼각형 교구 한 조각을 꼭짓점에 변에 맞춰 대보면 결합된 부분에 위치한 각이 예각임을 알 수 있다(그림 6의 ④).



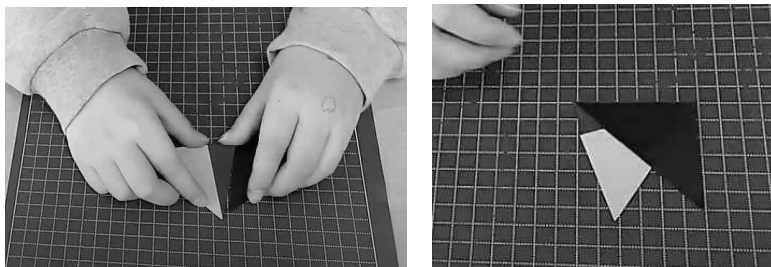
[그림 6] 예각삼각형을 정당화하는 과정

한편, 삼각형의 세 각의 위치에 따라 교구를 다르게 선택하는 모습도 관찰되었다. 예를 들어, 결합된 부분에 위치한 각은 직각삼각형 교구의 직각 부분과 비교하지만(그림 6의 ③, ④), 결합되지 않은 부분에 위치한 두 각(그림 6의 ② 참조)은 모눈과 비교하였다.

1:2 형태의 면담 특성상 친구의 설명을 들을 기회가 많았는데, 친구의 설명을 듣고 정당화가 변화된 경우도 확인할 수 있었다. 예를 들어, 면담 초반에는 결합된 부분에 위치한 각이 예각인지 확인하기 위해 눈으로만 각의 크기를 어림하였지만, 교구를 사용해 각의 종류를 판단해본 친구의 설명을 듣고 난 다음부터는 따라서 교구를 활용하기도 하였다.

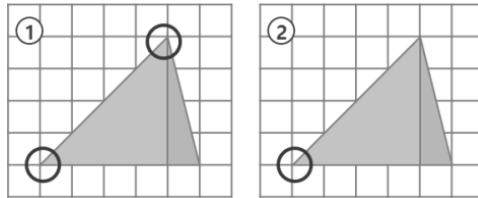
2) 중 수준: 조작과 직관 활용 및 불충분한 설명

중 수준은 예각삼각형의 세 각을 설명하기보다는 결합된 부분에 위치한 한 각만 설명하거나, 나머지 두 각만 설명하였다. 예를 들어, 면담 초반에는 결합되지 않은 부분에 위치한 두 각의 크기를 눈으로만 어림해보고 예각삼각형으로 판별하였고, 면담 후반에는 결합된 부분에 위치한 각의 크기를 다른 직각삼각형 교구 조각의 직각 부분과 비교해보고 예각삼각형으로 판별하였다. 이때, 자신이 만든 삼각형 위에 직각삼각형 교구를 겹치기 쉽도록 삼각형을 학생 자신이 편한 방향으로 회전시키는 특징이 있었다(그림 7 참조). 이는 결합된 부분에 위치한 각의 한 변이 학생과 수평 또는 수직으로 놓여있지 않았기 때문으로 추측할 수 있다.



[그림 7] 교구의 직각 부분과 비교하기 위해 삼각형 돌리기

중 수준인 학생 중에도 정의나 성질을 사용하여 정당화를 시도하는 경우가 있었다. 예를 들어, [그림 8]과 같이 (4, 4) 조각에 (1, 4) 조각을 붙여서 예각삼각형을 만든 때, 직각이등변삼각형의 직각이 아닌 두 각의 크기는 각각 45도이므로([그림 8]의 ①), 교구로 만든 삼각형의 한 각은 예각이다([그림 8]의 ②). 하지만 이 다음에 대한 설명을 이어가지 못했다.



[그림 8] 성질을 사용하여 정당화 시도

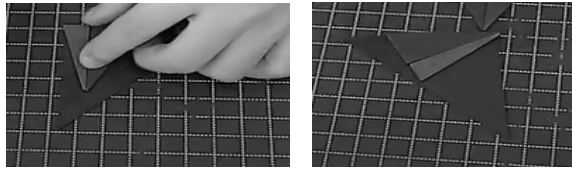
중 수준에는 간혹 대답 없이 행동으로만 정당화를 보여주는 경우가 있었고, 예각삼각형에 대한 정당화를 여섯 차례 반복하면서 면담 후반에는 모르겠다고 대답하는 경우가 늘기도 했다. 면담 후반으로 갈수록 직각삼각형 교구를 다양한 방식으로 조작할 필요가 있었기 때문에 인지적으로 부담이 났을 수도 있고, 정당화 도중 막히고 포기하는 친구를 보고 따라한 것일 수도 있다.

3) 하 수준: 직관에 의존하여 정당화를 시도하나 조작과 설명이 미흡

하 수준은 설명이 명확하지 않아서 면담자가 학생의 생각을 면밀히 이해하기 위해 추가 질문을 할 필요가 있었다. 예를 들어, 손으로 짚지 않고 불명확한 언어로 설명하는 경우에 ‘지금 확인한 각이 세 각 중 어느 각을 확인한 거예요?’라고 질문하였다. 이때 학생은 결합되지 않은 부분에 위치한 두 각에 대해 설명을 반복하였고, 질문 전과는 달리 결합된 부분에 위치한 각을 추가로 설명하였는데 이때 손으로 평각을 만들어서 비교하였다.

또 다른 예로, 결합된 부분에 위치한 각에 대해서 주목하지 않는 경향이 있었기 때문에 정당화의 필요성은 인식하는지 판단하기 위해 ‘이 각도 예각인지 판단할 수 있어요?’라고 질문하였다. 이때 학생은 직각삼각형 교구를 올리기가 쉽도록 삼각형을 회전시키고, 결합 부분에 위치한 각의 크기를 교구의 직각 부분과 비교하였는데 이 과정을 모두 설명 없이 행동으로만 보였다.

한편, 고무적인 것은 면담 후반으로 갈수록 먼저 예각삼각형의 정의를 설명하고, 예각삼각형의 세 각을 차례로 모눈이나 직각삼각형 교구와 비교하는 시도를 했다. 이때 모눈과 몇 차례 다시 비교해보고 오류를 수정하거나, 삼각형의 꼭짓점과 변에 교구의 직각 부분을 잘 맞추지 못하거나, 예각과 둔각 같은 용어를 혼동하였다. 다만, 대부분 학생은 직각삼각형 교구를 삼각형 위에 덮지만, 하 수준에서는 [그림 9]처럼 삼각형 아래에 깔아서 예각이 가려지지 않게 하였다.



[그림 9] 직각삼각형 교구를 예각삼각형 아래 깔기

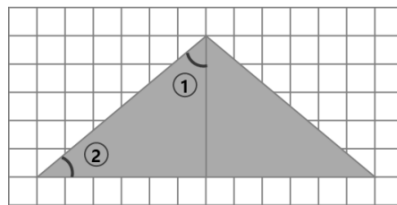
다. 둔각삼각형에 대한 정당화

1) 상 수준: 수학적 성질을 활용한 정당화와 오류 발견

상 수준의 정당화는 조작과 직관 활용 외에 수학적 성질도 활용한다는 점에서 다른 수준과 구별되었다. 상 수준의 정당화에 이용된 수학적 성질은 크게 두 종류였는데, 하나는 직각삼각형에서 직각을 제외한 나머지 두 각은 예각이라는 것이다. 상 수준 학생은 둔각삼각형을 정당화할 때도 세 각에 대해서 모두 설명하였는데, 결합되지 않은 부분의 두 각을 직각삼각형 교구나 모눈과 비교하지 않고 위의 수학적 성질만을 사용해서 예각임을 설명하였다.

상 수준의 정당화에 이용된 또 다른 수학적 성질은 예각과 예각을 더하면 각의 크기가 더 커지지만 여전히 예각 또는 직각일 가능성이 남아있다는 점이다. 상 수준 학생은 결합된 부분에 위치한 각이 두 예각의 합이기 때문에 예각 또는 직각일 수 있고, 눈으로 보았을 때도 둔각인지 확실히 알 수 없지만 직각삼각형 교구 또는 모눈과 비교해보니 둔각이라고 설명하였다.

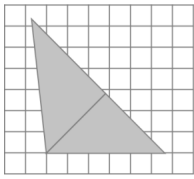
한편, 정당화 중 자신이 잘못 설명한 부분을 스스로 발견하고 이를 바르게 수정하여 정당화를 다시 시도한 사례도 있었다. (5,6) 조각 두 개를 붙여서 만든 삼각형에 대한 정당화에서 학생은 (5,6) 조각의 직각을 제외한 두 각의 크기([그림 10]의 ①, ②)가 각각 45° 보다 크다고 잘못된 설명을 하였다. 이 학생은 옆 친구가 정당화하는 동안 자신의 설명에서 무엇이 잘못되었는지 반성하고 스스로 오류를 발견하였다. 옆 친구의 정당화가 끝난 후 즉시 “나머지 두 각([그림 10]의 ①, ②)이 45° 보다 더 크면 90° 가 넘잖아요. 이것(②)은 45° 보다 작고, 45° 보다 약간 넘는 것(①)을 두 개 합쳐서 둔각이 나온 것 같아요.”라고 추가 설명하였다. 즉 직각삼각형에서 직각이 아닌 두 각의 크기는 동시에 45° 보다 클 수 없다는 성질을 인지하고 설명을 수정하였다.



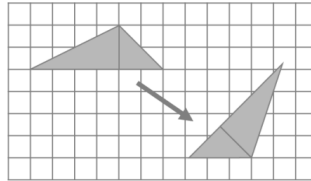
[그림 10] 상 수준의 오류 수정

2) 중 수준: 조작과 직관을 활용하나 제한적인 이미지를 중심으로 설명

중 수준의 정당화는 조작과 직관이 주로 활용되었는데, 이때 둔각에 대한 제한적인 이미지가 있음을 알 수 있었다. [그림 11]처럼 둔각의 한 변이 학생과 수평으로 놓인 이미지에 한하여 둔각을 판별하는 경향이 있었다. [그림 12]처럼 둔각의 한 변이 학생과 수평으로 놓이지 않은 경우는 삼각형을 회전하여 둔각이 놓인 방향을 조정하고 모눈과 비교하여 둔각인지 판별하였다. 또한, 둔각의 한 변이 학생과 수평하지 않은 때에는 왜 둔각인지 정당화하지 못하기도 하였다.



[그림 11] 둔각삼각형



[그림 12] 둔각삼각형

3) 하 수준: 직관에 의존하여 정당화를 시도하나 조작과 설명이 미흡

하 수준은 상, 중 수준과 달리 직각삼각형 교구나 모눈 조각이 미흡하거나 수학적 성질을 사용하지 않았다. 직관에 의존하여 “110° ~120° 사이의 둔각이 나올 것 같다.”처럼 어림으로만 정당화를 시도한 점이 다른 수준과 구분되었다. 다만, 설명을 마칠 때에는 수학적 정의를 덧붙이기도 하였는데, 직각삼각형 교구의 직각 부분과 비교해서 둔각임을 행동으로 보인 후 “90° 가 넘으면 둔각이고, 90° 보다 작으면 예각이다.”라고 설명하거나 “90° 가 넘는 각, 1cm라도 넘는 각은 무조건 둔각삼각형이에요.”라고 설명한 것이 그 예이다.

하 수준 학생은 특히 둔각삼각형 자체를 올바르게 구성하지 못해서 정당화를 요구하였을 때 잘못된 설명을 하는 빈도가 다른 수준에 비해 많았다. 다만, 한 학생은 면담자가 지도하려는 의도 없이 단지 학생의 답변을 정확히 이해하기 위해 되묻는 질문을 할 때마다 자신의 오류를 발견하였고, 이 과정을 4번 가량 반복한 다음 올바른 답을 찾아가며 타당하게 정당화하는 모습을 보이기도 하였다.

3. 요약

면담에 참여한 4학년 학생 15명의 예각삼각형과 둔각삼각형 구성 및 정당화를 분석한 결과를 요약하면 다음과 같다. 우선 삼각형 구성의 측면에서, 직각삼각형 교구 조각 (2,4), (5,6), (4,4)를 제시하여 각각 예각삼각형과 둔각삼각형을 만들도록 하였을 때, 예각삼각형에 대한 응답 수가 둔각삼각형에 대한 응답 수보다 많았다(각 73개, 57개). 그중 예각삼각형은 94.5%, 둔각삼각형

은 77.2%가 정답이었다. 예각삼각형은 어떤 조각이 제시되든 대체로 잘 만들지만, 둔각삼각형은 어떤 조각이 제시되는지에 따라 정답률의 차이가 있었다. 그중에서 이등변삼각형인 (4,4) 조각을 직각 부분이 위로 가게 제시하였을 때 둔각삼각형을 가장 잘 만들었다. 학생들은 대개 제시된 것과 같은 조각을 1차로 선택하여 삼각형을 만들었고, 2차에는 앞서 선택한 조각보다 한 변의 길이가 짧은 조각 또는 긴 조각을 선택하여 예각삼각형 또는 둔각삼각형을 만들었다.

삼각형 정당화의 측면에서, 학생들은 도형의 정의나 성질보다 조작이나 직관을 더 많이 활용하였다. 상 수준은 예각, 둔각삼각형의 정당화에서 수학적 성질을 사용하여 정당화하였고 설명이 상세하고 판별이 타당하였다. 특히 예각삼각형 정당화에서는 교구를 효과적으로 사용하였고, 둔각삼각형 정당화에서는 설명의 오류를 스스로 발견하고 수정하여 재설명하였다. 중 수준은 예각, 둔각삼각형의 정당화에서 주로 조작과 직관을 활용하여 정당화하였는데, 예각삼각형 정당화는 세 각 중 일부만 설명하여 불충분하였고, 둔각삼각형 정당화에서는 둔각에 대한 제한적인 이미지가 드러났다. 하 수준은 예각, 둔각삼각형의 정당화에서 직관에 의존하고 조작이나 설명이 미흡하였지만 교구를 조작하며 스스로 오류를 수정하기도 하였다.

V. 논의 및 결론

교구는 추상적인 수학 내용을 시각화하고 수학의 개념, 원리, 법칙에 대한 직관적 이해와 논리적 사고를 돕는다(교육부, 2022). 교육과정에서는 교구를 교수·학습 및 평가에 적극적으로 활용할 것을 안내하면서 다수의 적용 예시를 도형 영역과 관련지어 제공하고 있다. 하지만 선행연구를 살펴본 결과 삼각형 학습과 관련하여 사용할 수 있는 교구가 제한적이었으며, 교구를 사용한 도형 학습을 탐색한 연구 자체도 많지 않은 실정이었다. 이에 본 연구에서는 교구를 활용한 예각삼각형, 둔각삼각형 학습에 대한 시사점을 도출하고자 초등학교 4학년 학생들을 대상으로 직각삼각형 교구를 활용한 예각삼각형, 둔각삼각형 구성 및 정당화를 분석하였다. 삼각형 구성 및 정당화 측면에서 각각 연구 결과를 요약하고 시사점을 논의하면 다음과 같다.

먼저 삼각형 구성 측면에서, 학생들은 교구를 사용하여 다양한 예각, 둔각삼각형을 만들었는데, 둔각삼각형보다 예각삼각형을 더 쉽게 많이 만들었다. 또한, 삼각형을 만들 때 제시된 조각의 모양, 크기, 방향에 영향을 받았고, 일단 제시된 조각과 같은 조각을 먼저 붙여보고 한 변의 길이를 조절하여 또 다른 삼각형을 만드는 특징이 있었다. 삼각형 정당화 측면에서, 수준별로 다른 특징이 있었지만 공통적으로 삼각형의 세 각이 예각인지, 둔각인지 판단하기 위해 교구를

사용하였고 이때 판별 결과가 대부분 타당하였다. 또한 설명 중 오류를 발견하고 스스로 수정한 사례가 상 수준 외에 하 수준에서도 다수 관찰되었다.

선행연구에서는 삼각형을 학습할 때 하나의 개념 이미지에 고착되지 않도록 다양한 예를 제시하고, 도형의 외형을 시각적으로 인식하는 수준에서 나아가 분석적으로 접근하고 분석 결과를 수학적으로 표현하는 방안을 제안하고 있다. 본 연구에서 학생들이 다양하게 예각, 둔각삼각형을 만들고 예각, 둔각삼각형의 정당화에 교구를 적극적으로 활용했다는 점에서 삼각형 학습(삼각형 만들기와 정당화)에 직각삼각형 교구가 유용함을 확인할 수 있었다. 학생들은 직각삼각형 교구를 조작하여 각각의 다양한 예를 각의 크기의 측면에서 분석하고 분석 결과를 설명할 수 있었다. 본 면담 내용을 풍부히 하여(예, 가능한 조각들의 결합을 예상해보기 추가) 학생들이 보다 분석적으로 접근하고 다양한 도형을 만들어내는 방안에 관한 추가 연구가 필요하다.

한편, 본 면담에 참여한 4학년 학생들은 예각, 둔각삼각형을 정당화할 때 대부분 조작과 직관을 사용하지만 상 수준은 도형의 성질을 먼저 사용한 다음에 교구 조작으로 설명을 보완하였다. 이는 도형 영역에서 분석적 정당화보다 경험적 정당화 비율이 높게 나타났다는 서지수와 류성림(2012)의 연구결과와 부분적으로 일치하지만, 삼각형 이해도에 따라 분석적 정당화와 경험적 정당화가 한 학생에게서 혼재할 수 있고, 이때 분석적 정당화가 더 주될 수 있음을 시사한다.

수준별 삼각형 구성 및 정당화의 차이를 살펴보면 중, 하 수준은 둔각 및 둔각삼각형에 대한 이해가 특히 부족함이 드러났다. 먼저 삼각형 구성 측면에서, 교구로 만든 삼각형의 개수가 상, 중 수준은 거의 비슷한 반면(각 43개, 40개), 하 수준은 30개로 가장 적었고, 이때 하 수준이 만든 예각삼각형과 둔각삼각형은 각각 22개, 8개로 다른 수준에 비해 하 수준은 둔각삼각형 구성에 특히 어려움을 겪었다. 둔각삼각형의 정당화 측면에서, 하 수준은 잘못된 설명을 하는 빈도가 많았고, 중 수준은 둔각에 대한 이미지가 제한적임이 드러났다. 따라서 중, 하 수준의 학생들을 대상으로 둔각 및 둔각삼각형 지도에 관한 추가적인 논의가 필요하다.

한편, 삼각형 구성 및 정당화 지도를 지도할 때 수준별로 접근을 달리할 필요가 있다. 본 연구 결과만으로는 정당화가 변화 또는 개선된 원인을 명확히 밝히기 어렵지만 상 수준의 정당화는 주로 친구의 설명을 들은 뒤 변화하였고, 중, 하 수준의 정당화는 주로 면담자의 추가 질문에 대답함으로써 정교해졌다. 또한 대부분의 학생이 면담 후반으로 갈수록 더 상세하고 타당하게 설명하는 모습을 보였다. 따라서 삼각형 학습에서 다양한 삼각형을 만들고 정당화를 하는 과정을 여러 번 경험하게 함이 중요함을 알 수 있다. 이때 중, 하 수준에 대해서는 둔각 및 둔각삼각형에 대한 추가 지도를 고려할 수 있다. 또한 상 수준에게는 친구의 설명을 경청하고 자신의 정당화를 보완하게 하거나, 중, 하 수준에게는 교사가 의도적으로 정당화를 보완하는 발문을 제공할

수 있을 것이다. 다만, 학생들의 삼각형 정당화를 체계적으로 지원하는 발문은 어떠해야 하는지에 관한 추가적인 연구가 필요하다.

예각, 둔각삼각형 학습에 본 연구에서 사용한 직각삼각형 교구의 활용도를 더 높이는 방안은 투명한 교구 조각과 모눈판을 추가로 제공하는 것이다. 본 면담에 참여한 학생들은 자신이 만든 도형이 예각, 둔각삼각형인지 확인하기 위한 주요 전략으로써 직각삼각형 교구의 직각 부분과 비교하였다. 이때 삼각형의 예각 부분에 교구 조각을 겹치면 예각이 가려져서 해당 각이 예각인지 분명히 알기 어려운 경우도 있었다. 직각삼각형 교구를 놓고 조작하는 자석 모눈판과 별개로 위에 겹쳐볼 수 있는 투명 모눈을 추가로 제공하거나 투명한 직각삼각형 교구 조각을 추가하면 각의 크기 비교가 더 용이해져 교구 활용도가 더 높아질 것으로 예상된다.

본 연구에서는 초등학교 4학년을 대상으로 직각삼각형 교구를 활용한 예각, 둔각삼각형 구성 및 정당화를 분석하고 교구를 활용한 삼각형 학습에 대해 논의하였다. 예각, 둔각삼각형 만들기 및 설명하기와 관련하여 직각삼각형 교구가 유용함을 확인하였기 때문에 이 교구를 다른 종류의 도형 학습에도 활용할 수 있을 것이다. 본 연구의 내용이 교구를 활용한 도형 학습의 개선에 기여할 수 있기를 기대한다.

※ 논문 투고일: 2023. 7. 2. ※ 논문 수정일: 2023. 8. 14. ※ 게재 확정일 : 2023. 8. 31.

〈참고문헌〉

- 교육부(2022). **수학과 교육과정**(교육부 고시 제2022-33호 [별책8]). 세종: 교육부.
- 권성룡(2003). 초등학생의 수학적 정당화에 관한 연구. **초등수학교육**, 7(2), 85-99.
- 김경미, 김현은(2010). 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예의 식별 과정에서 나타난 초등학생의 추론 유형 분석. **한국학교수학회논문집**, 13(2), 263-287.
- 김남희(2000). 탱그램 활용을 통한 수학적인 생각의 구체화. **학교수학**, 2(2), 563-587.
- 김성준, 김수환, 신준식, 이대현, 이종영, 임문규, 정은실, 최창우(2013). **초등학교 수학과 교재연구와 지도법**. 서울: 동명사.
- 김정하(2010). **초등학생의 수학적 정당화에 관한 연구**. 이화여자대학교 대학원 박사학위청구논문.
- 김정하(2011). 초등학생과 중학생들의 수학적 정당화에 대한 인식과 단계에 관한 실태 연구. **한국초등수학교육학회지**, 15(2), 417-435.
- 김지원(2016). 초등학교 2학년 학생들의 삼각형에 대한 개념 이미지 분석. **학교수학**, 18(2), 425-440.
- 남승인, 권민성(2007). 수학 이해력 증진을 위한 교구 활용 방안에 관한 연구. **한국수학교육학회지**, 10(2), 125-139.
- 남지현, 장혜원(2017). 각의 크기에 따른 삼각형의 분류 지도 방안. **수학교육학연구**, 27(3), 431-449.
- 노영아, 안병근(2007). 도형 영역의 오류 유형과 원인 분석에 관한 연구: 초등학교 4학년을 중심으로. **한국초등수학교육학회지**, 11(2), 199-216.
- 서지수, 류성림(2012). 수와 연산 · 도형 영역에서 초등 3학년 학생들의 수학적 정당화 유형에 관한 연구. **수학교육 논문집**, 26(1), 85-108.
- 신중석, 표용수(2011). 수학교구를 활용한 수업의 흥미도 및 문제해결력 신장에 관한 연구. **East Asian Mathematical Journal**, 27(2), 117-139.
- 오민영(2020). **Dienes의 수학학습이론에 따른 사다리꼴의 넓이 학습에서 학생들이 구성한 예 공간 분석**. 청주교육대학교 대학원 석사학위청구논문.
- 오민영, 김남균(2021). Dienes의 수학학습이론에 따른 사다리꼴의 넓이 학습에서 학생들이 구성한 예 공간 분석. **초등수학교육**, 24(4), 247-264.
- 오민영, 이미림, 이운기, 김남균(2019). 다각형 넓이 지도를 위한 삼각형 직소교구의 과제개발 연구. **2019 수학교육관련학회 연합국제학술대회**, 2, 369-371.
- 임지현, 최창우(2016). 도형학습에서의 오류 찾기 활동의 적용 효과. **초등수학교육**, 19(1), 31-45.
- 정동권(2001). 수학교실에서 기하판의 활용 의의와 활용 사례 분석. **학교수학**, 3(2), 447-473.
- 최수임, 김성준(2012). 정의하기와 이름짓기를 통한 도형의 이해 고찰: 초등학교 4학년 도형 영역을 중심으로. **한국학교수학회논문집**, 15(4), 719-745.
- 최은주, 최창우(2009). 초등수학 수업에서 교구의 활용에 대한 사례연구. **한국초등수학교육학회지**, 13(1), 31-49.
- 홍갑주, 박지환(2015). 초등학교 교과서의 각의 크기에 따른 삼각형 분류에 관한 고찰. **초등수학교육**, 18(1), 45-59.
- Dimmel, J. K., & Herbst, P. G. (2015). The semiotic structure of geometry diagrams: How

textbook diagrams convey meaning. *Journal for Research in Mathematics Education*, **46**(2), 147-195.

Stylianides, A. J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, **65**, 1-20.

Tirosh, D., Tsamir, P., Levenson, E., Tabach, M., & Barkai, R. (2013). Two children, three tasks, one set of figures: Highlighting different elements of children's geometric knowledge. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the eighth congress of the European society for research in mathematics education (CERME 8)* (pp. 2228-2237). Ankara: Middle East Technical University and ERME.

Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: The case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, **69**(2), 81-95.

〈Abstract〉

Construction of and Justification for the Acute and Obtuse Triangle Using the Right Triangle Manipulative Materials

Kim, Nam Gyun¹, Oh, Min Young², Lee, Mi Rim³, Kim, Su Ji⁴, Song, Dong Hyun⁵

The purpose of this study is to examine the elementary school students' understanding of acute and obtuse triangles using the jigsaw manipulative materials in the form of right triangles. To do that, the results of 15 fourth graders' constructions of acute and obtuse triangles with the right triangle manipulative materials were quantitatively analyzed, and the types of justifications for the definition and properties of the triangles were qualitatively analyzed. The results of the study showed that students constructed a variety of acute and obtuse triangles using the right triangle manipulative materials, and there were differences in the construction results depending on the type of triangle, with some students constructing more acute triangles more easily than obtuse triangles. Students' justifications for constructing the acute and obtuse triangles were either empirical justifications based on manipulation and intuition, or analytical justifications based on mathematical properties. It is also noteworthy that the types and characteristics of the justifications differed based on the students' understanding of triangles. Based on this study, it can be said that the right triangle manipulative materials are useful for the elementary school students' construction and justification of acute and obtuse triangles, yet it is necessary to conduct follow-up research on teaching and learning that would consider the characteristics of the students' geometrical construction and justification.

Key Words : right triangle manipulative materials, acute triangle, obtuse triangle, mathematical justification, manipulating manipulative materials

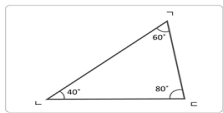
-
1. Professor, Cheongju National University of Education, ngkim@cje.ac.kr (Lead Author)
 2. Teacher, Sejong City Office of Education, omy8529@gmail.com (Corresponding Author)
 3. Teacher, Puyong Elementary School, halfalove@naver.com (Co-Author)
 4. Teacher, Chilgum Elementary School, tnwl8416@korea.kr (Co-Author)
 5. Teacher, Jongchon Elementary School, songdonghyun@korea.kr (Co-Author)

[부록] 삼각형 이해도 사전검사지

나는 어떤 삼각형일까요?

___학년 ___반 ___번 이름 _____

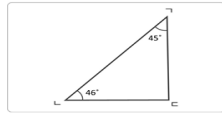
01 다음 그림이 어떤 삼각형인지 모두 골라 번호를 쓰세요. 그렇게 생각한 이유를 쓰세요.



- 예각삼각형
- 둔각삼각형
- 직각삼각형

- 어떤 삼각형일까요? _____
- 이유는? _____

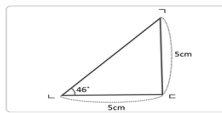
02 다음 그림이 어떤 삼각형인지 모두 골라 번호를 쓰세요. 그렇게 생각한 이유를 쓰세요.



- 예각삼각형
- 둔각삼각형
- 직각삼각형

- 어떤 삼각형일까요? _____
- 이유는? _____

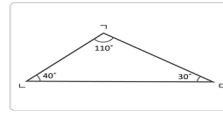
03 다음 그림이 어떤 삼각형인지 O, X로 표시하세요. O로 표시한 이유를 쓰세요.



- | | |
|--------------|---------------|
| 예각삼각형 (O, X) | 이등변삼각형 (O, X) |
| 둔각삼각형 (O, X) | 정삼각형 (O, X) |
| 직각삼각형 (O, X) | |

- 이유는? _____

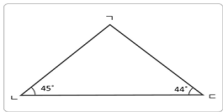
04 다음 그림이 어떤 삼각형인지 모두 골라 번호를 쓰세요. 그렇게 생각한 이유를 쓰세요.



- 예각삼각형
- 둔각삼각형
- 직각삼각형

- 어떤 삼각형일까요? _____
- 이유는? _____

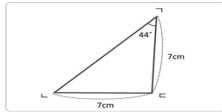
05 다음 그림이 어떤 삼각형인지 모두 골라 번호를 쓰세요. 그렇게 생각한 이유를 쓰세요.



- 예각삼각형
- 둔각삼각형
- 직각삼각형
- 밑 수 없음

- 어떤 삼각형일까요? _____
- 이유는? _____

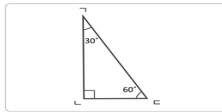
06 다음 그림이 어떤 삼각형인지 O, X로 표시하세요. O로 표시한 이유를 쓰세요.



- | | |
|--------------|---------------|
| 예각삼각형 (O, X) | 이등변삼각형 (O, X) |
| 둔각삼각형 (O, X) | 정삼각형 (O, X) |
| 직각삼각형 (O, X) | |

- 이유는? _____

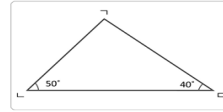
07 다음 그림이 어떤 삼각형인지 모두 골라 번호를 쓰세요. 그렇게 생각한 이유를 쓰세요.



- 예각삼각형
- 둔각삼각형
- 직각삼각형

- 어떤 삼각형일까요? _____
- 이유는? _____

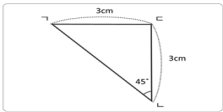
08 다음 그림이 어떤 삼각형인지 모두 골라 번호를 쓰세요. 그렇게 생각한 이유를 쓰세요.



- 예각삼각형
- 둔각삼각형
- 직각삼각형
- 밑 수 없음

- 어떤 삼각형일까요? _____
- 이유는? _____

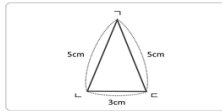
09 다음 그림이 어떤 삼각형인지 O, X로 표시하세요. O로 표시한 이유를 쓰세요.



- | | |
|--------------|---------------|
| 예각삼각형 (O, X) | 이등변삼각형 (O, X) |
| 둔각삼각형 (O, X) | 정삼각형 (O, X) |
| 직각삼각형 (O, X) | |

- 이유는? _____

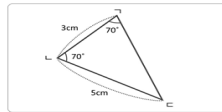
10 다음 그림이 어떤 삼각형인지 모두 골라 번호를 쓰세요. 그렇게 생각한 이유를 쓰세요.



- 이등변삼각형
- 정삼각형

- 어떤 삼각형일까요? _____
- 이유는? _____

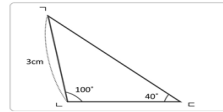
11 다음 그림이 어떤 삼각형인지 모두 골라 번호를 쓰세요. 그렇게 생각한 이유를 쓰세요.



- 이등변삼각형
- 정삼각형
- 세 변의 길이(가) 다른 삼각형

- 어떤 삼각형일까요? _____
- 이유는? _____

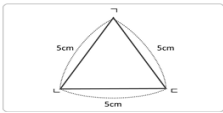
12 다음 그림이 어떤 삼각형인지 O, X로 표시하세요. O로 표시한 이유를 쓰세요.



- | | |
|--------------|---------------|
| 예각삼각형 (O, X) | 이등변삼각형 (O, X) |
| 둔각삼각형 (O, X) | 정삼각형 (O, X) |
| 직각삼각형 (O, X) | |

- 이유는? _____

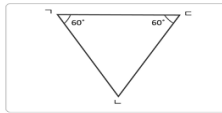
13 다음 그림이 어떤 삼각형인지 모두 골라 번호를 쓰세요. 그렇게 생각한 이유를 쓰세요.



- 이등변삼각형
- 정삼각형
- 밑 수 없음

- 어떤 삼각형일까요? _____
- 이유는? _____

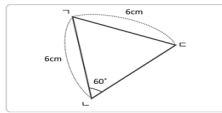
14 다음 그림이 어떤 삼각형인지 모두 골라 번호를 쓰세요. 그렇게 생각한 이유를 쓰세요.



- 이등변삼각형
- 정삼각형
- 밑 수 없음

- 어떤 삼각형일까요? _____
- 이유는? _____

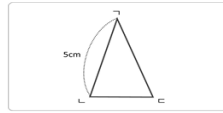
15 다음 그림이 어떤 삼각형인지 O, X로 표시하세요. O로 표시한 이유를 쓰세요.



- | | |
|--------------|---------------|
| 예각삼각형 (O, X) | 이등변삼각형 (O, X) |
| 둔각삼각형 (O, X) | 정삼각형 (O, X) |
| 직각삼각형 (O, X) | |

- 이유는? _____

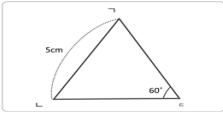
16 다음 그림이 어떤 삼각형인지 모두 골라 번호를 쓰세요. 그렇게 생각한 이유를 쓰세요.



- 둔각삼각형
- 정삼각형
- 직각삼각형
- 이등변삼각형
- 밑 수 없음

- 어떤 삼각형일까요? _____
- 이유는? _____

17 다음 그림이 어떤 삼각형인지 모두 골라 번호를 쓰세요. 그렇게 생각한 이유를 쓰세요.



- 둔각삼각형
- 정삼각형
- 직각삼각형
- 이등변삼각형
- 밑 수 없음

- 어떤 삼각형일까요? _____
- 이유는? _____