크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 최적자산배분 전략*

박 세 영** (University of Nottingham)

Abstract

본 연구는 최근 COVID-19 글로벌 판데믹이 포스트 코로나 시대의 국내외 사회 경제에 가져올 수 있는 크고 부정적인 불확실성 경제충격(A Large, Negative Uncertainty Economic Shock)을 고려하여 대표 경제주체(개인투자자, 펀드운용주체 등)의 최적자산배분(Optimal Asset Allocation) 전략을 도출한다. 구체적으로 Rietz(1988)의 극단적 재난 위험 가설(Rare Disaster Risk Hypothesis)을 따라 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 포아송 점프를 통해 모델링하고 효용함수 극대화 프레임(Utility Maximizing Framework)에서 CRRA(Constant Relative Risk Aversion) 효용함수를 갖는 대표 경제주체의 최적자산배분 해법을 도출할 수 있는 정량적 모형을 개발한다. 최적소비, 최적저축 및 최적투자 전략들에 대한 이론적 분석과 수치적 분석 결과 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 경우에 그렇지 않은 경우보다 소비를 줄이고 위험 주식에 대한 투자를 줄이고 무위험 채권에 대한 저축을 늘리는 것이 경제 주체의 최적자산배분 전략이다. 극단적 시나리오를 고려할 수 있는 본 연구의 다양한 이론적·수치적 결과물들은 포스트 코로나 시대의 중·장기적 자산운용 위험관리 선진화에 공헌할 뿐만 아니라 개인종합자산관리(Individual Savings)의 혁신에 기여할 수 있다.

---

* 본 연구는 펀드평가 3사(한국펀드평가, Fn가이드, 제로인) 및 2019년 대한민국 교육부와 한국연구재단의 연구지원을 받아 수행된 과제입니다(NRF-2019S1A5A2A03054249).
주제어 : 크고 부정적인 불확실성 경제충격, 최적자산배분, 위험관리, 대출제약조건
JEL 분류기호 : D15, D58, G11, G12
** Nottingham University Business School, University of Nottingham, E-mail: seyoung.park@nottingham.ac.uk

[1] 서 론

2008년 글로벌 금융위기, 2010년 유로존 금융위기, 2015년 중국 주식시장붕괴와 은행부문의 유동성 및 신용위기의 확대, 2020년 COVID-19 글로벌 판데믹으로 인한 글로벌 실물경제 및 금융경제 위기 등 최근 10년 동안 국내외 사회 경제는 극단적 재난 사건(A Rare Disaster)이 야기할 수 있는 크고 부정적인 불확실성 경제충격(A Large, Negative Uncertainty Economic Shock)을 지속적으로 경험해 왔다. 특히 COVID-19 글로벌 판데믹의 중·장기적 파괴적 파급효과로 인해 국내 경제는 전례가 없는 불확실성 글로벌 경제상황에 놓여있다.[1]

지난 2008년 글로벌 금융위기에서는 금융섹터에서 발발했던 크고 부정적인 불확실성 경제충격이 금융경제와 실물경제 간에 복잡하게 얽혀있는 상호연계성(Interconnectedness)를 매개로 비금융섹터(예: 개인, 기업 등)로 전이되어 대형 금융위기로 이어졌다. 그러나 현재의 COVID-19 글로벌 판데믹은 특히 가계금융섹터의 가계부채를 중심으로 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 야기하여 결과적으로 금융섹터의 경제위기(신용경색, 유동성 위기 등)을 가져올 것으로 판단된다(Figure 1 참조).[2] 코로나 바이러스의 영향으로 가계금융의 소비와 투자가 크게 위축된 상황에서 금융시장 전반에 신용경색(Credit Crunch)과 유동성 문제가 발생하게 되면 가계금융 전반의 대출에도 큰 제약이 가해져 한국경제의 가계부채 뇌관에 크고 부정적인 파급효과와 더불어 한국경제의 장기불황을 야기할 가능성이 높다. 이는 결과적으로 국내 금융 및 실물경제 전반에 악영향을 초래하여 심각한 경우 금융기관과 기업의 연쇄도산으로 이어질 수 있다.

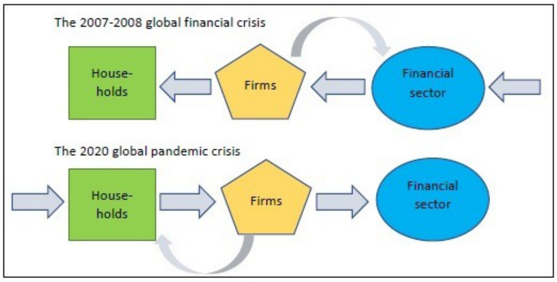

Figure 1: 글로벌 경제위기 발발 메커니즘. Source: Milne (2020).

이에 본 연구에서는 크고 부정적인 불확실성 경제충격이 야기할 수 있는 포스트 코로나 시대의 개인·기업·금융기관 자산의 일시적/영구적 파괴 가능성을 체계적으로 반영할 수 있는 대표 경제주체(개인투자자, 펀드운용주체 등)의 최적자산배분(Optimal Asset Allocation) 전략을 도출하여 경제충격의 파급효과에 체계적으로 대응하고자 한다. 구체적으로 Rietz (1988)의 극단적 재난 위험 가설(Rare Disaster Risk Hypo- thesis)을 따라 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 포아송 점프를 통해 모델링하고 신고전주의 경제학의 효용함수 극대화 프레임(Utility Maximizing Framework)에서 CRRA(Constant Reletive Risk Aversion) 효용함수를 갖는 대표 경제주체가 가장 단순한 경제적 세팅에서[3] 최적자산배분 해법을 도출

---

1) 기재부가 2020년 3월 13일 펴낸 '최근 경제동향(그린북)' 3월호에 따르면 "코로나 19 전개 양상에 따라 경제의 부정적 파급효과와 금융시장 변동성이 상당 기간 지속될 수 있다", "코로나 19 영향으로 우리 경제는 활동과 심리가 위축되고 실물경제와 금융시장 불확실성이 확대되고 있다". 또한 한국은행이 2020년 4월 23일 발표한 실질 국내총 생산(GDP) 속보치 통계에 따르면 코로나 19에 따른 경제충격으로 올해 1분기 한국경제 성장률이 -1.4%로 떨어진 것으로 조사되었고 이는 지난 글로벌 금융위기 때 2008년 4분기(-3.3%) 이후 11년 3개월 만에 가장 낮은 성장률이다. 민간소비 또한 1998년 외환위기 때처럼 큰 충격을 받아 1분기 민간소비의 경우 전기 대비 6.4% 감소하여 감소율이 외환위기 때 1998년 1분기(-13.8%) 이후 가장 컸다.

2) 2020년 3월 4일 국제결제은행(BIS)에 따르면 한국의 가계부채는 전년대비 4.5%가 증가한 1천970조5천210억 원으로 전 세계 주요국(프랑스, 벨기에, 독일 등)과 비교했을 때 국내총생산(GDP) 대비 가계부채 비율의 상승폭이 가장 큰 것으로 나타났다.

3) 본 연구에서는 무위험 이자율, 주식 기대수이률, 주식 변동성을 모두 상수로 가정하여 투자기회집합(Investment Opportunity Set)이 일정한 금융시장을 고려하고 있다. 또한 노동시장과 신용시장에 큰 파급효과를 가져올 수 있는 크고 부정적인 불확실성 경제충격과

할 수 있는 정량적 모형을 개발한다.

또한 이론적 분석과 수치적 분석을 토대로 경제주체의 최적전략들에 대한 다양한 경제적 시사점을 도출한다. 본 연구는 “위험사회와 삶의 질” 이라는 국가적 차원의 대형연구아젠다(Mega Research Agenda)의 관점에서 매우 중요하며 극단적 시나리오를 고려할 수 있는 본 연구의 다양한 이론적·수치적 결과물들은 포스트 코로나 시대의 중·장기적 자산운용 위험관리 선진화에 공헌할 뿐만 아니라 개인종합자산관리(Individual Savings)의 혁신에 기여할 수 있다.

본 연구의 주요 결과는 다음과 같다.

- 최적소비, 최적저축 및 최적투자 전략들에 대한 이론적 분석과 수치적 분석 결과 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 경우에 그렇지 않은 경우보다 소비를 줄이고 위험 주식에 대한 투자를 줄이고 무위험 채권에 대한 저축을 늘리는 것이 경제주체의 최적자산배분 전략이다(4. 이론적 분석, 5. 수치적 분석).
- 특히 금융자산을 적게 보유한 가난한 경제주체일수록 금융자산을 많이 보유한 부유한 경제주체보다 크고 부정적인 불확실성 경제충격으로 인한 신용대출에 대한 제약조건의 영향을 더 많이 받아 예비적 저축 동기를 갖고 무위험 채권에 대한 저축을 더 많이 늘리는 것이 최적자산배분 전략이다(4.4 최적 무위험 저축, Figure 5와 5.5 최적 무위험 저축: MPS(Marginal Propensity to Save), Figure 6와 5.6 최적자산배분)

본 연구 논문은 다음과 같은 차례를 따른다. 2. 모형에서 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 대표 경제주체의 최적자산배분 전략을 도출할 수 있는 정량적 모형을 개발한다. 3. 해법에서 Convex-Duality 방법론을 활용하여 모형의 해법을 닫힌 해의 형태로 도출한다. 4. 이론적 분석에서 닫힌 해의 형태로 도출된 모형의 해법을 토대로 최적소비, 최적저축 및 최적투자 전략 들에 대한 이론적 분석을 수행한다. 5. 수치적 분석에서 모형의 해법과 이론적 분석을 통해 얻은 최적전략들에 대한 수치적 분석을 수행하여 다양한 경제적 시사점을 도출한다. 6. 강건성 검증에서 크고 부정적인 불확실성 경제출격의 모수들이 시변성을 갖고 금융시장의 위험 주식과도 상관관계를 갖도록 모델링한 후 시변성과 상관관계가 경제주체의 최적자산배분 전략에 미치는 영향을 분석한다. 7. 결론에서 본 연구의 결론을 맺는다.

1.1 연구동향

최적자산배분 전략에 대한 이론적·실증적 연구의 대부분은 이산시간(Discrete Time)에서 Markowitz (1952)의 평균-분산(Mean-Variance) 효용함수 극대화를 통한 정적 포트폴리오 선택(Static Portfolio Selection) 또는 연속시간(Continuous Time)에서 Merton(1969, 1971)의 CRRA 효용함수 극대화를 통한 동적 포트폴리오 선택(Dynamic Portfolio Selection)에 기반을 두고 있다. 특히 Merton의 연속시간 동적 포트폴리오 선택 모형을 기초로 최적자산배분과 관련한 다양한 연구가 이루어져 왔다. 대표적으로 투자기회집합이 일정하다는 제한적인 가정을 두고 있는 기존 연구 의 한계를 극복하기 위해 Heston (1993)의 확률변동성 모형, 마코프 국면전환모형 등을 활용한 Hamilton(1988), Schwert (1989), Bollen et a.(2000), Jang et al.(2007), Dai et al.(2016), Kim et al.(2020) 등을 대안적인 연구로 활용할 수 있다.

Merton의 동적 포트폴리오 선택 모형에 경제주체의 소득을 결합하여 최적자산배분 전략을 성공적으로 도출한 연구는 Bodie et al.(1992)이 대표적이다.

관련한 모수들 또한 모두 상수로 가정한다. 그러나 이러한 제한적인 가정과 는 달리 시변성(Time Variability)을 반영한 현실을 고려하기 위해 Heston(1993)의 확률변동성 모형(Stochastic Volatility Model)과 Hamilton(1988)의 마코프 국면전환모형(Markov Regime Switching Model) 등을 활용할 수 있다. 본 연구에서도 6. 강건성 2::증에서 기하브라운운동(Geometric Brownian Motion)을 통해 크고 부정적인 불확 실성 경제충격의 모수들이 시변성을 갖고 금융시장의 위험 주식과도 상관관계를 갖도록 모델링하여 모형의 현실성을 최대한 높이고자 노력하였다.

Farhi and Panageas(2007)은 Bodie et al.(1992)의 연구에 실물옵션(Real Option)의 개념을 활용하여 최적자산배분과 최적은퇴(Optimal Retirement)와의 상관관계를 면밀히 연구하였고 Dybvig and Liu (2010)는 여기에 추가적으로 대출제약조건(Borrowing Constraint)을 고려하여 최적자산배분과 최적은퇴와 관련한 금융의사결정에 대한 연구를 수행하였다. Jang et al.(2013), Bensoussn et al.(2016), Jang et al.(2020)은 기존 연구와는 차별적으로 노동소득위험에 초점을 맞추어 최적자산배분 및 최적은퇴에 대한 새로운 해법을 도출하였다.

Merton의 동적 포트폴리오 선택 모형과 소득을 결합한 최적자산배분 전략에 대한 연구는 연금 및 보험 분야에서도 활발히 이루어져 왔다(Yarri, 1965; Davidoff et al.,2005; Lopes and Michaelides, 2007; Babbel and Merrill, 2007; Milevsky and Young, 2008; Park, 2015; Jang et al., 2019; Park, 2020; Kim et al., 2020 등 참조).

Rietz(1988)의 극단적 재난 위험 가설을 따라 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 모델링 할 때 기술적으로 Kou(2002), Kou et al.(2017)의 동시확률점프 (Doubly Stochastic Jump)를 활용한 축약형 접근 (Reduced Form Approach)을 활용할 수 있다.

[2] 모형

크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 최적자산배분 전략을 도출하는 본 연구는 크게 두 단계로 수행된다. 첫째, 대표 경제주체(개인투자자, 펀드운용주체 등)의 최적자산배분 전략을 도출할 수 있는 정량적 모형을 개발한다. 둘째, 개발된 정량적 모형을 토대로 도출된 해법에 대한 다양한 이론적·수치적 분석을 수행하여 크고 부정적인 불확실성 경제충격이 자산운용에 미칠 수 있는 파급효과를 면밀히 분석한다.

2.1 금융시장

본 연구에서 고려하는 금융시장에서 대표 경제주체는 하나의 무위험 채권과 하나의 위험 주식을 거래할 수 있다고 가정한다. 채권 가격 B와 주식 가격 S는 다음의 확률과정(Stochastic Process)을 따른다고 가정한다:

$$dB(t) = rB(t)dt, \tag{1}$$

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dZ(t), \tag{2}$$

여기서 $r > 0$은 무위험 이자율, $\mu > r$는 주식 기대수이률, $\sigma > 0$는 주식 변동성, $Z(t)$는 브라운 운동 (Brownian Motion)을 나타낸다.

2.2 노동시장

통상 경제학자들은 경제 전체의 생산성(Aggregate Output)[4]을 특정 시간 동안 경제에서 생산되는 모든 상품과 서비스의 총합으로 정의한다. 한편 생산자(예: 개인, 기업 등)들은 투자를 통해 자산을 형성하고 고용을 통해 노동력을 투입하여 경제에서 상품과 서비스를 생산하고 판매한다. 결국 경제 전체의 생산성은 금융시장의 투자와 노동시장의 고용의 두 가지 요소에 의해 좌우 되며(Cox et al., 1985)[5] 생산성에서 벌어들일 수 있는 생산자들의 모든 수익(Proceeds)은 경제 전체의 소득(Aggregate Earnings)을 구성하게 된다.

4) Total Productivity라고도 불리는 경제 전체의 생산성에 대한 실제적인 개념은 흔히 국내총생산(GDP)로 해석될 수 있다.
5) Cox et al. (1985)의 “AK” 생산기술(Production Technology) 참고.

본 연구에서도 이러한 경제적 매커니즘을 따라 경제 전체의 생산성 I중에서 $\xi I(\xi \in (0,1))$가 노동시장에서 고용에 대한 대표 경제주체의 소득으로 그리고 나머지 $(1-\xi)I$가 금융시장에서 투자에 대한 배당으로 배분된다고 가정한다.6) 현재의 COVID-19를 포함하여 극단적 시나리오가(Extreme Scenario)가 야기할 수 있는 크고 부정적인 불확실성 경제충격은 다음의 Rietz(1988)의 극단적 재난 위험 가설을 따라 경제 전체의 생산성에 악영향을 초래할 수 있다:

특히 Mehra and Prescott의 모형에서 작은 확률이지만 불황을 야기할 수 있는(A Low-Probability, Depression-Like) 위험을 고려하면 Arrow-Debreu 패러다임에서도 높은 주식 위험 프리미엄과 낮은 무위험 이자율을 설명할 수 있다.

따라서 본 연구는 기술적으로 포아송 점프 프로세스를 통해 Rietz(1988)의 "A Low-Probability, Depression-Like" 위험을 경제 전체의 생산성에 다음과 같이 반영하고자 한다:

$$P\{\tau \le t\} = 1 - e^{-\delta t} \tag{3}$$

여기서 τ는 크고 부정적인 불확실성 경제충격이 발생하는 시간으로 지수분포(Exponential Distribution)을 따르며 $\delta > 0$는 경제충격 사건의 발생빈도를 결정하는 모수를 의미한다. 포아송 점프 프로세스에 따라 경제충격이 발생하면 생산성이 I에서 kI로 감소한다고 가정하고 $k \in (0,1)$은 통상 신용위험 문헌에서 주로 사용되고 있는 회복 모수(Recovery Parameter)를 의미한다.

2.3 신용시장

$\epsilon \equiv \xi I$의 노동소득을 받고 있는 경제주체의 인적자본(Human Capital)의 현재가치는 다음과 같이 주어진다(Friedman, 1957):7)

$$\begin{aligned} &E\Big[\int_0^{\tau} e^{-rt}\epsilon dt + \int_{\tau}^{\infty} e^{-rt}k\epsilon dt\Big] \\ &\quad = \frac{\epsilon}{r+\delta}\Big(1+\frac{\delta k}{r}\Big), \end{aligned} \tag{4}$$

여기서 편의를 위해 경제주체의 노동소득 ξI를 ϵ으로 표기하였다.

크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려하지 않은 경우에 다시 말해 $\delta > 0$이면 경제주체의 인적자본식 (4)은 ϵ / r이 되며 이는 경제주체가 미래에 받게 될 모든 노동소득의 총합을 무위험 이자율로 할인한 현재가치를 의미한다. 여기에 경제충격을 고려하게 되면 다시 말해 $\delta > 0$이면 경제주체의 인적자본은 미래에 받게 될 모든 노동소득의 총합을 위험이 고려된 이자율 $r+\delta$로 할인한 현재가치 $\epsilon/(r+\delta)$가 되어 경제충격을 고려하지 않은 인적자본 ϵ/r 보다 작아진다. 또한 δ의 확률로 경제충격 이후에 줄어든 노동소득 ϵ/r을 무위험 이자율로 할인한 현재가치 $\delta k\epsilon/r$을 더하면 본 연구에서 고려하고 있는 경제주체의 인적자본식 (4)이 도출된다.8)

크고 부정적인 불확실성 경제충격이 금융시장 전반에 신용경색과 유동성 문제를 야기하게 되면 신용시장에서 가계금융 전반의 대출에도 큰 제약이 가해질 가능성이 높다. 이에 본 연구에서는 대출제약조건의 강약을 조절하는 외생적 변수(Exogenous Variable)

---

6) 본 연구에서는 정부에 대한 고려 없이 시장의 자율적 거래에 의해 경제 전체의 생산성이 소득과 배당으로 배분된다고 가정하였다. 그러나 정부가 가격을 조절해 초과공급과 초과수요를 해소하는 혼합경제체제를 고려해 볼 수 있는데 대표적으로 랑게 모형(Large Model)이 이에 해당한다. 또한 계획경제(Planned Economy)를 통해 집권적 중 양계획의 통제에 의하여 상품과 서비스의 생산·분배·소비를 계획하고 관리할 수 있는 국민경제(National Economy)를 고려해 볼 수 있다.

7) 자세한 유도 과정은 Appendix를 참조한다.

8) 미래에 받게 될 모든 노동소득의 총합을 위험이 고려된 이자율 $r+\delta$로 할인한 현재가치 $\epsilon/(r+\delta)$와 δ의 확률로 경제충격 이후에 줄어든 노동소득 $k\epsilon$을 무위험 이자율로 할인한 현재가치 $\delta k\epsilon/r$을 합하면 결과적으로 경제주체의 인적자본 식 (4)을 다음과 같이 얻을 수 있다:

$\omega \in [0,1]$을 인적자본식 (4)에 다음과 같이 고려한다:

$$\omega \times \frac{\epsilon}{r+\delta}\left(1+\frac{\delta k}{r}\right) \tag{5}$$

만약 대출에 아무런 제약이 없고($\omega = 1$) 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려하지 않으면($\delta > 0$), 경제주체는 경제주체의 인적자본 식 (4)을 따라 ϵ/r 만큼의 인적자본을 담보로 신용시장에서 가계대출을 받을 수 있다. 그러나 일반적인 경우에는 시장 마찰 조건들(Market Frictions) 예를 들어 비대칭적 정보(Asymmetric Information), 대리인 갈등(Agency Conflicts), 제한된 집행(Limited Enforcement) 등으로 인해 대출에 제약이 생긴다($0 \leq \omega < 1$). 이에 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려하지 않는다고 하더라도($\delta > 0$) 시장에 존재하는 대출제약 때문에 ϵ/r 보다 작은 $\omega \times \epsilon/r$ 만큼의 인적자본을 담보로 가계대출을 받을 수 있다. 여기에 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려하게 되면($\delta > 0$) 인적자본 식 (4)에서 주어진 인적자본에 대출제약조건의 강약을 조절하는 ω가 곱해진 만큼의 인적자본(식 (5))을 담보로 가계대출을 받을 수 있다. 따라서 본 연구에서는 크고 부정적인 불확실성 경제충격($\delta > 0$)과 이로 인한 포스트 코로나 시대의 가계금융 전반의 대출제약($0 \leq \omega < 1$) 이야기 하고 있는 두 가지 차원의 시장 불완전성 (Two-Dimensional Market Incompleteness)을 인적자본의 현재가치(식 (4))에 대출제약조건의 강약을 조절하는 변수 ω를 곱한 형태의 식 (5)을 통해 고려한다.

2.4 최적자산배분 문제

본 연구에서는 하나의 무위험 채권(식 (1))과 하나의 위험 주식(식 (2))으로 구성된 금융시장에서 노동시장의 크고 부정적인 불확실성 경제충격(식 (3))으로 인해 신용시장에서의 대출이 제약되었을 때 무한 시간대(Infinite Horizon)에서 소비에 대한 CRRA 효용함수를 갖는 대표 경제주체 (개인투자자, 펀드운용주체 등)의 최적자산배분 전략을 도출하고자 한다. 다시 말해 본 연구에서 고려하는 경제주체의 가치함수(Value Function)는 다음과 같이 주어지게 된다:

$$V(w) \equiv \max_{(c,\pi)} E\left[\int_0^\infty e^{-\beta t}\frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}dt\right] \tag{6}$$

여기서 w는 대표 경제주체가 보유하고 있는 최초 금융자산, c는 경제주체의 소비, π는 위험 주식에 투자하는 달러양(Dollar Amount), $\beta > 0$는 경제주체의 주관적 할인율(Subjective Discount Rate), $\gamma > 0$는 경제주체의 상대적 위험회피도(Relative Risk Aversion)를 나타내는 상수를 나타내며 t시점에서의 금융자산 $W(t)$는 다음의 확률과정을 따른다:

$$\begin{aligned} dW(t) = \{&rW(t) - c(t) + \epsilon \\ &+ \pi(t)(\mu - r)\}dt \\ &+ \pi(t)\sigma dZ(t) \end{aligned} \tag{7}$$

또한 경제주체의 t시점에서의 금융자산 $W(t)$는 일반화된 인적자본 식 (5)을 따라 다음을 만족한다:

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{r+\delta} + \delta\frac{k\epsilon}{r} &= \frac{r\epsilon + (r+\delta)\delta k\epsilon}{r(r+\delta)} \\ &= \frac{\epsilon}{r+\delta}\left(\frac{r}{r}+\frac{\delta k}{r}\right) \\ &= \frac{\epsilon}{r+\delta}\left(1+\frac{\delta k}{r}\right) \end{aligned}$$

$$W(t) \geq -\omega \times \frac{\epsilon}{r+\delta}\left(1+\frac{\delta k}{r}\right), \quad \text{for all} \ \ t \geq 0 \tag{8}$$

[3] 해법

3.1 Convex-Duality 방법론

본 연구에서 도출하고자 하는 대표 경제주체의 가치함수 식 (6)은 다음의 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 방정식을 만족한다:

$$-\beta V(w)+(rw+\epsilon)V'(w) - \frac{1}{2}\theta^2\frac{V'(w)^2}{V''(w)} + \frac{\gamma}{1-\gamma}\{V'(w)\}^{1-1/\gamma}=0 \tag{9}$$

여기서 $\theta=(\mu-r)/\sigma$는 Sharpe Ratio를 나타내며 최적소비 c와 최적투자 π에 대한 다음의 FOC(First Order Condition) 조건을 적용한다:

$$c=V'(w)^{-1/\gamma}, \quad \pi=-\frac{\theta}{\sigma}\frac{V'(w)}{V''(w)} \tag{10}$$

또한 HJB 방정식 (9)에서 경제주체의 초기 금융자산 w는 대출제약조건 식 (8)를 따라 다음을 만족한다:

$$w \geq -\omega \times \frac{\epsilon}{r+\delta}\left(1+\frac{\delta k}{r}\right) \tag{11}$$

제약조건 식 (11)을 만족하는 HJB 방정식 (9)의 닫힌 해(Closed-Form Solution)를 도출하기 위해 Bensoussan et al.(2016)이 고안한 새로운 Convex-Duality 방법론을 따라 금융자산 w의 듀얼 변수(Dual Variable) $\lambda(w)$를 가치함수 $V(w)$의 일계 미분(First Derivative)로 정의한 후 경제주체의 총자산 $w+\epsilon/r$(금융자산 w+인적자본 ϵ/r)을 듀얼 변수 $\lambda(w)$에 대한 듀얼 가치함수 $G(\lambda(w))$로 정의한다:

$$\lambda(w) \equiv V'(w), \quad G(\lambda(w)) \equiv w+\frac{\epsilon}{r} \tag{12}$$

듀얼 가치함수 $G(\lambda(w))$는 다음의 두 가지 조건을 추가적으로 만족한다:

$$G'(\lambda(w))\lambda'(w)=1,$$
$$G''(\lambda(w))\lambda'(w)^2+G'(\lambda(w))\lambda''(w)=0 \tag{13}$$

다시 본래의 HJB 방정식 (9)로 돌아가서 HJB 방정식 (9)의 양변을 w에 대하여 한번 미분하면 다음의 비선형 미분방정식을 얻는다:

$$-\beta V'(w)+rV'(w)+(rw+\epsilon)V''(w) -\frac{1}{2}\theta^2\frac{2V'(w)V''(w)^2-V'(w)^2V'''(w)}{V''(w)^2} -\{V'(w)\}^{-1/\gamma}V''(w)=0 \tag{14}$$

여기서부터 편의를 위해 혼동의 여지가 없는 한 듀얼 변수 $\lambda(w)$와 듀얼 가치함수 $G(\lambda(w))$에서 금융자산 w를 생략하기로 한다. 식 (12)에서 정의된 듀얼 변수 λ와 듀얼 가치함수 $G(\lambda)$ 이용하면 미분방정식 (14)을 다음의 비선형 미분방정식으로 변환할

수 있다:

$$-\beta\lambda + r\lambda + rG(\lambda)\lambda' - \frac{1}{2}\theta^2\Big(2\lambda - \frac{\lambda^2\lambda''}{(\lambda')^2}\Big) - \lambda^{-1/\gamma}\lambda' = 0.$$

또한 식 (13)에 주어진 두 가지 조건식을 이용하면 위의 미분방정식을 다음과 같이 재서술 할 수 있다:

$$-\beta\lambda + r\lambda + r\frac{G(\lambda)}{G'(\lambda)} - \frac{1}{2}\theta^2\Big(2\lambda + \frac{G''(\lambda)}{G'(\lambda)}\lambda^2\Big) - \frac{\lambda^{-1/\gamma}}{G'(\lambda)} = 0.$$

위 미분방정식의 양변에 $G(\lambda)$를 곱하고 정리하면 결과적으로 원래의 HJB 방정식 (9)을 다음의 다이나믹 자산가격결정식으로 변환하게 된다:

$$rG(\lambda) = \frac{1}{2}\theta^2\lambda^2 G''(\lambda) + (\theta^2 + \beta - r)\lambda G'(\lambda) + \lambda^{-1/\gamma}. \quad (15)$$

이제 대출제약조건 식 (11)을 듀얼 변수 λ와 듀얼 가치함수 $G(\lambda)$를 이용하여 재서술 하려고 한다. 초기 금융자산 w가 대출제약조건 식의 하방제한(Lower Limit)에 도달하는 경우에 대응하는 듀얼 변수 λ의 임계치를 $\lambda > 0$라 하면 식 (12)에서 듀얼 가치함수 $G(\lambda)$의 정의에 따라 다음을 만족한다:

$$G(\bar{\lambda}) = -\omega \times \frac{\epsilon}{r+\delta}\Big(1 + \frac{\delta k}{r}\Big) + \frac{\epsilon}{r}. \quad (16)$$

또한 초기 금융자산 w가 대출제약조건 식의 하방제한에 도달하게 되면 경제주체는 더이상 위험 주식에 투자할 수 없는 상황에 놓이게 되므로 식 (10)에 주어진 최적투자 π에 대한 FOC 조건을 이용하면 다음을 만족한다:

$$0 = -\frac{\theta}{\sigma}\frac{V'\Big(\omega \times \frac{\epsilon}{r+\delta}\Big(1+\frac{\delta k}{r}\Big)\Big)}{V''\Big(\omega \times \frac{\epsilon}{r+\delta}\Big(1+\frac{\delta k}{r}\Big)\Big)} = -\frac{\theta}{\sigma}G'(\bar{\lambda})\bar{\lambda}.$$

따라서

$$G'(\bar{\lambda}) = 0 \quad (17)$$

요약하자면 Convex-Duality 방법론을 따라 본래의 HJB 방정식 (9)과 대출제약조건 식 (11)은 $0 < \lambda < \lambda$를 만족하는 임의의 듀얼 변수 λ와 듀얼 가치함수 $G(\lambda)$에 대한 다이나믹 자산가격결정식 (15)과 최적정지(Optimal Stopping)의 Smooth Pasting으로 잘 알려진 두 가지 경계조건 식 (16), (17)으로 변환될 수 있다.

3.2 다이나믹 자산가격결정식

이제 도출된 다이나믹 자산가격결정식 (15)의 경제적 시사점에 대해서 자세히 살펴보고자 한다. 대표 경제주체가 보유한 초기 금융자산 w를 최적소비 c를 따라 소비한 후 남은 자산 $w-c$을 최적투자 π를 따라 위험 주식에 투자하고 $w-c-\pi$를 무위험 채권에 저축하게 되면 경제주체는 다이나믹 자산가격결정식 (15)의 좌변에서 볼 수 있듯이 총 자산 $G(\lambda) = w + \epsilon/r$에 대한 무위험 이자율 r만큼의 수익률을 얻게 된다.

이렇게 최적소비와 최적투자를 통해 경제주체의 자산을 최적배분 하는 과정은 마치 옵션 가격을 결정(Option Pricing)할 때 무위험 채권과 위험 주식으로 구성된 포트폴리오에 대하여 옵션 델타(Option Delta)를 통해 위험중립측도(Risk Neutral Measure)에서 무위험 이자율 r 만큼의 무위험 포트폴리오 수익률을 얻는 과정과 유사하다. 좀 더 구체적으로 다이나믹 자산가격결정식 (15)의 우변에서 Sharpe Ratio의 제곱 θ^2를 동반한 첫번째 항은 옵션 가격 결정에서 주식 변동 성의 Convexity 효과와 비슷하게 Sharpe Ratio의 Convexity 효과를 반영한다. 다시 말해 주식

프리미엄 $\mu - r$이 클수록 또는 주식 변동성 σ가 작을수록 경제주체의 총 자산의 수익률에 오목하게 긍정적으로 기여한다(Positively Affect in a Convex Way). 다시 다이나믹 자산가격결정식 (15)로 돌아가서 우변에서 총 자산 $G(\lambda) = w + \epsilon / r$의 Drift 항을 살펴보면 경제주체의 총 자산의 위험 프리미엄은 Sharpe Ratio의 Convexity와 경제주체의 주관적 할인율 β가 반영된 $\theta^2 = \beta - r$로 주어지게 된다. 마지막으로 다이나믹 자산가격결정식 (15)의 우변 마지막 항 $\lambda^{-1/\lambda}$는 식 (10) 에서 주어진 최적소비 c에 대한 FOC 조건과 식 (12)에서 주어진 듀얼 변수 λ의 정의를 따라 경제주체가 최적소비를 통해 얻게 되는 효용값(Utility Value)을 나타낸다.

3.3 듀얼 가치함수의 일반해

두 가지 경계조건 식 (16), (17)과 다이나믹 자산가격결정식 (15)을 만족하는 듀얼 가치함수 $G(\lambda)$의 일반해(General Solution)은 다음의 닫힌 해의 형태로 도출할 수 있다:

$$G(\lambda) = \frac{1}{A}\lambda^{-1/\gamma} + B\lambda^{-\alpha^*}, \tag{18}$$

여기서 A는 다음의 Merton 상수를 나타내며

$$A = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\Big(r + \frac{\theta^2}{2\gamma}\Big) + \frac{\beta}{\gamma},$$

B는 듀얼 변수의 임계치 λ와 함께 두 가지 경계조건 식 (16), (17)에 따라 결정되어야 할 상수(Constant To Be Determined), $-1 < \alpha^* < 0$은 다음의 특성 방정식(Characteristic Equation)을 만족하는 해(Root)이다:

$$CE(\alpha) \equiv -\frac{1}{2}\theta^2\alpha(\alpha - 1) + \alpha(\beta - r) + r = 0.$$

[4] 이론적 분석

닫힌 해의 형태로 도출된 모형의 해법을 토대로 노동시장의 크고 부정적인 불확실성 경제충격으로 인해 신용시장에서의 대출이 제약되었을 때 대표 경제주체의 최적소비, 최적저축 및 최적투자 전략들에 대한 이론적 분석을 수행한다.

4.1 최적소비

닫힌 해로 도출된 듀얼 가치함수의 일반해(식(18))와 식 (10)에서 주어진 최적소비에 대한 FOC 조건, 그리고 식 (12)에서 정의된 듀얼 가치함수와 총 자산 간의 관계식에 따라 다음의 최적자산 (Optimal Wealth) 전략을 얻을 수 있다:

$$w + \frac{\epsilon}{r} = \frac{1}{A}c + B\lambda^{-\alpha^*}. \tag{19}$$

최적자산 전략(식(19))에 따라 대표 경제주체의 최적소비 전략은 다음과 같다:

Theorem 4.1 크고 부정적인 불확실성 경제충격으로 인해 신용대출이 제약되었을 때 대표 경제주체의 최적소비 전략은 다음의 닫힌 해의 형태로 도출된다.

$$c = A\Big\{\Big(w + \frac{\epsilon}{r}\Big) - B\lambda^{-\alpha^*}\Big\}. \tag{20}$$

본 연구에서 도출된 최적소비 전략은 Friedman (1957)의 항상소득가설(Permanent Income Hypothesis)를 일반화한다. 구체적으로 크고 부정적인

불확실성 경제충격을 고려하지 않은 경우 다시 말해 신용대출에 대한 제약이 없는 경우($B=0$)에 최적소비 전략은 총 자산 $w+\epsilon/r$에 Merton 상수 A가 곱해진 형태를 따른다. 이 경우 금융자산 w에 대한 MPC(Marginal Propensity to Consume)이 Merton 상수 A로 일정하게 주어져 금융자산의 양에 관계없이 안정적인 소비가 가능하다는 항상소득가설의 소비평탄화(Consumption Smoothing) 결과를 얻게 된다.

그러나 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 경우 다시 말해 신용대출에 대한 제약이 있는 경우($B>0$)에 금융자산에 대한 MPC는 더 이상 Merton 상수 A로 일정하지 않게 된다. 이 경우 금융자산에 대한 MPC는

$$MPC \equiv \frac{\partial c}{\partial w} = A\{1+\alpha^* B\lambda^{-\alpha^*-1}\lambda'(w)\}$$

와 같다. 듀얼 가치함수 $G(\lambda)$는 감소하고 오목한 함수(Decreasing and Convex Function)로 알려져 $G'(\lambda(w))<0$이고 듀얼 가치함수의 조건 식(13)에서 첫번째 관계식을 따라 $\lambda'(w)<0$임을 알 수 있다. 따라서 금융자산에 대한 MPC는 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려하지 않은 경우의 Merton 상수 A보다 $\alpha^* B\lambda^{-\alpha^*-1}\lambda'(w)$ 만큼 커지게 되며 따라서 한 단위 금융자산의 감소에 대하여 소비를 더 크게 줄이고 대신 저축을 더 많이 하는 것이 최적이다.

또한 $\lambda'(w)<0$을 통해 대표 경제주체가 보유한 금융자산 w이 감소할 때 다시 말해 $\lambda(w)$가 증가할 때 식 (20)에서 주어진 최적소비 전략을 따르면 소비를 더 크게 줄이고 대신 저축을 더 많이 하는 것이 최적임을 알 수 있다. 이는 금융자산을 적게 보유한 가난한 경제주체는 신용대출에 대한 제약조건의 영향을 더 많이 받아 금융자산을 많이 보유한 부유한 경제주체보다 똑같은 크고 부정적인 불확실성 경제충격에 대하여 소비를 더 크게 줄이고 저축을 더 많이 하는 것이 최적임을 의미한다.

4.2 최적저축

금융자산에 대한 MPC의 이론적 예측에 따르면 크고 부정적인 불확실성 경제충격에 노출된 대표 경제주체는 소비를 덜하고 저축을 더 많이 하는 것이 최적이다. 경제주체의 이러한 저축 패턴에 대한 풍부한 경제적 시사점을 논의하기 위해 본 장에서는 최적저축에 대한 이론적 분석을 수행한다. 대표 경제주체의 저축은 총 자산(식(19))에서 소비(식(20))를 제외하고 남은 나머지 자산으로 정의된다:

$$\begin{aligned}\text{최적저축} &\equiv w+\frac{\epsilon}{r}-c \\ &= w+\frac{\epsilon}{r}-A\left\{\left(w+\frac{\epsilon}{r}\right)-B\lambda^{-\alpha^*}\right\} \\ &= (1-A)\left(w+\frac{\epsilon}{r}\right)+AB\lambda^{-\alpha^*}.\end{aligned} \tag{21}$$

식 (21)에서 주어진 최적저축은 총 자산 $w+\epsilon/r$에서 소비 c를 제외한 나머지 자산을 무위험 채권과 위험 주식에 배분하는 것을 의미한다.

크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려하지 않은 경우 즉 신용대출에 대한 제약이 없는 경우($B=0$)에 금융자산에 대한 MPS(Marginal Propensity to Save)는 $1-A$로 주어진다. 따라서 한 단위 금융자산의 w증가에 대하여 Friedman(1957)의 항상소득가설을 따라 금융자산 w의 Merton 상수 A가 곱해진 만큼의 양을 소비하고 금융자산 w의 $1-A$가 곱해진 양을 저축하는 것이 최적이다.

크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려하면 즉 신용대출에 대한 제약이 있는 경우($B>0$), 금융자산에 대한 MPS는

$$\begin{aligned}MPS &\equiv \frac{\partial(\text{최적저축})}{\partial w} \\ &= 1-A-\alpha^* AB\lambda^{-\alpha^*-1}\lambda'(w)\end{aligned}$$

이다. 금융자산에 대한 MPS는 크고 부정적인

불확실성 경제충격을 고려하지 않은 경우보다 $\alpha^* AB\lambda^{-\alpha^*-1}\lambda'(w) > 0$만큼 작아지게 되어 한 단위 금융자산의 감소에 대하여 상대적으로 저축의 양을 덜 줄이는 것이 최적이다.

또한 $\lambda'(w) < 0$을 통해 대표 경제주체가 보유한 금융자산 w가 줄어들때 다시 말해 $\lambda(w)$가 커질 때 식 (21)에서 주어진 최적저축 전략을 따르면 소비를 줄이고 대신 무위험 채권과 위험 주식에 자산을 배분하는 것이 최적이다. 이는 최적소비 전략에 대한 분석과 유사하게 가난한 경제주체 일수록 부유한 경제주체보다 똑같은 크고 부정적인 불확실성 경제충격에 대하여 상대적으로 신용대출에 대한 제약조건의 영향을 더 많이 받게 되어 소비를 더 크게 줄이고 대신 무위험 채권과 위험 주식에 자산을 더 배분하는 것이 최적임을 의미한다.

4.3 최적투자

식 (10)에서 주어진 위험 주식에 대한 최적투자 π에 대한 FOC 조건은 식 (12)에서 정의된 듀얼 변수 λ와 듀얼 가치함수 $G(\lambda)$ 그리고 식 (13)에 주어진 조건식들을 이용하면 다음과 같이 재서술 할 수 있다:

$$\pi = -\frac{\theta}{\sigma}\frac{V'(w)}{V''(w)} = -\frac{\theta}{\sigma}G'(\lambda)\lambda. \tag{22}$$

식 (18)의 양변을 λ에 대하여 한번 미분하면

$$G'(\lambda) = -\frac{1}{\gamma A}\lambda^{-1/\gamma-1} - \alpha^* B\lambda^{-\alpha^*-1}. \tag{23}$$

또한 식 (10)에서 주어진 최적소비 c에 대한 FOC 조건을 듀얼 변수 λ로 재서술 하면

$$c = \lambda^{-1/\gamma}.$$

그러면 식 (20)에서 주어진 최적소비 전략에 따라

$$\lambda^{-1/\gamma} = A\Big\{\Big(w + \frac{\epsilon}{r}\Big) - B\lambda^{-\alpha^*}\Big\}.$$

이를 식 (23)의 우변 $\lambda^{-1/\gamma}$에 대입하면

$$G'(\lambda) = -\frac{1}{\gamma\lambda}\Big(w + \frac{\epsilon}{r}\Big) + \frac{1}{\gamma}B\lambda^{-\alpha^*-1} - \alpha^* B\lambda^{-\alpha^*-1}.$$

이를 듀얼 변수 λ와 듀얼 가치함수 $G(\lambda)$를 통해 재서술된 최적투자 π에 대한 FOC 조건식 (22)에 대입하면 다음의 최적투자 전략을 얻을 수 있다:

Theorem 4.2 크고 부정적인 불확실성 경제충격으로 인해 신용대출이 제약되었을 때 대표 경제주체의 최적투자 전략은 다음의 닫힌 해의 형태로 도출된다:

$$\pi = \frac{\theta}{\gamma\sigma}\Big\{\Big(w + \frac{\epsilon}{r}\Big) + (\gamma\alpha^* - 1)B\lambda^{-\alpha^*}\Big\}. \tag{24}$$

크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려하지 않은 경우 다시 말해 신용대출에 대한 제약이 없는 경우 $(B=0)$, 식 (24)에서 주어진 최적투자 전략은 다음의 전통적인 Merton 투자 전략을 따른다:

$$\pi = \frac{\theta}{\gamma\sigma}\Big(w + \frac{\epsilon}{r}\Big).$$

이 경우 최적투자의 금융자산 w에 대한 MPC가 $\theta/(\gamma\sigma)$로 일정하게 되며 한 단위 금융자산의 증가에 대하여 Sharpe Ratio가 클수록 또는 위험회피도가 작을수록 또는 주식변동성이 작을수록 위험 주식에 더 많이 투자하는 것이 최적이다.

그러나 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 경우 다시 말해 신용대출에 대한 제약이 있는 경우 $(B > 0)$에 금융자산에 대한 MPI(Marginal Propensity to Invest)는 더 이상 일정하지 않게 된다:

$$MPI \equiv \frac{\partial \pi}{\partial w} = \frac{\theta}{\gamma\sigma}\Big\{1-\alpha^{*}(\gamma\alpha^{*}-1)B\lambda^{-\alpha^{*}-1}\lambda'(w)\Big\}.$$

이 경우 금융자산에 대한 MPI는 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려하지 않은 경우의 $\theta/(\gamma\sigma)$보다 $\theta/(\gamma\sigma)\times\alpha^{*}(\gamma\alpha^{*}-1)B\lambda^{-1^{*}-1}\lambda'(w)$만큼 커져 한 단위 금융자산의 감소에 대하여 위험 주식에 대한 투자를 더 많이 줄이는 것이 최적이다.

또한 $\lambda'(w)<0$에 의해 대표 경제주체가 보유한 금융자산 w가 줄어들 때 다시 말해 $\lambda(w)$가 커질 때 식 (24)에서 주어진 최적투자 전략에 의하면 위험 주식에 대한 투자를 더 크게 줄이는 것이 최적임을 알 수 있다. 이는 최적소비 전략에 대한 분석과 유사하게 금융자산을 적게 보유한 가난한 경제주체는 부유한 경제주체보다 똑같은 크고 부정적인 불확실성 경제충격에 대하여 상대적으로 신용대출에 대한 제약조건의 영향을 더 많이 받게 되어 위험 주식에 대한 투자를 더 크게 줄이는 것이 최적임을 의미한다.

본 연구에서 제안하고 있는 최적투자 전략과는 반대로 현재 국내 주식시장의 과도한 개인 참여는[9] 개인이 보유한 금융자산 대비 위험자산에 대한 투자 비중을 지나치게 높일 수 있기 때문에 크고 부정적인 불확실성 경제충격이 야기할 수 있는 경제 불황기 때 주식 가격 폭락 등으로 인해 막대한 금전적인 손실을 가져올 수 있다.[10] 따라서 경제충격의 불확실성이 매우 큰 지금 위험자산에 대한 개인투자자들의 과도한 선호에 대하여 각별한 주의가 필요한 시점이라 판단된다.

4.4 최적 무위험 저축

식 (21)에서 주어진 위험 주식과 무위험 주식 모두에 대한 최적저축에서 식 (24)에서 주어진 위험 주식에 대한 최적투자를 제외하면 다음의 최적 무위험 저축 전략을 얻을 수 있다:

$$\begin{aligned}
&\text{최적 무위험 저축} \equiv \text{최적저축} - \pi \\
&= (1-A)\Big(w+\frac{\epsilon}{r}\Big) + AB\lambda^{-\alpha^{*}} - \frac{\theta}{\gamma\sigma}\Big\{\Big(w+\frac{\epsilon}{r}\Big) \\
&\quad + (\gamma\alpha^{*}-1)B\lambda^{-\alpha^{*}}\Big\} \\
&= \Big(1-A-\frac{\theta}{\gamma\sigma}\Big)\Big(w+\frac{\epsilon}{r}\Big) \\
&\quad + B\Big(A-\frac{\theta}{\gamma\sigma}(\gamma\alpha^{*}-1)\Big)\lambda^{-\alpha^{*}}.
\end{aligned} \tag{25}$$

크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려하지 않은 경우 즉 신용대출에 대한 제약이 없는 경우 $(B=0)$에 무위험 채권에 대한 저축만 고려하는 경우에 금융자산에 대한 MPS는 $1-A-\theta/(\gamma\sigma)$로 일정하다. 이는 한 단위 금융자산 w의 증가에 대하여 Friedman의 항상소득가설을 따라 A가 곱해진 만큼 소비하고 Merton 투자 전략을 따라 $\theta/(\gamma\sigma)$가 곱해진 만큼 위험 주식에 투자하고 나머지를 무위험 채권에 저축하는 것이 최적임을 의미한다.

그러나 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 경우 즉 신용대출에 대한 제약이 있는 경우$(B>0)$에는 금융자산에 대한 MPS가 더이상 일정하지 않게 된다:

9) COVID-19 글로벌 판데믹 이후의 지난 7개월여 동안 국내 주식시장에 들어온 직접투자 자금 규모는 64조원 수준으로 외환위기 직후의 바이코리아펀드와 2007년 2008년 인사이트펀드 붐 이후로 거의 12년 만에 처음으로 최고치를 갱신하고 있다. 예를 들어 2020년 6월 말 SK바이오팜에 이어 최근 카카오게임즈의 일반 공모 정약에 무려 58조원에 달하는 증거금이 몰려 역대 최고를 기록하였다.

10) 2020년 9월 3일 뉴욕 다우지수가 807.77포인트(2.78%) 급락한 2만8,292.73에 장을 마치면서 2020년 6월 11일 이 후 3개월 만에 최대 낙폭을 기록했으며 S&P500지수와 나스닥은 각각 125.89포인트(3.51%)와 598.34포인트(4.96%) 가 폭락한 3,455.06과 1만1,458.10을 기록했다. 이러한 미국 증시의 폭락장으로 현재 많은 전문가들은 과도한 부채 확대에 기댄 경기호황이 끝난 뒤 은행 채무자의 부채상환 능력이 나빠져 채무자가 결국 건전한 자산가지 내다팔아 민스커 모멘트(Minsky Moment)로 불리는 급격한 금융시스템의 붕괴에 직면해 있을 수 있다고 경고하고 있다.

$$MPS \equiv \frac{\partial(\text{최적 무위험 저축})}{\partial w}$$
$$= 1 - A - \frac{\theta}{\gamma\sigma} - \alpha^* B\Big(A - \frac{\theta}{\gamma\sigma}(\gamma\alpha^* - 1)\Big)$$
$$\lambda^{-\alpha^*-1}\lambda'(w).$$

이 경우 금융자산에 대한 MPS는 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려하지 않은 경우의 $1-A-\theta/(\gamma\sigma)$보다 $\alpha^* B\{A-\theta(\gamma\alpha^*-1)/(\gamma\alpha)\}\lambda^{-\alpha^*-1}\lambda(w) > 0$만큼 작아지게 되어 한 단위 금융자산의 감소에 대하여 상대적으로 무위험 채권에 대한 저축의 양을 덜 줄이는 것이 최적이다. 또한 $\lambda(w) < 0$에 의해 대표 경제주체가 보유한 금융자산 w가 감소할 때 즉 $\lambda(w)$가 증가할 때 식 (25)에서 주어진 최적 무위험 저축 전략에 따라 무위험 채권에 대한 저축을 더 크게 늘리는 것이 최적이다. 이는 금융자산을 적게 보유한 가난한 경제주체 일수록 크고 부정적인 불확실성 경제충격으로 인한 신용대출에 대한 제약조건의 영향을 더 많이 받아 예비적 저축동기(Precautionary Savings Motive)를 갖고 무위험 채권에 대한 저축을 더 많이 늘리는 것이 최적임을 의미한다.

[5] 수치적 분석

모형의 해법과 이론적 분석을 통해 얻은 대표 경제주체의 최적자산과 최적소비, 최적저축 및 최적투자 전략들에 대한 수치적 분석을 수행하여 최적전략들에 대한 다양한 경제적 시사점을 논의한다.

5.1 기본 파라미터 값

수치적 분석에 사용되는 기본 파라미터 값(Baseline Parameter Value)는 다음과 같다:

r = 1%, μ = 7%, σ = 20%, ϵ = 1, β = 4%, γ = 4, δ = 0.5%, k = 80%, ω = 50%,

구체적으로 무위험 이자율을 나타내는 파라미터 r은 최근의 초저금리 기조를 반영하여 1%로 설정하였고 위험 주식에 대한 기대수익률 μ를 7%로 고정하여 주식 프리미엄의 역사적 평균 값 (Historical Average Value) 6%를 반영하였다.[11)]

대표 경제주체의 연간 노동소득 β은 1로 주관적 할인율 β는 최적자산배분과 관련한 기존문헌(Jang *et al.*, 2019 등)을 잠고하여 4%로 위험회피도 γ는 4로 고정하였다.[12)]

또한 크고 부정적인 불확실성 경제충격의 빈도를 결정하는 파라미터 δ를 0.5%로 설정하여 평균적으로 200년에 한번 꼴로 경제충격이 발생할 수 있는 아주 보수적인 상황을 가정하였고, 경제충격이 발생했을 때 생산성의 감소를 나타내는 파라미터 k를 80%로

11) Campbell(1999)의 Century-Long(1891-1994) 샘플 데이터에 따르면 무위험 이자율은 1.96%가 적당한 것으로 알려져 있으나 2008년 글로벌 금융위기와 현재 글로벌 COVID-19 판데믹 이후 계속되는 기준금리 인하 기조를 반영하여 본 연구에서는 무위험 이자율을 1%로 고정하였다. 또한 Campbell(1999)의 같은 데이터에 따르면 위험 프리미엄은 6.26%로 알려져 있어 본 연구에서는 이와 유사하게 위험 프리미엄을 6%로 고정하였다. 이외에도 많은 투자 문헌에서 역사적 프리미엄을 6% 내외의 범위에서 고정하고 있다(Cocco et al., 2005; Farhi and Panageas, 2007; Dybvig and Liu, 2010; Jang et al., 2013; Jang et al., 2019 등).

12) 최적자산배분과 관련한 기존문헌에 따르면 Farhi and Panageas (2007)은 경제주체의 위험회피도를 2에서 4 사이의 범위에서 설정하였고 Dybvig and Liu (2010)은 기본 파라미터 값으로 3을 사용하였다.

설정하여 경제충격이 발생하면 경제 전체의 생산성이 경제충격이 발생하지 않은 경우의 80%로 감소하는 상황을 고려하였다.

마지막으로 크고 부정적인 불확실성 경제충격으로 인해 신용대출에 큰 제약이 가해지는 상황을 고려하기 위해 대출제약조건의 강약을 조절하는 외생적 변수 ω를 50%로 설정하여 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려하지 않은 보통의 경우의 절반 다시 말해 인적자본의 절반을 최대로 대출을 허용하였다.

5.2 최적소비: MPC (Marginal Propensity to Consume)

도출된 모형의 해법에 대한 이론적 분석을 통해 얻은 주요 결과 중 하나는 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 경우$(\delta > 0)$ 다시 말해 신용대출에 대한 제약이 있는 경우에 금융자산에 대한 MPC가 더 이상 Merton 상수로 일정하지 않고 오히려 금융자산에 대한 함수로 주어지며 Merton 상수보다 더 크기 때문에 결과적으로 한 단위 금융자산의 감소에 대하여 소비를 더 크게 줄이고 대신 저축을 더 많이 하는 것이 최적이다.

실제로 수치적 분석을 통해 기본 파라미터 값을 사용하여 MPC에 대한 그림(Figure 2)을 그려보면 MPC의 이론적 분석의 결과대로 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 경우$(\delta > 0)$의 MPC가 경제충격을 고려하지 않은 경우$(\delta = 0)$보다 금융자산 w의 크기에 관계없이 항상 크다. 또한 경제충격을 고려한 경우의 MPC는 금융자산 w에 대하여 감소하고 오목한(Decreasing and Convex) 함수이다. 이는 금융자산을 적게 보유한 가난한 경제주체 일수록 금융자산을 많이 보유한 부유한 경제주체보다 큰 MPC를 갖게 되어 한 단위 금융자산의 감소에 대하여 소비를 더 크게 줄이고 저축을 더 많이 하는 것이 최적임을 의미한다.

5.3 최적저축: MPS (Marginal Propensity to Save)

MPC에 대한 이론적 분석과 수치적 분석에 따라 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 경우 한 단위 금융자산의 감소에 대하여 소비를 줄이고 대신 저축을 더 많이 하는 것이 최적임을 보였다. 이는

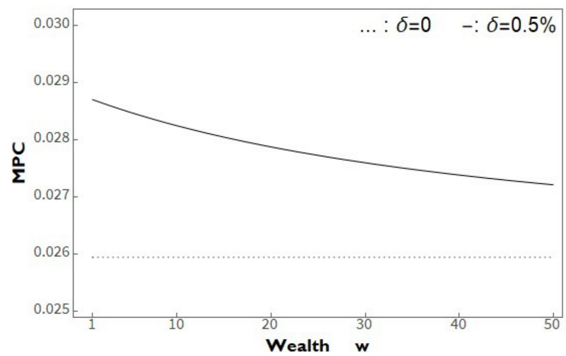

Figure 2: MPC(Marginal Propensity to Consume). 파라미터 값: r = 1%(무위험 이자율), μ =7%(위험 주식의 기대수이률), σ = 20%(위험 주식의 변동성), ϵ = 1(연간 노동소득), β = 4%(주관적 할인율), γ = 4(위험회피도), δ = 0.5%(크고 부정적인 불확실성 경제충격 빈도), k = 80%(크고 부정적인 불확실성 경제충격 파급효과), ω = 50%(대출제약조건의 강약). 요약: 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 경우$(\delta > 0)$의 MPC는 경제충격을 고려하지 않은 경우$(\delta = 0)$보다 금융자산 w의 크기에 관계없이 항상 크고 금융자산 w에 대하여 감소하고 오목한 함수이다.

한 단위 금융자산의 변하에 대하여 무위험 채권과 위험 주식에 자산을 배분하는 MPS에 대한 수치적 분석을 통해 좀 더 구체적으로 해석될 수 있다.

수치적 분석을 통해 기본 파라미터 값을 사용하여 MPS에 대한 그림(Figure 3)을 그려보면 MPS의 이론적 분석 결과대로 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 경우$(\delta > 0)$의 MPS 가 경제충격을 고려하지 않은 경우$(\delta = 0)$보다 금융자산 w의 크기에 관계없이 항상 작다. 따라서 한 단위 금융자산의 감소에 대하여 경제충격을 고려하는 경우 상대적으로 저축의

양을 덜 줄이는 것이 최적이다. 또한 경제충격을 고려한 경우의 MPS는 금융자산 w에 대하여 증가하는 볼록한 (Increasing and Concave) 함수이다. 이는 금융자산을 적게 보유한 가난한 경제주체 일수록 금융자산을 많이 보유한 부유한 경제주체보다 작은 MPS를 갖게 되어 한 단위 금융자산의 감소에 대하여 저축을 덜 줄이는 것이 최적임을 의미한다.

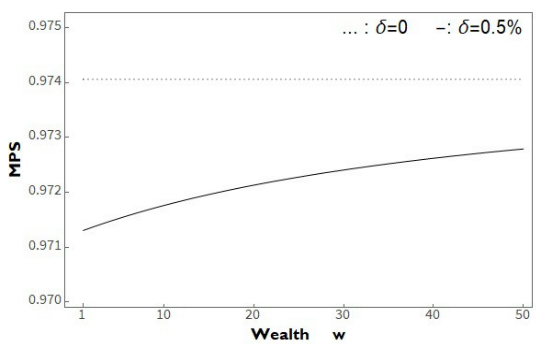

Figure 3: MPS(Marginal Propensity to Save). 파라미터 값: r = 1%(무위험 이자율), μ = 7%(위험주식의 기대수이률), σ = 20%(위험 주식의 변동성), ϵ = 1(연간 노동소득), β = 4%(주관적 할인율), σ = 4(위험회피도), δ = 0.5%(크고 부정적인 불확실성 경제충격 빈도), k = 80%(크고 부정적인 불확실성 경제충격 파급효과), ω = 50%(대출제약조건의 강약). 요약: 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 경우 $(\delta > 0)$의 MPS는 경제충격을 고려하지 않은 경우$(\delta = 0)$보다 금융자산 w의 크기에 관계없이 항상 작고 금융자산 w에 대하여 증가하고 볼록한 함수이다.

5.4 최적투자: MPI (Marginal Propensity to Invest)

MPI에 대한 이론적 분석 결과에 따르면 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 경우 그렇지 않은 경우보다 MPI가 커지기 때문에 한 단위 금융자산의 감소에 대하여 위험 주식에 대한 투자를 더 많이 줄이는 것이 최적이다.

실제로 수치적 분석을 통해 기본 파라미터 값을 사용하여 MPI에 대한 그림(Figure 4)을 그려보면 MPI의 이론적 분석 결과대로 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 경우$(\delta > 0)$의 MPI가 경제충격을 고려하지 않은 경우$(\delta = 0)$보다 금융자산 w의 크기에 관계없이 항상 크다. 또한 경제충격을 고려한 경우의 MPI는 금융자산 w에 대하여 감소하고 오목한 함수이다. 따라서 가난한 경제주체 일수록 부유한 경제주체보다 큰 MPI를 갖게 되어 한 단위 금융자산의 감소에 대하여 위험 주식에 대한 투자를 더 크게 줄이는 것이 최적이다.

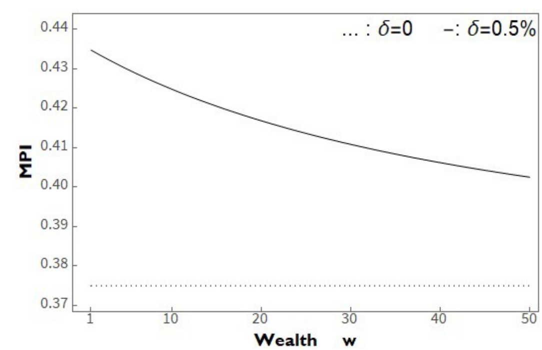

Figure 4: MPI(Marginal Propensity to Invest). 파라미터 값: r = 1%(무위험 이자율), μ = 7%(위험 주식의 기대수이률), σ = 20%(위험 주식의 변동성), ϵ= 1(연간 노동소득), β = 4%(주관적 할인율), γ = 4(위험회피도), δ = 0.5%(크고 부정적인 불확실성 경제충격 빈도), k = 80%(크고 부정적인 불확실성 경제충격 파급효과), ω= 50%(대출제약조건의 강약). 요약: 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 경우 $(\delta > 0)$의 MPI는 경제충격을 고려하지 않은 경우$(\delta = 0)$보다 금융자산 w의 크기에 관계없이 항상 크고 금융자산 w에 대하여 감소하고 오목한 함수이다.

5.5 최적 무위험 저축: MPS (Marginal Propensity to Save)

무위험 채권에 대한 저축만 고려하는 경우에 MPS의 이론적 분석 결과에 따르면 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 경우 그렇지 않은 경우보다 MPS가 작게 되어 한 단위 금융자산의 감소에 대하여 상대적으로 무위험 채권에 대한 저축의 양을 덜 줄이는 것이 최적이다.

수치적 분석을 통해 기본 파라미터 값을 사용하여 무위험 채권에 대한 저축만 고려하는 경우의 MPS에 대한 그림(Figure 5)을 그려보면 MPS의 이론적 분석 결과대로 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한

경우($\delta > 0$)의 MPS가 경제충격을 고려하지 않은 경우($\delta = 0$)보다 금융자산 w의 크기에 관계없이 항상 작다. 또한 경제충격을 고려한 경우의 MPS는 금융자산 w에 대하여 증가하는 볼록한 함수이다. 따라서 가난한 경제주체 일수록 부유한 경제주체보다 작은 MPS를 갖게 되어 한 단위 금융자산의 감소에 대하여 예비적 저축 동기를 갖고 무위험 채권에 대한 저축을 상대적으로 덜 줄이는 것이 최적이다.

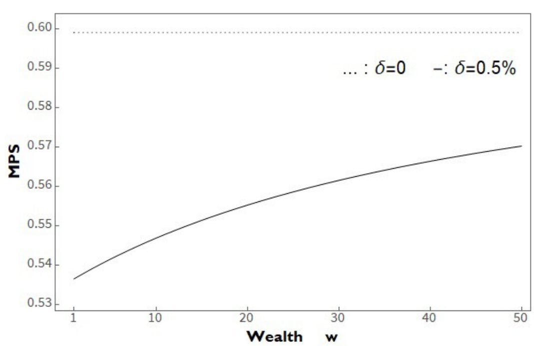

Figure 5: MPS(Marginal Propensity to Save). 파라미터 값: r = 1%(무위험 이자율), μ= 7%(위험주식의 기대수이률), σ= 20%(위험 주식의 변동성), ϵ = 1(연간 노동소득), β= 4%(주관적 할인율), γ = 4(위험회피도), δ= 0.5%(크고 부정적인 불확실성 경제충격 빈도), k = 80%(크고 부정적인 불확실성 경제충격 파급효과), ω= 50%(대출제약조건의 강약). 요약: 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 경우($\delta > 0$)의 MPS는 경제충격을 고려하지 않은 경우($\delta = 0$)보다 금융자산 w 의 크기에 관계없이 항상 작고 금융자산 w 에 대하여 증가하고 볼록한 함수이다.

5.6 최적자산배분

최적소비(MPS), 최적저축(MPS), 최적투자(MPI), 최적 무위험 저축(MPS)에 대한 이론적 분석과 수치적 분석 결과에 따르면 크고 부정적인 불확실성 경제충격이 존재할 때 대표 경제주체의 신용대출에 추가적인 제약이 가해지게 되면 한 단위 금융자산의 감소에 대하여 소비를 줄이고 위험 주식에 대한 투자를 줄이고 무위험 채권에 대한 저축을 늘리는 것이 최적이다. 또한 금융자산을 적게 보유한 가난한 경제주체 일수록 금융자산을 많이 보유한 부유한 경제주체보다 소비를 더 크게 줄이고 위험 주식에 대한 투자를 더 크게 줄이고 무위험 채권에 대한 저축을 더 많이 늘리는 것이 최적이다.

실제로 수치적 분석을 통해 기본 파라미터 값을 사용하여 최적소비, 최적투자, 최적저축에 대한 최적 자산배분을 총 자산 대비 비율로 그려보면(Figure 6) 최적자산배분의 이론적 분석 결과대로 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 경우($\delta > 0$) 그렇지 않은 경우($\delta > 0$)보다 금융자산 w의 크기에 관계없이 항상 소비를 더 줄이고 위험 주식에 대한 투자를 더 줄이고 무위험 채권에 대한 저축을 더 많이 늘린다. 특히 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 경우의 최적소비는 금융자산 w에 대하여 증가하는 볼록한 함수이다. 이는 Friedman의 항상소득가설이 이론적으로 예측하고 있는 일정한 소비패턴과 대조적으로 실제로 소비는 금융자산 w에 대하여 증가하는 볼록한 함수라는 실제 결과(Carroll and Kimball, 1996; Farhi and Panageas, 2007)와 일치한다. 또한 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 경우의 최적소비 패턴을 살펴보면 금융자산을 적게 보유한 가난한 경제주체 일수록 금융자산을 많이 보유한 부유한 경제주체보다 한 단위 금융자산의 감소에 대하여 소비를 더 크게 줄인다.

한편 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 경우의 최적투자 패턴은 투자 분야의 기존실증문헌에서 관찰되고 있는 다음의 실증적 결과를 추가적으로 지지한다. 구체적으로 기존의 Merton 투자 전략이 제안하고 있는 위험 투자에 비해 실증적으로 관찰되고 있는 실제 가구의 위험 투자양은 상당히 작다고 알려져 있다(Moderate Equity Holdings Puzzle; Gomes and Michaelides, 2005). 본 연구에서도 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 경우의 위험 주식에 대한 최적투자는 금융자산 w의 크기에 관계없이 경제충격을 고려하지 않은 Merton 투자 전략보다 위험 투자를 줄이는 것이 최적이다. 또한 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 경우의 최적투자 패턴은 금융자산 w에 대하여 증가하는 볼록한 함수이다. 이는 가난한 경제주체 일수록 부유한 경제주체보다

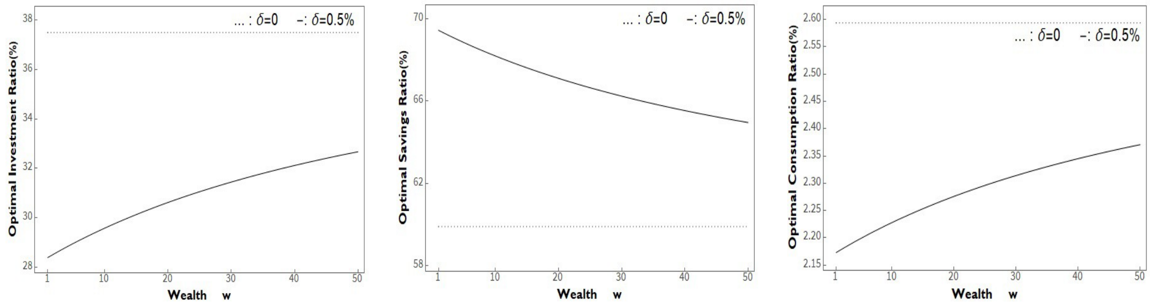

Figure 6: 최적자산배분(소비, 투자, 저축). 파라미터 값: r = 1%(무위험 이자율), μ = 7%(위험 주식의 기대수이률), σ = 20%(위험 주식의 변동성), ϵ = 1(연간 노동소득), β = 4%(주관적 할인율), γ = 4(위험 회피도), δ = 0.5%(크고 부정적인 불확실성 경제충격 빈도), k = 80%(크고 부정적인 불확실성 경제충격 파급효과), ω = 50%(대출제약조건의 강약). 요약: 최적자산배분의 이론적 분석 결과대로 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 경우($\delta > 0$) 그렇지 않은 경우($\delta = 0$)보다 금융자산 ω의 크기에 관계없이 항상 소비를 더 줄이고 위험 주식에 대한 투자를 더 줄이고 무위험 채권에 대한 저축을 더 많이 늘린다.

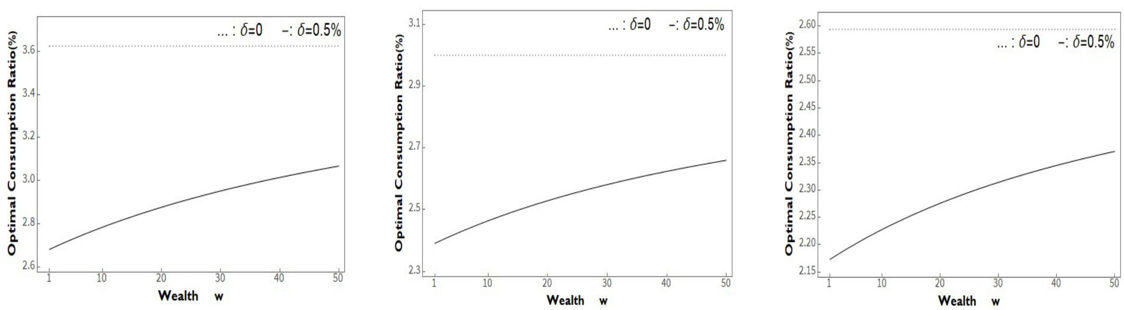

Figure 7: 위험회피도 변화(왼쪽: γ = 2, 중간: γ = 3, 오른쪽: γ = 4)에 따른 최적소비. 파라미터 값: r = 1%(무위험 이자율), μ = 7%(위험 주식의 기대수이률), σ = 20%(위험 주식의 변동성), ϵ = 1(연간 노동소득), β = 4%(주관적 할인율), δ = 0.5%(크고 부정적인 불확실성 경제충격 빈도), k = 80%(크고 부정적인 불확실성 경제충격 파급효과), ω = 50%(대출제약조건의 강약). 요약: 높은 위험회피성향을 가 진 경제주체일수록 낮은 위험회피성향을 가진 경제주체보다 크고 부정적인 불확실성 경제충격에 대하여 소비를 더 크게 줄인다.

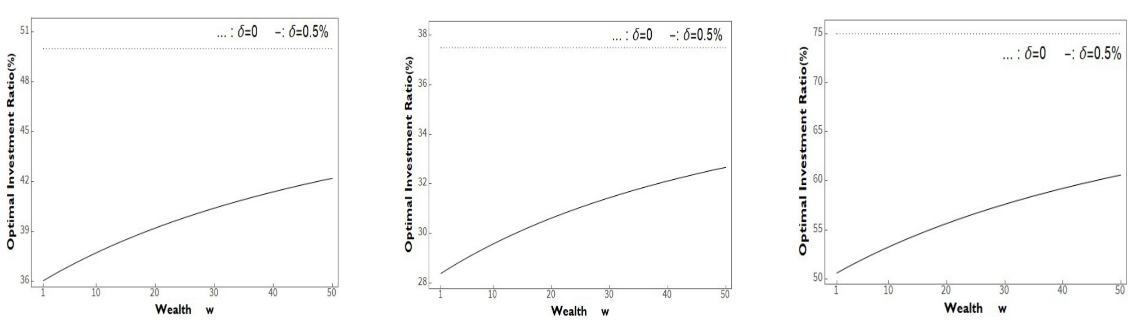

Figure 8: 위험회피도 변화(왼쪽: γ = 2, 중간: γ = 3, 오른쪽: γ = 4)에 따른 최적투자. 파라미터 값: r = 1%(무위험 이자율), μ = 7%(위험 주식의 기대수이률), σ = 20%(위험 주식의 변동성), ϵ = 1(연간 노동소득), β = 4%(주관적 할인율), δ = 0.5%(크고 부정적인 불확실성 경제충격 빈도), k = 80%(크고 부정적인 불확실성 경제충격 파급효과), ω = 50%(대출제약조건의 강약). 요약: 높은 위험회피성향을 가 진 경제주체일수록 낮은 위험회피성향을 가진 경제주체보다 크고 부정적인 불확실성 경제충격에 대하여 위험 주식에 대한 투자를 더 많이 줄인다.

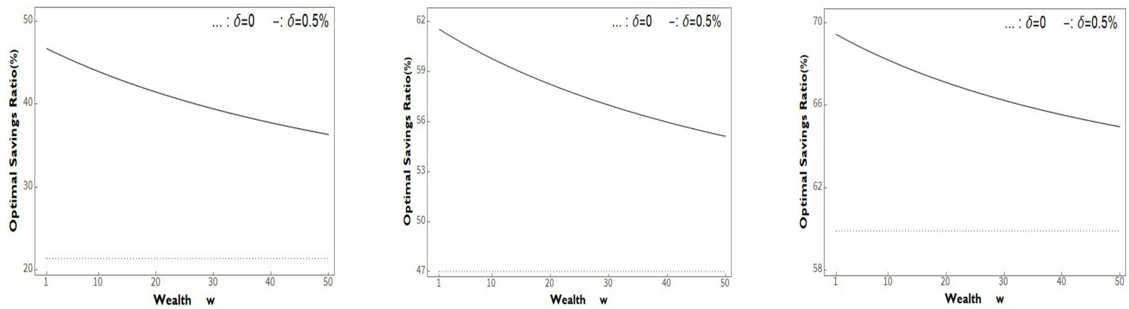

Figure 9: 위험회피도 변화(왼쪽: γ = 2, 중간: γ = 3, 오른쪽: γ = 4)에 따른 최적저축. 파라미터 값: r = 1%(무위험 이자율), μ = 7%(위험 주식의 기대수이률), σ = 20%(위험 주식의 변동성), ϵ = 1(연간 노동소득), β = 4%(주관적 할인율), δ = 0.5%(크고 부정적인 불확실성 경제충격 빈도), k = 80%(크고 부정적인 불확실성 경제충격 파급효과), ω= 50%(대출제약조건의 강약). 요약: 높은 위험회피성향을 가진 경제주체일수록 낮은 위험회피성향을 가진 경제주체보다 크고 부정적인 불확실성 경제충격에 대하여 무위험 채권에 대한 저축을 더 많이 늘린다.

한 단위 금융자산의 감소에 대하여 예비적 저축 동기를 갖고 위험 주식에 대한 투자를 크게 줄이는 것으로 해석될 수 있으며 실증문헌(Deaton, 1991; Carroll, 1992; Carroll and Samwick, 1997)에서 관찰되고 있는 예비적 저축 동기가 위험 투자를 크게 줄이는 주된 요인이다.

크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 경우 그렇지 않은 경우보다 예비적 저축 동기를 갖고 소비를 줄이고 위험 주식에 대한 투자를 줄이게 되면 결과적으로 무위험 채권에 대한 저축을 늘리는 결과를 가져온다. 실제로 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 경우의 무위험 채권에 대한 최적저축 패턴을 살펴보면 금융자산 w의 크기에 관계없이 Friedman의 항상소득가설이 예측하고 있는 최적저축의 양보다 항상 크다. 또한 최적저축은 금융자산 w에 대하여 감소하는 오목한 함수이다. 이는 금융자산을 적게 보유한 가난한 경제주체 일수록 부유한 경제주체보다 크고 부정적인 불확실성 경제충격으로 인한 신용대출 제약조건의 영향을 더 많이 받기 때문에 예비적 저축 동기의 일환으로 한 단위 금융자산의 감소에 대하여 저축을 더 많이 늘리는 것이 최적임을 의미한다.

마지막으로 위험회피도 변화에 따른 최적자산배분의 민감도 분석 결과(Figure 7, Figure 8, Figure 9)에 따르면 크고 부정적인 불확실성 경제충격에 대하여 위험회피성향이 큰 경제주체일 수록 위험회피성향이 작은 경제주체보다 소비를 더 크게 줄이고 위험 주식에 대한 투자를 더 많이 줄이며 결과적으로 무위험 채권에 대한 저축을 더 많이 늘린다. 이는 위험회피도가 갖는 다음의 경제적 매커니즘을 통해 이해될 수 있다. 먼저 전통적인 Merton 투자 전략에 따르면 위험회피도와 위험 주식 투자는 반비례 관계에 있다고 알려져 있다. 또한 Kimball(1990)은 위험회피도가 보험에 대한 선호도와 밀접한 연관이 있다는 것을 보였다. 따라서 위험회피성향이 큰 경제주체 일수록 크고 부정적인 불확실성 경제충격에 사전적으로 대비하기 위한 보험 전략의 일환으로 위험 주식 보다는 무위험 채권에 대한 선호도가 클 수 있고 예비적 저축 동기를 갖고 소비를 더 크게 줄이고 상대적으로 저축을 더 많이 늘릴 수 있다.[13]

13) 예를 들어 Cocco et al.(2005), Jang et al.(2019) 등에 따르면 위험회피도가 클 수록 한 단위 소득 위험에 대하여 예비적 저축 동기를 갖고 위험 자산에 대한 투자를 줄이고 무위험 자산에 대한 저축을 늘려 위험에 효과적으로 대비할 수 있다.

[6] 강건성 검증

금융시장의 투자기회집합이 일정하고 크고 부정적인 불확실성 경제충격과 관련한 모수들이 모두 상수라는 비현실적인 가정을 극복하기 위해 기하브라운운동을 통해 경제충격 사건의 발생 빈도를 결정하는 모수 δ가 다음과 같은 시변성을 갖는다고 가정한다:

$$\begin{aligned} d\delta(t) &= -\delta\delta(t)dt + \sigma^{\delta} dZ^{\delta}(t), \\ \delta_0 &= \delta > 0, \end{aligned} \qquad (26)$$

여기서 $\sigma^{\delta} > 0$은 δ의 변동성, $Z^{\delta}(t)$는 금융시장 위 위험 주식과 $\rho \in [-1, 1]$의 상관관계를 갖는 브라운운동을 나타낸다. 시변성을 갖는 δ에 따라 식 (3)과 유사하게 Rietz(1988)의 "A Low- Probability, Depression-Like" 위험을 다음과 같이 고려할 수 있다:14)

$$\begin{aligned} P\{\tau \le t\} &= \int_0^t \delta_s ds \\ &= \int_0^t \delta e^{\left(-\delta - \frac{(\sigma^{\delta})^2}{2}\right)s + \sigma^{\delta} Z^{\delta}(s)} ds. \end{aligned} \qquad (27)$$

크고 부정적인 불확실성 경제충격의 시변성을 고려한 경우에 ϵ의 노동소득을 받고 있는 경제주체의 인적자본의 현재가치는 시변성을 고려하지 않은 경우의 현재가치 식 (4)과 동일하고 경제주체의 가치함수는 다음과 같다:15)

$$V(w) \equiv \max_{(c,\pi)} E^Q \left[\int_0^{\infty} e^{-(\beta+\delta)t} \frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} dt \right] \qquad (28)$$

여기서 Q는 식 (30)에서 주어진 새로운 측도이다. 새로운 측도 Q에서 t 시점에서의 금융자산 $W(t)$는 식 (7)과 유사하게 다음의 확률과정을 따르며16)

$$\begin{aligned} dW(t) &= \{rW(t) - c(t) + \epsilon\}dt \\ &\quad + \pi(t)\sigma\{dZ^Q(t) + (\theta + \rho\sigma^{\delta})dt\} \end{aligned} \qquad (29)$$

식 (8)에서 주어진 대출제약조건을 만족한다.

크고 부정적인 불확실성 경제충격 사건의 발생 빈도를 결정하는 모수 δ가 식 (26)에서 주어진 기하브라운운동을 따라 시변성을 갖고 금융시장의 위험 주식과 ρ의 상관관계를 가지게 되면 시변성을 갖지 않고 상관관계를 고려하지 않은 경우와 대출제약은 식 (29)과 같이 동일하나 식 (6) 과 식 (28)에서 주어져 있는 가치함수와 식 (7)과 식 (29)에서 주어져 있는 t 시점에서의 금융자산 $W(t)$의 확률과정이 다소 차이를 보인다.

먼저 가치함수의 측면에서 크고 부정적인 불확실성 경제충격에 노출된 대표 경제주체의 미래 효용을 현재

---

14) 만약 δ의 시변성을 고려하지 않는 경우($\sigma^{\delta} = 0$)에 식 (27)은

$$\begin{aligned} P\{\tau \le t\} &= \int_0^t \delta e^{-\delta s} ds \\ &= -e^{-\delta s}\Big|_0^t \\ &= 1 - e^{-\delta t} \end{aligned}$$

가 되어 식 (3)을 특례(Special Case)로 갖는다.

15) 자세한 유도과정은 Appendix를 참조한다.

16) Girsanov 이론을 적용하면 새로운 측도 Q에서 다음의 브라운 운동을 정의할 수 있다:

$$Z^Q(t) \equiv Z(t) - \rho\sigma^{\delta} t.$$

그러면 식 (7)에 주어져 있는 확률과정을 Sharpe Ratio θ와 위에서 정의된 새로운 측도 Q에서의 브라운 운동 $Z^Q(t)$를 이용하여 재서술하면 식 (29)를 얻는다.

가치로 할인할 때 시변성을 고려하게 되면 할인율이 β에서 $\beta+\delta$로 증가하는 것을 확인할 수 있다. 이는 시변성이 고려되지 않은 경우와 비교했을 때 시변성으로 인한 추가적인 불확실성이 미래 효용의 할인율에 반영된 것으로 해석될 수 있다.

또한 t 시점에서의 금융자산 $W(t)$의 확률과정의 관점에서 시변성을 고려하게 되면 그렇지 않은 경우와 비교했을 때 금융시장의 Shapre Ratio가 시변성의 정도를 나타내는 변동성 모수 σ^{δ}와 경제충격과 금융시장의 상관관계 ρ에 의해서 기존의 θ에서 $\theta+\rho\sigma^{\delta}$로 조정되는 것을 확인할 수 있다. 따라서 시변성과 상관관계를 고려한 경우에 대표 경제주체의 최적자산배분 전략은 결과적 으로 그렇지 않은 경우에 주관적 할인율을 증가시키거나 Sharpe Ratio를 증가 또는 감소시켜서 얻게 되는 최적 전략과 동일하다.

크고 부정적인 불확실성 경제충격이 금융시장 전반에 미칠 파급효과를 감안할 때 경제충격과 금융시장 간의 상관관계를 양수로 가정하면$(\rho>0)$ 경제충격의 시변성이 더 클수록 다시 말해 시변성의 변동성 σ^{δ}가 커질수록 금융시장의 한 단위 위험에 대한 보상 또한 커지게 되어 Sharpe Ratio가 $\rho\sigma^{\delta}$ 만큼 증가하게 된다. 따라서 경제충격의 시변성과 금융시장과의 상관관계는 경제충격에 노출된 경제주체가 더 큰 위험 프리미엄을 대가로 위험자산 투자 비중을 더욱 높이는 결과를 가져올 수 있어 현재 위험자산에 대한 개인투자자들의 과도한 선호 현상을 부분적으로 설명할 수 있다. 그러나 앞서 강조했듯이 이러한 위험자산에 대한 과도한 투자는 경제 불황기 때 주식 시장 붕괴 등으로 인해 큰 금적적인 손실을 초래할 가능성을 내포하고 있기 때문에 본 연구의 결과에 따라 예비적 저축 동기를 갖고 위험자산과 무위험자산 간 최적자산 배분을 늘 염두할 필요가 있다.

[7] 결 론

본 연구에서는 최근 COVID-19 글로벌 판데믹을 비롯하여 최근 10년 동안 국내외 사회 경제가 경험한 극단적 재난 사건이 야기할 수 있는 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려하여 대표 경제주체(개인투자자, 펀드운용주체 등)의 최적자산배분 전략을 도출하였다. 구체적으로 Rietz(1988)의 극단적 재난 위험 가설을 따라 포아송 점프를 통해 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 경제 전체의 생산성에 반영함으로써 결과적으로 경제주체 노동소득의 불확실성으로 인해 신용시장에서 가계금융 전반의 대출에 큰 제약이 가해지는 상황을 고려하였다. 신고전주의 경제학의 효용함수 극대화 프레임에서 CRRA 효용함수를 갖는 대표 경제주체의 최적자산해법을 도출할 수 있는 정량적 모형을 개발하고 Convex-Duality 방법론을 활용하여 모형의 해법을 닫힌해의 형태로 도출하였다.

도출된 모형의 해법을 토대로 최적소비, 최적저축 및 최적투자 전략들에 대한 이론적 분석 및 수치적 분석을 수행한 결과 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 경우에 그렇지 않은 경우보다 소비를 줄이고 위험 주식에 대한 투자를 줄이고 무위험 채권에 대한 저축을 늘리는 것이 경제주체 최적자산배분 전략이었다. 특히 금융자산을 적게 보유한 가난한 경제주체일수록 부유한 경제주체보다 크고 부정적인 불확실성 경제충격으로 인한 신용대출 제약조건의 영향을 더 많이 받기 때문에 예비적 저축 동기의 일환으로 한 단위 금융자산의 감소에 대하여 저축을 더 많이 늘리는 것이 최적이었다.

[8] Appendix

식 (4)에서 주어진 경제주체의 인적자본의 현재가치 유도 과정.

$$
\begin{aligned}
&E\Big[\int_0^{\tau} e^{-rt}\epsilon dt + \int_{\tau}^{\infty} e^{-rt}k\epsilon dt\Big] \\
&= \int_0^{\infty} \delta e^{-\delta s}\int_0^{s} e^{-rt}\epsilon dtds + \int_0^{\infty}\delta e^{-\delta s}\int_s^{\infty} e^{-rt}k\epsilon dtds \\
&= \int_0^{\infty} e^{-rt}\epsilon\int_t^{\infty}\delta e^{-\delta s}dsdt + \int_0^{\infty} e^{-rt}k\epsilon\int_0^{t}\delta e^{-\delta s}dsdt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-(r+\delta)t}\epsilon dt + \int_0^{\infty} e^{-rt}k\epsilon(1-e^{-\delta t})dt \\
&= \frac{\epsilon}{r+\delta} + \frac{k\epsilon}{r} - \frac{k\epsilon}{r+\delta} \\
&= \frac{\epsilon}{r+\delta} + k\epsilon\frac{\delta}{r(r+\delta)} \\
&= \frac{\epsilon}{r+\delta}\Big(1+\frac{\delta k}{r}\Big).
\end{aligned}
$$

크고 부정적인 불확실성 경제충격의 시변성을 고려한 경우에 경제주체의 인적자본의 현재가치 유도 과정.

$$
\begin{aligned}
&E\Big[\int_0^{\tau} e^{-rt}\epsilon dt + \int_{\tau}^{\infty} e^{-rt}k\epsilon dt\Big] \\
&= E\Big[\int_0^{\infty} \delta e^{\left(-\delta-\frac{(\sigma^\delta)^2}{2}\right)s+\sigma^\delta Z^\delta(s)}\int_0^{s} e^{-rt}\epsilon dtds + \int_0^{\infty}\delta e^{\left(-\delta-\frac{(\sigma^\delta)^2}{2}\right)s+\sigma^\delta Z^\delta(s)}\int_s^{\infty} e^{-rt}k\epsilon dtds\Big] \\
&= E\Big[\int_0^{\infty} e^{-rt}\epsilon\int_t^{\infty}\delta e^{\left(-\delta-\frac{(\sigma^\delta)^2}{2}\right)s+\sigma^\delta Z^\delta(s)}dsdt + \int_0^{\infty} e^{-rt}k\epsilon\int_0^{t}\delta e^{\left(-\delta-\frac{(\sigma^\delta)^2}{2}\right)s+\sigma^\delta Z^\delta(s)}dsdt\Big] \\
&= E^{Q}\Big[\int_0^{\infty} e^{-rt}\epsilon\int_t^{\infty}\delta e^{-\delta s}dsdt + \int_0^{\infty} e^{-rt}k\epsilon\int_0^{t}\delta e^{-\delta s}dsdt\Big] \\
&= \int_0^{\infty} e^{-(r+\delta)t}\epsilon dt + \int_0^{\infty} e^{-rt}k\epsilon(1-e^{-\delta t})dt \\
&= \frac{\epsilon}{r+\delta} + \frac{k\epsilon}{r} - \frac{k\epsilon}{r+\delta} \\
&= \frac{\epsilon}{r+\delta} + k\epsilon\frac{\delta}{r(r+\delta)} \\
&= \frac{\epsilon}{r+\delta}\Big(1+\frac{\delta k}{r}\Big),
\end{aligned}
$$

여기서 Q는 현실측도(Physical Measure)와 다음과 같은 관계를 갖는 새로운 측도(New Measure)이다:

$$P^Q(A) \equiv \int_A e^{\sigma^\delta Z^\delta(t)(\omega) - \frac{(\sigma^\delta)^2}{2} t(\omega)} dP(\omega). \tag{30}$$

크고 부정적인 불확실성 경제충격의 시변성을 고려한 경우의 경제주체의 가치함수 유도 과정.

$$\begin{aligned}
V(w) &\equiv \max_{(c,\pi)} E\Big[\int_0^\tau e^{-\beta t}\frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}dt\Big] \\
&= E\Big[\int_0^\infty \delta e^{\left(-\delta - \frac{(\sigma^\delta)^2}{2}\right)s + \sigma^\delta Z^\delta(s)} \int_0^s e^{-\beta t}\frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}dtds\Big] \\
&= E\Big[\int_0^\infty e^{-\beta t}\frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\int_t^\infty \delta e^{\left(-\delta - \frac{(\sigma^\delta)^2}{2}\right)s + \sigma^\delta Z^\delta(s)} dsdt\Big] \\
&= E^Q\Big[\int_0^\infty e^{-\beta t}\frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\int_t^\infty \delta e^{-\delta s} dsdt\Big] \\
&= E^Q\Big[\int_0^\infty e^{-(\beta+\delta)t}\frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}dt\Big],
\end{aligned}$$

여기서 Q는 식 (30)에서 주어진 새로운 측도이다.

참 고 문 헌

Acemoglu, D., R. Shimer. 1998. Efficient Unemployment Insurance. Working Paper.

Babbel, D. F., C. B. Merrill. 2007. Rational Decumulation. Working Paper.

Bensoussan, A., B. G. Jang, S. Park. 2016. Unemployment Risks and Optimal Retirement in an Incomplete Market. Operations Research. 64, 1015-1032.

Bodie, Z., R. C. Merton, W. F. Samuelson. 1992. Labor Supply Flexibility and Portfolio Choice in a Life Cycle Model. Journal of Economic Dynamics and Control. 28, 1115-1148.

Bollen, N. P. B., S. F. Gray, R. E. Whaley. 2000. Regime-Switching in Foreign Exchange Rates: Evidence from Currency Option Prices. Journal of Econometrics. 94, 239-276.

Campbell, J. Y. 1999. Asset Prices, Consumption, and the Business Cycle. Handbook of Macroeconomics, vol. 1, chap. 19, North- Holland, Amsterdam.

Carroll, C. D. 1992. The Buffer-Stock Theory of Saving: Some Macroeconomic Evidence. Brookings Papers on Economic Activity. 2, 61-156.

Carroll, C. D., M. S. Kimball. 1996. On the Concavity of the Consumption Function. Econometrica. 64, 981-992.

Carroll, C. D., A. A. Samwick. 1997. The Nature of Precautionary Wealth. Journal of Monetary Economics. 40, 41-71.

Cocco, J. F., F. J. Gomes, P. J. Maenhout. 2005. Consumption and Portfolio Choice over the Life Cycle. Review of Financial Studies. 18, 491-533.

Cox, J. C., E. Jonathan, Jr. Ingersoll, S. A. Ross. 1985. An Intertemporal General Equilbrium Model of Asset Prices. Econometrica. 53, 363-384.

Dai, M., P. Li, H. Liu, Y. Wang. 2016. Portfolio Choice with Market Closure and Impli- cations for Liquidity Premia. Management Science. 62, 368-386.

Davidoff, T., R. B. Jeffrey, A. D. Peter. 2005. Annuities and Individual Welfare. American Economic Review. 95, 1573-1590.

Deaton, A. 1991. Saving and Liquidity Constraints. Econometrica. 59, 1221-1248.

Dybvig, P. H., H. Liu. 2010. Lifetime Consumption and Investment: Retirement and Constrained Borrowing. Journal of Economic Theory. 145, 885-907.

Farhi, E., S. Panageas. 2007. Saving and Investing for Early Retirement: A Theoretical Analysis. Journal of Financial Economics. 83, 87-121.

Friedman, M. 1957. A Theory of the Consumption Function. Princeton University Press, Princeton.

Gomes, F., A. Michaelides. 2005. Optimal Life-Cycle Asset Allocation: Understanding the Empirical Evidence. Journal of Finance. 60, 869-904.

Hamilton, J. D. 1988. Rational-Expectations Econometric Analysis of Changes in Regime. Journal of Economic Dynamics and Control. 12, 385-423.

Hansen, G. D., A. Imrohoroglu. 1992. The Role of Unemployment Insurance in an Economy with Liquidity Constraints and Moral

Hazard. Journal of Political Economy. 100, 118-142.

Heston, S. L. 1993. A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. Review of Financial Studies. 6, 327-343.

Jang, B. G., H. K. Koo, H. Liu, M. Loewenstein. 2007. Liquidity Premia and Transaction Costs. Journal of Finance. 62, 2329-2366.

Jang, B. G., H. K. Koo, S. Park. 2019. Optimal Consumption and Investment with Insurer Default Risk. Insurance: Mathematics and Economics. 88, 44-56.

Jang, B. G., S. Park, Y. Rhee. 2013. Optimal Retirement with Unemployment Risks. Journal of Banking & Finance. 37, 3585-3604.

Jang, B. G., S. Park, H. Zhao. 2020. Optimal Retirement with Borrowing Constraints and Forced Unmployment Risk. Insurance: Mathematics and Economics. 94, 25-39.

Kim, M. H., S. Park, J. M. Yoon. 2020. Industry Portfolio Allocation with Asymmetric Correlations. European Journal of Finance. Forthcoming.

Kimball, M. 1990. Precautionary Saving in the Small and in the Large. Econometrica. 58,53-73.

Kou, S. G. 2002. A Jump-Diffusion Model for Option Pricing. Management Science. 48, 1086-1101.

Kou, S. G., Yu, C., Zhong, H. 2017. Jumps in Equity Index Returns Before and During the Recent Financial Crisis: A Bayesian Analysis. Management Science. 63, 998-1010.

Lopes, P., A. Michaelides. 2007. Rare Events and Annuity Market Participation. Finance Research Letters. 4, 82-91.

Markowitz, H. M. 1952. Portfolio Selection. Journal of Finance. 7, 77-91.

Merton, R. C. 1969. Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case. Review of Economics and Statistics. 51, 247-257.

Merton, R. C. 1971. Optimal Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model. Journal of Economic Theory. 3, 373-413.

Milne, A. 2020. A Critical Covid 19 Economic Policy Tool: Retrospective Insurance. SSRN Working Paper.

Park, S. 2015. A Generalization of Yaari's Result on Annuitization with Optimal Retirement. Economics Letters. 137, 17-20.

Park, S. 2020. Verification Theorems for Models of Optimal Consumption and Investment with Annuitization. Mathematical Social Sciences. 103, 36-44.

Rietz, T. A. 1988. The Equity Risk Premium. Journal of Monetary Economics. 22, 117-131.

Schwert, G. W. 1989. Why Does Stock Market Volatility Change over Time? Journal of Finance. 5, 1115-1153.

Yaari, M. E. 1965. Uncertain Lifetime, Life Insurance and the Theory of the Consumer. Review of Economic Studies. 32, 137-150.

Optimal Asset Allocation Strategy with a Large, Negative Uncertainty Economic Shock

Seyoung Park* (Nottingham University Business School)

Abstract

This paper derives the optimal asset allocation strategy for a representative economic agent (individual investor, fund manager etc.) with a large, negative uncertainty economic shock caused by the recent COVID-19 global pandemic that would have significant repercussions on the domestic/international socio-economic system in the post-coronavirus period. Specifically, the paper models the large, negative uncertainty economic shock by following Rietz's (1988) rare disaster risk hypothesis and develops a quantitative model which can derive the optimal asset allocation solution of the representative agent who exhibits the CRRA (constant relative risk aversion) utility function within the utility maximizing framework. According to the theoretical and numerical analysis of the optimal consumption, optimal savings, and optimal investment strategies, the agent's optimal asset allocation strategy with the large, negative uncertainty economic shock is to consume less, invest less in the risky stock, and save more in the risk-free bond than without the economic shock. Various theoretical and numerical results obtained from this paper which can consider extreme scenarios would contribute not only to the advance of asset management and risk management in the mid- and long-term of the post-coronavirus period, but also to the innovation of individual savings.

Key words : *Large Negative Uncertainty Economic Shock, Optimal Asset Allocation, Risk Management, Borrowing Constraint*

Article history : Received 5 August 2020, Revised 20 September 2020, Accepted 6 October 2020

JEL Classification : D15, D58, G11, G12

* Nottingham University Business School, University of Nottingham, E-mail: seyoung.park@nottingham.ac.uk