



이표채 평균-분산 최적화 모형과 KTB 국고채 포트폴리오*

이 상 헌** · 기 호 삼*** · 최 건 호****

Abstract

본 연구의 목적은 무이표채 포트폴리오 최적화 모형을 이표채 포트폴리오 모형으로 확장한 후 목표 듀레이션 제약 하에서 KTB 국고채의 효율적 포트폴리오를 구축하는 것이다. 실제 발행 및 거래되는 국고채는 6개월 이표채이므로 현실에 부합하는 분석을 위해 이표채 모형이 필요하다. 본 연구는 기존의 무이표채 평균-분산 최적화 문제에 이표채는 무이표채의 포트폴리오라는 무차익거래 조건을 현금흐름 제약식의 형태로 도입하였다. 2006년 1월부터 2020년 12월까지의 우리나라 국고채 수익률 기간 구조를 이용한 실증분석 결과를 요약하면 다음과 같다. 첫째, 듀레이션 제약이 없을 경우 이표채와 무이표채 포트폴리오는 만기 분산 및 시간에 따른 배분 비중의 변화 측면에서 유사한 모습을 나타냈다. 둘째, 듀레이션 제약이 있을 경우 이표채 포트폴리오의 배분 비중은 듀레이션의 영향으로 인해 무이표채의 경우와 다소 차이가 있었다. 셋째, 포트폴리오 구성 만기의 선택 또는 스트립 채권의 도입은 만기간 배분 비중의 대체를 발생시켰다. 넷째, 기관 투자자 입장에서 볼 때 채권 포트폴리오의 투자비중의 횡단면적인 만기 집중과 시계열적인 급격한 변화를 완화할 필요가 있었다. 본 연구의 실무적 시사점은 목표 듀레이션을 설정한 금융기관의 적극적 자산배분은 이표채 포트폴리오 모형으로 분석하는 것이 적합하며 본 연구가 실무적 적용이 용이하고 다양한 형태로 확장 가능한 방법론을 제시하였다는 점이다.

[1] 서론

본 연구는 Caldeira *et al.* (2016)에서 제시된 무이표채 포트폴리오 최적화 모형을 이표채 분석 모형으로 확장한 후 KTB 국고채의 효율적 포트폴리오를 구축하고 그 특성을 무이표채의 경우와 비교 및 분석한다. 이표

* 본 논문은 2021년 상반기 펀드평가3사(한국펀드평가, FnGuide, KG제로인)의 성균관대학교 자산운용연구센터(CAPM) 연구비 지원으로 수행되었습니다.

핵심 단어: 이표채, 평균-분산 최적화, 샤프 비율, 분산 효과, Dynamic Nelson-Siegel 모형

JEL 분류기호: G17, E43, C53

** 제1저자: NH농협은행 리스크관리부, E-mail: shlee725@gmail.com

*** KB국민은행 자본시장부, E-mail: hosamki@gmail.com

**** 교신저자: 동덕여자대학교 경제학과 조교수, E-mail: geonhochoi@dongduk.ac.kr

채 포트폴리오 최적화 모형이 필요한 이유는 실제 발행되어 거래 및 유통되는 국고채가 주기적인 이표를 지급하는 이표채이므로 현실에 부합되는 분석은 이표채 모형을 필요로 하기 때문이다. 이를 위해 본 연구에서 제안하는 이표채 모형은 기존의 평균-분산 무이표채 포트폴리오 최적화 문제에 이표채는 무이표채의 포트폴리오라는 무차익거래 조건을 제약식으로 도입한 간소화된 형태를 가진다. 제안 모형을 이용한 실증 분석의 초점은 목표 듀레이션 제약이 주어진 경우의 이표채 포트폴리오 최적화이다. 목표 듀레이션을 강조하는 이유는 은행 등 금융기관이나 국민연금 같은 연기금의 채권 포트폴리오는 내부적인 목표 듀레이션을 기반으로 하기 때문이다.

채권 포트폴리오와 관련된 연구는 주식 포트폴리오나 이자율 기간 구조 모형 연구에 비해 양적으로 적은 편이지만 지속적으로 연구 결과가 발표되고 있다. 초기의 연구로써 Korn and Koziol (2006)은 Vasicek 모형을 이용하여 채권 포트폴리오 선택 문제를 다루었다. Thornton and Valente (2012)는 초과수익률 회귀분석을 통해 채권 포트폴리오 최적화를 분석하였다. Della Corte *et al.* (2008) 채권 포트폴리오 분석 과정에서 거래비용의 중요성을 강조하였다. 특히 다양한 이자율 기간 구조 모형하에서의 채권 포트폴리오 최적화 문제를 다룬 Puhle (2008)은 HJM (1992), Vasicek (1977), Hull-White (1994) 모형 등으로 그 범위를 확장하였다. 그러나 이들 연구는 이론적 측면에는 충실하지만 실무적인 시사점을 도출하기에는 다소 제한적인 측면이 있다.

보다 실무적인 채권 포트폴리오 최적화와 관련된 대표적인 연구로써 Caldeira *et al.* (2016)은 Dynamic Nelson-Siegel 모형(Diebold and Li; 2006)의 추정 과정에서 도출되는 상태 변수를 이용한 무이표채권의 기대수익률과 공분산을 이용하여 무이표채 평균-분산 최적화 포트폴리오를 구축하였다. 이들의 연구에 따르면 모형에 기반 전략이 전통적인 투자전략의 성과보다 위험조정대비 높은 성과를 나타냈다. 더 나아가 Schnorrenberger and Moura (2017)는 Diebold *et al.* (2006)의 거시 요인 확장

DNS 모형을 Caldeira *et al.* (2016)의 방법론에 적용하여 채권 포트폴리오 최적화 모형을 구축하였고 브라질의 국채 수익률 곡선을 대상으로 거시경제 요인을 반영할 경우 투자성과의 개선이 있음을 보여주었다. 그러나 위 연구들은 무이표채 포트폴리오 최적화에 해당하므로 실제 전략적 자산배분의 대상이 되는 이표채를 분석하는 데에 한계가 있다. 국내의 경우에도 이상현·김명직(2019)은 Caldeira *et al.* (2016) 방법론을 이용하여 우리나라 국고채의 최적 포트폴리오를 도출하였으나 역시 무이표채 포트폴리오라는 한계를 가진다. 이와 같이 주로 이표채가 투자대상인 시장 환경에 적합한 포트폴리오 모형이 필요한 상황에서 Deguest *et al.* (2018)은 이표채 포트폴리오 최적화 모형을 제시하였다. 그러나 이 모형은 이론적으로 다소 복잡한 이표채 확률 과정을 가정하고 자료로써 개별 채권을 모두 사용한다는 점에서 모형 구축과 자료 처리의 난이도가 매우 높다.

본 연구는 모형 추정과 자료 처리가 용이한 이표채 포트폴리오 최적화 모형을 제시하기 위하여 Caldeira *et al.* (2016)의 무이표채 평균-분산 포트폴리오 모형을 이표채 분석이 가능하도록 확장한 대안적 모형을 제시하고 우리나라 국고채를 대상으로 실증분석을 하였다. 본 연구의 제안 모형은 Deguest *et al.* (2018)과 달리 수익률 곡선 외에 추가적인 자료 처리 및 복잡한 확률 과정에 대한 추정 과정이 없고 평균-분산 포트폴리오 최적화 문제에 이표채 비중을 산출하기 위한 제약조건을 도입한 상대적으로 간소화된 형태를 가진다. 이는 이표채인 국고채의 특성이 충분히 반영되고 실무적으로 모형 적용이 용이하다는 점에서 의의를 가진다고 판단된다. 즉 본 연구의 차별성은 은행 및 보험사와 같은 금융기관이나 국민연금과 같은 연기금 등에서 실무적으로 적용이 용이한 이표채 포트폴리오 모형을 제시하고 다양한 확장 방법을 설명하였다는 점이다.

2006년 1월부터 2020년 12월까지의 우리나라 국고채 수익률 기간 구조를 이용한 실증분석 결과를 요약하면 다음과 같다. 첫째, 듀레이션 제약이 없는 경우 이표채와 무이표채 포트폴리오는 만기 분산 및



시간에 따른 배분 비중의 변화 측면에서 유사하였다. 둘째, 듀레이션 제약이 있을 경우 이표채 포트폴리오의 배분 비중은 이표채의 듀레이션의 영향으로 무이표채의 경우와 다소 차이가 있었다. 셋째, 포트폴리오 구성 만기의 선택 또는 스트립 채권의 도입은 만기간 배분 비중의 대체를 발생시켰다. 넷째, 기관 투자자 입장에서 볼 때 채권 포트폴리오의 횡단면적 만기 집중 및 시계열적 급격한 비중 변화를 완화하기 위한 제약조건이 필요하였다.

이후 본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장은 기존 모형인 무이표 채권의 포트폴리오 최적화 모형을 제시한 Caldeira *et al.* (2016)의 방법론을 설명하고 본 연구에서 제안하는 이표채 포트폴리오 최적화 모형을 설명한다. 3장은 이표채 포트폴리오의 투자성과에 관한 실증분석 결과를 다룬다. 4장은 실증분석 결과에 대한 안정성(robustness) 검토와 추가적인 확장 분석 결과를 제시한다. 5장에서는 연구결과를 요약하고 결론 및 시사점과 향후 개선방안을 기술한다.

[2] 방법론

2.1 Dynamic Nelson-Siegel 모형

Diebold and Li (2006) 및 Diebold *et al.* (2006)의 DNS (Dynamic Nelson-Siegel) 모형은 3개의 미관측 요인(수준, 기울기, 곡도)의 확률 과정을 나타내는 상태방정식 그리고 미관측 요인과 관측되는 현물 수익률(spot rate)간의 관계를 나타내는 관측방정식으로 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{pmatrix} s_t(\tau_1) \\ s_t(\tau_2) \\ \vdots \\ s_t(\tau_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-e^{-\lambda\tau_1}}{\lambda\tau_1} & \frac{1-e^{-\lambda\tau_1}}{\lambda\tau_1} - e^{-\lambda\tau_1} \\ 1 & \frac{1-e^{-\lambda\tau_2}}{\lambda\tau_2} & \frac{1-e^{-\lambda\tau_2}}{\lambda\tau_2} - e^{-\lambda\tau_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1-e^{-\lambda\tau_N}}{\lambda\tau_N} & \frac{1-e^{-\lambda\tau_N}}{\lambda\tau_N} - e^{-\lambda\tau_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_t \\ S_t \\ C_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_t(\tau_1) \\ \varepsilon_t(\tau_2) \\ \vdots \\ \varepsilon_t(\tau_N) \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} L_t - \mu_L \\ S_t - \mu_S \\ C_t - \mu_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{t-1} - \mu_L \\ S_{t-1} - \mu_S \\ C_{t-1} - \mu_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_t(L) \\ \eta_t(S) \\ \eta_t(C) \end{pmatrix}$$

여기에서 $\tau_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 는 i 번째 만기이고 $s_t(\tau)$ 는 만기가 τ 인 연속복리 현물수익률을 나타낸다. L_t, S_t, C_t 는 각각 시간 가변 수준, 기울기, 곡도 요인(latent factor)을 의미하고 μ_L, μ_S, μ_C 는 각각의 무조건부 평균, $a_{ii} (i = 1, 2, 3)$ 은 자기회귀계수이다. $\varepsilon_t(\tau)$ 과 $\eta_t(X)$ 는 각각 관측방정식과 상태방정식의

확률오차항이다. λ 는 수익률 곡선의 곡도를 결정하는 모수이다.

상태공간모형으로 표현된 DNS 모형의 관측방정식은 요인의 선형 함수이므로 칼만필터(Kalman filter)로 모수를 추정한다. 칼만필터는 상태방정식을 이용한 예측, 관측방정식을 이용한 예측 오차의 갱신을 반복하여 모수 추정치와 미관측요인 시계열의 추정치를 산출한다. 먼저 f_t 를 미관측 요인 벡터라고 할 때 행렬 표기법으로 DNS 모형을 나타내면 다음과 같다.

$$s_t = \Lambda(\lambda)f_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \Sigma_\varepsilon),$$

$$f_t = (I - A)\mu + Af_{t-1} + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \Sigma_\eta), \quad t = 1, \dots, T \quad (2)$$

여기에서 $f_t = (L_t, S_t, C_t)^\top$ 와 $\mu = (\mu_L, \mu_S, \mu_C)^\top$ 는 각각 3×1 차원의 요인과 요인의 평균 벡터이고 Λ 는 계수 행렬이다. Σ_ε 와 Σ_η 은 각각 관측방정식과 상태방정식의 오차 공분산행렬(대각행렬)이며 확률 잡음 간 상관관계는 없다고 가정한다.

우선 상태방정식의 예측 과정은 다음과 같다.

$$f_{t|t-1} = (I - A)\mu + Af_{t-1|t-1}, \quad (3)$$

$$v_{t|t-1} = Av_{t-1|t-1}A' + \Sigma_\eta, \quad (4)$$

요인 예측치로부터 계산된 현물 수익률 예측치는

실제 현물 수익률과 비교되며 이때 예측오차 및 이의 공분산행렬이 계산된다.

$$\mathbf{e}_{t|t-1} = \mathbf{s}_t - \Lambda(\lambda)\mathbf{f}_{t|t-1}, \quad (5)$$

$$\mathbf{e}\mathbf{v}_{t|t-1} = \Lambda(\lambda)\mathbf{v}_{t|t-1}\Lambda(\lambda)' + \Sigma_{\varepsilon}, \quad (6)$$

예측치의 불확실성을 나타내는 칼만조정항(Kalman gain) $K_t = \mathbf{v}_{t|t-1}\Lambda(\lambda)'e\mathbf{v}_{t|t-1}^{-1}$ 을 이용하면 식(7), (8)과 같이 예측 결과가 갱신된다.

$$\mathbf{f}_{t|t} = \mathbf{f}_{t|t-1} + K_t\mathbf{e}_{t|t-1}, \quad (7)$$

$$\mathbf{v}_{t|t} = \mathbf{v}_{t|t-1} - K_t\Lambda(\lambda)\mathbf{v}_{t|t-1}, \quad (8)$$

최종적으로 조건부 예측오차와 이의 공분산행렬을 이용하여 식(9)와 같은 대수우도함수가 계산되며 수치 최적화를 통해 이 대수우도함수를 극대화하면 모수 벡터 θ 가 추정된다.

$$\begin{aligned} \ell(\theta) = & -\frac{NT}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^T \log|\mathbf{e}\mathbf{v}_{t|t-1}| \quad (9) \\ & - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^T \mathbf{e}'_{t|t-1}(\mathbf{e}\mathbf{v}_{t|t-1})^{-1}\mathbf{e}_{t|t-1} \end{aligned}$$

2.2 무이표 채권의 기대투자수익률과 공분산

Markowitz (1952)의 평균-분산 최적화 모형으로 무이표 채권 포트폴리오의 최적 투자비중을 산출하기 위해서는 무이표 채권의 기대수익률(expected return)과 공분산 행렬이 필요하다. Caldeira *et al.* (2016)은 칼만필터를 이용하여 DNS 모형을 추정할 때 산출되는 요인의 예측치와 예측오차 공분산 행렬로부터 무이표 채권의 기대수익률 벡터와 조건부 공분산 행렬을 도출하였다. 우선 식(2)로부터 $S_{t|t-1}$ 즉 채권의 기대 현물수익률(expected spot yields)은 $N(\mu_{st|t-1}, \Sigma_{st|t-1})$ 의 정규분포를 따르며 이의 평균

과 분산은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mu_{s_{t|t-1}} &= \Lambda\mathbf{f}_{t|t-1}, \\ \Sigma_{s_{t|t-1}} &= \Lambda(\Sigma_{\eta} + \mathbf{A}\mathbf{v}_{t-1|t-1}\mathbf{A}')\Lambda' + \Sigma_{\varepsilon} \end{aligned} \quad (10)$$

여기에서 $f_{t|t-1} = E_{t-1}[f_t]$ 와 $v_{t-1|t-1} = Var_{t-1}[f_{t-1}]$ 은 순서대로 $(t-1)$ 시점 조건부 미관측 요인의 추정치와 그 불확실성을 나타내는 분산추정치이다.

잔존만기 τ 기간 후 1원이 지급되는 무이표 채권의 t 시점에서의 가격은 $P_t^{\tau} = \exp(-\tau \cdot s_t^{[\tau]})$ 이고 무이표 채권의 월별 로그수익률(monthly log return)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} r_t^{[\tau]} = & \log P_t^{[\tau-\frac{1}{12}]} - \log P_{t-1}^{[\tau]} = \quad (11) \\ & -\left(\tau - \frac{1}{12}\right) \otimes s_t^{[\tau-\frac{1}{12}]} + \tau \otimes s_{t-1}^{[\tau]} \end{aligned}$$

여기에서 \otimes 은 Hadamard 곱으로 동일한 행과 열의 원소를(elementwise) 곱하는 연산자이다.

$r_{t|t-1}^{(\tau)}$ 즉 무이표 채권의 기대 로그수익률(expected log returns)은 정규분포 $N(\mu_{st|t-1}^{(\tau)}, \Sigma_{st|t-1}^{(\tau)})$ 을 따르고 이때 평균 벡터와 공분산 행렬은 각각 다음과 같다.¹⁾

$$\mu_{r_{t|t-1}^{[\tau]}} = \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &= E_{t-1} \left[-\left(\tau - \frac{1}{12}\right) \otimes s_t^{[\tau-\frac{1}{12}]} + \tau \otimes s_{t-1}^{[\tau]} \right] \\ &= -\left(\tau - \frac{1}{12}\right) \otimes \mu_{s_{t|t-1}^{[\tau-\frac{1}{12}]} + \tau \otimes s_{t-1}^{[\tau]} \end{aligned}$$

$$\Sigma_{r_{t|t-1}^{[\tau]}} = \left(\tau - \frac{1}{12}\right) \left(\tau - \frac{1}{12}\right)' \otimes \quad (13)$$

$$\left[\Lambda^{[\tau-\frac{1}{12}]}(\Sigma_{\eta} + \mathbf{A}\mathbf{v}_{t-1|t-1}\mathbf{A}')^{[\tau-\frac{1}{12}]} \Lambda^{[\tau-\frac{1}{12}]'} + \Sigma_{\varepsilon}^{[\tau-\frac{1}{12}]} \right]$$

1) 식(13)은 공분산행렬의 정의식 $\Sigma_{r_{t|t-1}^{(\tau)}} = E_{t-1}[(r_t^{(\tau)} - E_{t-1}[r_t^{(\tau)}])(r_t^{(\tau)} - E_{t-1}[r_t^{(\tau)}])']$ 을 이용하여 계산된다.



여기에서 상첨자 $\left[\tau - \frac{1}{12}\right]$ 는 1개월 경과로 인하여 잔존만기 τ 가 년(즉, 1개월) 감소하여 $\left(\tau - \frac{1}{12}\right)$ 가 됨을 의미한다. 따라서 $A^{\left[\tau - \frac{1}{12}\right]}$ 는 $\left(\tau - \frac{1}{12}\right)$ 인 잔존만기 벡터에서 산출된 요인부하(factor loading) 행렬을 나타낸다. 또한 $\Sigma_c^{\left[\tau - \frac{1}{12}\right]}$ 는 관측방정식의 예측오차 공분산행렬에서 $\left(\tau - \frac{1}{12}\right)$ 의 잔존만기에 해당되는 부분이다.²⁾

2.3 평균-분산 포트폴리오 최적화

무이표 채권의 기대수익률과 공분산행렬이 주어지면 식(14)와 같은 최적화 문제에 직면한 투자자는 기대투자수익률은 높이되 포트폴리오의 위험은 낮추는 만기별 투자비중 벡터(w_t)를 결정한다. 따라서 평균-분산 기준의 포트폴리오 최적화는 기대수익률 및 공분산 산출 과정과는 분리된 과정이다.

$$\begin{aligned} \min_{w_t} & w_t' \Sigma_{r_{t|t-1}} w_t - \frac{1}{\delta} w_t' \mu_{r_{t|t-1}} \\ \text{s. t.} & \\ & w_t' \mathbf{1} = 1, \quad w_t' \boldsymbol{\tau} = d^{Target}, \quad w_t \geq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

여기에서 $\mu_{r_{t|t-1}}$ 와 $\Sigma_{r_{t|t-1}}$ 는 순서대로 $t-1$ 시점에 예측된 t 시점의 기대수익률 벡터와 공분산 행렬을 의미한다. 또한 $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]'$ 는 1로 구성된 벡터이다. δ 는 위험회피(risk aversion) 계수이고 d^{Target} 는 목표 듀레이션을 의미한다. 공매도는 허용되지 않는 것으로 가정한다. 투자비중의 합은 100%이며 개별 만기의 채권에 대한 투자비중은 0보다 크거나 같다.

2.4 이표채 포트폴리오 최적화 모형

이표채 포트폴리오 최적화 모형은 무이표채의 채권 기대수익률 및 공분산 행렬이 주어지면 무차익거래조건을 이용하여 이표채의 투자비중을 산출한다. 이때 포트폴리오 최적화 모형의 입력 값인 무이표채의 기대

기호	의미
τ^c	이표채(coupon bearing bond)의 만기 벡터
τ	이표채 이자 지급 주기의 배수로 결정되는 모든 만기
m^c	1년에 지급되는 이표 지급 횟수
N^c	이표채 만기의 개수
N	모든 만기의 개수
$w_t^c(\tau^c)$	t 시점의 만기가 τ^c 인 이표채의 비중
$w_t(\tau)$	t 시점의 만기가 τ 인 무이표채의 비중
$y_t(\tau^c)$	t 시점의 만기가 τ^c 인 액면수익률(par yield)
$s_t(\tau)$	t 시점의 만기가 τ 인 현물 수익률(spot yield 또는 zero rate)
D^{Target}	목표 듀레이션
$\mu_{r_{t+1 t}}$	$N \times 1$ 기대수익률 벡터
$\Sigma_{r_{t+1 t}}$	$N \times N$ 공분산 행렬
$I_{\{\tau = \tau^c\}}$	만기가 $\tau = \tau^c$ 인 경우 1을 나타내는 지시함수(indicator function)

2) 관측방정식은 만기에 따른 요인부하행렬을 산출하지만 실제관측치가 존재하는 주요 만기(3,6,240)에 대해서만 확률오차항의 공분산행렬이 구성되므로 자동적으로 해당 만기의 공분산행렬을 산출하지 않는 구조를 가진다. 그러므로 $\frac{1}{12}$ 년 감소한 잔존 만기에 해당하는 값을 계산하기 위하여 3차 스플라인 보간법(cubic spline interpolation)을 사용하였다.

수익률과 공분산을 추정하는 모형은 반드시 DNS모형 일 필요는 없고 어떤 형태의 모형이든 적용이 가능하다. 이표채 포트폴리오 모형의 구조에 대한 설명의 편의를 위해 먼저 수익에 사용되는 주요 기호의 정의는 위 표와 같다.

이표채 포트폴리오모형은 기존 평균-분산 포트폴리오 최적화 모형을 다음과 같이 세 가지 측면에서 확장한다. 첫 번째 확장은 식(16)과 같이 무이표채와 이표채의 만기별 비중 사이에 존재하는 제약식을 도입하는 것이다. 두 번째는 최적 포트폴리오의 특정 만기에 대한 배분 비중이 집중되지 않고 분산되도록 조정하는 횡단면 제약조건이다. 세 번째는 시간에 따른 배분 비중의 급격한 변화를 방지하기 위한 제약 조건이다.

$$\min_{w_t^c} w_t^c \sum_{\tau=t+1|t} w_{\tau} - \frac{1}{\delta} w_t^c \mu_{\tau+1|t} \quad (15)$$

s. t.

$$w_t^c = 1, \quad w_t^c \tau = D^{Target}, \quad w_t \geq 0$$

$$\forall \tau \in \tau, \forall \tau^x \in \tau^x$$

$$w_t(\tau) = \quad (16)$$

$$= \sum_{\tau^x = \{\tau^c \in \tau^c | \tau^c \geq \tau\}} \frac{w_t^c(\tau^x)}{1 + m^c \cdot \tau^x \cdot y_t(\tau^x)} \underbrace{(I_{\{\tau=\tau^x\}} + y_t(\tau^x))}_{coupon\ bonds}$$

식(15)-(16)의 이표채 포트폴리오 최적화 모형은 기본적으로 식(14)와 같지만 크게 두 가지 차이점이 있다. 첫째, 이표채 포트폴리오 모형은 이표채와 무이표채 사이에 존재하는 무차익거래 조건을 나타내는 제약식이 추가적으로 도입된 형태이다. 둘째, 이표채 포트폴리오 모형의 제어 변수(control variable)는 무이표채 비중(w_t)이 아니라 이표채 비중(w_t^c)이다. 물론 목적함수는 무이표채 비중으로 표현되지만 실질적으로 이표채 비중이 변경되며 최적 포트폴리오가 결정된다. 이표채와 무이표채 사이에 존재하는 무차익거래 조건은 식(16)과 같다. 이 제약조건은 이표채의 투자수익률을 무이표채의 투자수익률로 나타낸, 일종의 매핑 기법에 해당한다. 즉 이표채는 무이표채의 포트폴리오에 해당하므로 이와 같은 제약이 도입됨으

로써 이표채의 최적 만기 구조가 결정된다.

식(16)을 구체적으로 보면, 우선 이표채의 현금흐름은 액면수익률 곡선($y_t(\tau^x)$)으로부터 알 수 있다. 따라서 이표채의 현금흐름은 이자지급 시점에는 $y_t(\tau^x)$, 만기 시점에는 $1 + y_t(\tau^x)$ 가 된다. 특정 시점이 만기이면 $I_{\{\tau=\tau^x\}} = 1$ 이 되므로 $I_{\{\tau=\tau^x\}} + y_t(\tau^x)$ 로 이표채의 현금흐름을 나타낼 수 있다. 무이표채 비중($w_t(\tau)$)은 해당 무이표채의 만기를 이자지급 시점으로 포함하는 이표채의 전체 현금흐름에서 해당 시점의 현금흐름의 비중으로 표현된다. 이때 비중은 이표 지급 시점의 경우 전체 현금흐름 중 이표의 비중이 되고 만기 시점에는 추가적으로 원금이 포함되어 결정된다. 또한 τ^x 은 이표채의 이자지급 주기이므로 국고채의 경우 1/2을 나타낸다. m^c 은 이표 지급 횟수가 많을수록 늘어날수록 특정 만기의 무이표채의 비중은 낮아지므로 이를 반영하기 위한 것이다.

무이표채와 이표채의 비중 사이에 존재하는 관계를 설명하기 위해, $\tau^c = 1, 3, 5$, $N^c = 3, m^c = 2$, (semi-annual coupon), $\tau = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5$, $N = 10$ 이고 액면수익률과 이표채 투자비중이 다음과 같이 주어진 것으로 가정하자.

τ^c	1	3	5
$y_t(\tau^c)$	0.02	0.03	0.05
$w_t^c(\tau^c)$	0.1	0.25	0.65

위의 가정하에서 이표 지급 주기의 배수로 구성되는 무이표채 만기의 개별 비중은 다음과 같이 계산된다.

$$w_t(0.5) = \frac{w_t^c(1)}{1 + 2 \cdot 1 \cdot y_t(1)} y_t(1) + \frac{w_t^c(3)}{1 + 2 \cdot 3 \cdot y_t(3)} y_t(3) + \frac{w_t^c(5)}{1 + 2 \cdot 5 \cdot y_t(5)} y_t(5)$$

$$w_t(1) = \frac{w_t^c(1)}{1 + 2 \cdot 1 \cdot y_t(1)} (1 + y_t(1)) + \frac{w_t^c(3)}{1 + 2 \cdot 3 \cdot y_t(3)} y_t(3) + \frac{w_t^c(5)}{1 + 2 \cdot 5 \cdot y_t(5)} y_t(5)$$

$$w_t(1.5) = \frac{w_t^c(3)}{1 + 2 \cdot 3 \cdot y_t(3)} y_t(3) + \frac{w_t^c(5)}{1 + 2 \cdot 5 \cdot y_t(5)} y_t(5) = w_t(2) = w_t(2.5)$$

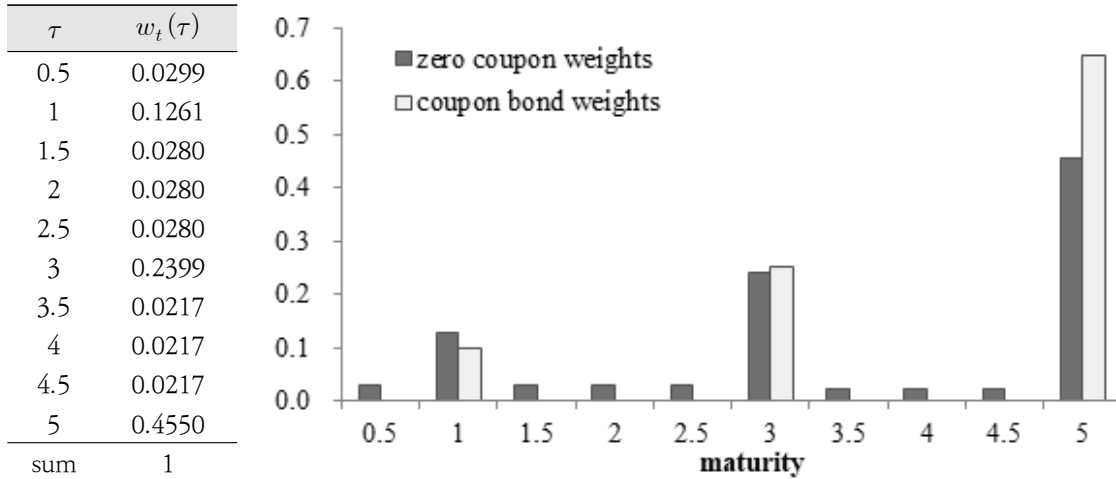
$$w_t(3) = \frac{w_t^c(3)}{1 + 2 \cdot 3 \cdot y_t(3)} (1 + y_t(3)) + \frac{w_t^c(5)}{1 + 2 \cdot 5 \cdot y_t(5)} y_t(5)$$

$$w_t(3.5) = \frac{w_t^c(5)}{1 + 2 \cdot 5 \cdot y_t(5)} y_t(5) = w_t(4) = w_t(4.5)$$

$$w_t(5) = \frac{w_t^c(5)}{1 + 2 \cdot 5 \cdot y_t(5)} (1 + y_t(5))$$



〈그림 1〉 무이표채와 이표채의 투자비중



주: X축은 연도로 나타낸 만기를 의미하고 Y축은 투자비중을 나타낸다.

이표채의 현금흐름은 이자와 원금으로 구성되므로 각각의 현금흐름은 해당 만기의 무이표채를 이용하여 표현된다. 예를 들어 5년 만기 무이표채 비중은 5년 만기 이표채의 원금과 관련이 있지만 6개월 만기 무이

표채 비중은 1년, 3년, 5년 만기 이표채와 연결된다. 위 식을 풀면 다음 그림에서 알 수 있듯이 이표채의 비중(노란색)으로부터 전체 비중의 합이 1인 무이표채의 비중(녹색)이 계산된다.

[3] 실증분석

3.1 자료

분석에 사용된 자료는 전체 표본 기간이 2006년 1월부터 2020년 12월까지(총 216개월)인 월말 국고채 현물 수익률의 기간 구조이며 KIS Pricing에서 제공되는 KIS-NET이 자료의 출처이다. 자료의 만기는 3, 6, 9, 12, 18, 24, 30, 36, 60, 84, 120, 180, 240개월로 총 13개 이다. 모수 추정을 위해 필요한 내표본(in-sample) 기간은 2006년 1월부터 2015년 12월까지이고 예측 및 투자성과를 비교를 위한 외표본(out-of-sample) 기간은 2016년 1월부터 2020년 12월까지이다.

모수 추정에 사용되는 최장 만기는 20년으로 국고채 발행 만기 1, 3, 5, 10, 20, 30, 50년 중 30년물과

50년물은 제외하였다. 그 이유는 국고채 30년물은 2012년부터, 50년물은 2016년부터 발행된 관계로 자료의 개수가 부족하기 때문이다. 물론 DNS 모형 추정 과정에서 차원 축소 기법 등을 이용하여 시계열 자료가 존재하지 않는 부분을 감안하여 대수우도함수를 계산하는 것이 가능하다. 그러나 이 경우 자료의 개수가 짧은 시계열의 관측오차 분산이 다소 높게 추정되는 문제가 발생하여 수익률의 공분산에 짧은 표본의 특성이 과다하게 반영될 여지가 있다. 따라서 후속 연구에서는 30년물과 50년물의 관측오차 분산을 적절히 추정할 수 있는 계량 기법을 적용할 필요가 있을 것으로 보인다.

〈그림 2〉는 국고채 현물 수익률 기간 구조의 시간에 따른 추이를 나타낸다. 국고채 수익률 기간 구조는

〈그림 2〉 국고채 현물 수익률 기간 구조



주: 표본 기간은 2006년 1월부터 2020년 12월까지이며 Y축은 월단위로 표시한 잔존만기, X축은 연도를 나타낸다.

시간의 흐름에 따라 우하향하는 추세를 보이지만 국지적인 기울기의 등락이 심한 모습을 보이고 있다. 특히 2008년 글로벌 금융위기에 따른 확장적 통화정책으로 인해 단기금리가 크게 낮아져 기울기가 가파르게 형성되는 것이 관찰된다. 미국 연방준비제도가 사회의장인 벤 버냉키 출구전략 시사 발언에서 촉발한 장기금리의 급등이 2013년 중반에 관측되고 있다. 최근의 모습을 보면 코로나19로 인하여 정책금리 하락

이 발생하여 전반적인 국고채 수익률 기간 구조는 낮은 수준에 머무르고 있다.³⁾

〈표 1〉은 외표본(2016년 1월부터 2020년 12월까지) 기간의 국고채 수익률 곡선으로부터 계산한 월별 투자수익률의 평균과 표준편차를 정리한 것이다. 외표본 기간 동안 수익률 기간 구조는 대부분 횡단면적으로 우상향하므로(물론 일부 구간에서 역전도 발견된다) 무이표채의 투자수익률의 평균과 표준편차는 이표채

〈표 1〉 무이표 및 이표 채권의 월별 투자수익률의 평균과 표준편차

이 표는 포트폴리오 투자성과를 비교하기 위한 외표본 기간(2016년 1월부터 2020년 12월까지)의 국고채 수익률 곡선으로부터 계산된 무이표 및 이표 채권의 월별 투자수익률의 평균과 표준편차를 나타낸다.

월별 투자수익률		1Y	3Y	5Y	7Y	10Y
무이표 채권	평균	1.75	2.12	2.62	2.97	3.11
	표준편차	0.31	1.09	2.26	3.40	5.11
이표 채권	평균	1.75	2.11	2.56	2.87	2.96
	표준편차	0.31	1.06	2.16	3.20	4.69

출처 : 저자 계산

3) 최근 COVID-19 글로벌 팬데믹이 포스트 코로나 시대의 국내외 사회 경제에 가져올 수 있는 크고 부정적인 불확실성 경제 충격을 고려한 최적 자산배분전략을 도출한 연구로써 박세영(2020)을 참고할 수 있다.



의 경우보다 다소 높으며 만기가 길어질수록 그 차이가 더욱 뚜렷해진다. 특히 이표채의 듀레이션은 주기적인 이표 지급으로 인하여 무이표채의 만기보다 짧기 때문에 이표채의 투자수익률의 변동성이 무이표채보다 낮은 것이 일반적이다.

3.2 모수 추정

DNS 모형의 모수 추정을 위한 대표본 기간은 2006년 1월부터 2015년 12월까지의 기간을 기준으로 시작 시점과 종료 시점을 각각 한 달씩 이동해가며 모수

〈표 2〉 DNS 모형 추정 결과

이 표는 국고채 현물 수익률의 표본 기간(2006년 1월부터 2020년 12월까지) 중 일부 또는 전체 기간에 대한 DNS 모형의 추정 결과를 나타낸다.

모수	06m1~15m12		09m1~18m12		11m1~20m12		06m1~18m12		06m1~20m12	
	추정치	s.e.	추정치	s.e.	추정치	s.e.	추정치	s.e.	추정치	s.e.
a_{11}	0.988	0.012	0.995	0.007	0.991	0.009	0.993	0.008	0.993	0.007
a_{22}	0.962	0.021	0.992	0.009	0.954	0.030	0.965	0.019	0.964	0.018
a_{33}	0.861	0.045	0.924	0.034	0.939	0.034	0.863	0.040	0.865	0.037
$100 \times \mu_1$	4.348	1.038	3.833	1.443	3.387	1.085	3.983	1.306	3.900	1.319
$100 \times \mu_2$	-1.419	0.639	-2.117	1.446	-1.284	0.335	-1.271	0.568	-1.374	0.508
$100 \times \mu_3$	-0.431	0.390	-0.293	0.503	-0.341	0.387	-0.356	0.314	-0.415	0.277
$100 \times \sigma_{\eta,1}$	0.207	0.030	0.172	0.023	0.172	0.023	0.195	0.024	0.190	0.021
$100 \times \sigma_{\eta,2}$	0.320	0.042	0.223	0.030	0.177	0.024	0.290	0.034	0.279	0.030
$100 \times \sigma_{\eta,3}$	0.621	0.090	0.452	0.069	0.279	0.045	0.555	0.071	0.517	0.062
$100 \times \sigma_{\epsilon,3}$	0.134	0.019	0.116	0.017	0.043	0.007	0.121	0.015	0.113	0.013
$100 \times \sigma_{\epsilon,6}$	0.056	0.008	0.049	0.007	0.026	0.004	0.052	0.007	0.050	0.006
$100 \times \sigma_{\epsilon,9}$	0.013	0.010	0.013	0.009	0.009	0.004	0.012	0.009	0.012	0.007
$100 \times \sigma_{\epsilon,12}$	0.037	0.005	0.036	0.005	0.017	0.003	0.034	0.004	0.032	0.004
$100 \times \sigma_{\epsilon,18}$	0.062	0.008	0.055	0.007	0.021	0.003	0.057	0.007	0.053	0.006
$100 \times \sigma_{\epsilon,24}$	0.041	0.006	0.036	0.005	0.013	0.003	0.037	0.005	0.035	0.004
$100 \times \sigma_{\epsilon,30}$	0.016	0.007	0.010	0.008	0.020	0.004	0.015	0.006	0.016	0.005
$100 \times \sigma_{\epsilon,36}$	0.033	0.005	0.034	0.005	0.034	0.005	0.033	0.005	0.034	0.005
$100 \times \sigma_{\epsilon,60}$	0.070	0.011	0.069	0.010	0.037	0.006	0.067	0.009	0.064	0.008
$100 \times \sigma_{\epsilon,84}$	0.058	0.011	0.064	0.009	0.041	0.006	0.061	0.008	0.058	0.007
$100 \times \sigma_{\epsilon,120}$	0.044	0.010	0.051	0.008	0.046	0.007	0.051	0.008	0.050	0.007
$100 \times \sigma_{\epsilon,180}$	0.045	0.012	0.041	0.008	0.019	0.007	0.034	0.009	0.032	0.008
$100 \times \sigma_{\epsilon,240}$	0.060	0.013	0.028	0.012	0.024	0.007	0.053	0.009	0.051	0.008
λ_1	0.589	0.014	0.564	0.012	0.444	0.009	0.582	0.012	0.583	0.011
$\log L$	10434.5		10648.0		11381.4		13693.6		15901.4	
k	23		23		23		23		23	
AIC	-20823.0		-21250.1		-22716.8		-27341.3		-31756.8	
BIC	-20699.9		-21127.0		-22593.7		-27212.2		-31624.4	

주) s.e.는 표준 오차(standard error)를 나타내며 2개의 정보기준(information criteria)의 산식은 다음과 같다.
 $AIC = -2 \log L + 2k$, $BIC = -2 \log L + k \log(NT)$, N =만기(개수), T =관측일(개수)

추정과 그 다음 월의 현물 수익률 예측이 진행되는 이동 표본(moving window)의 형식을 취하였다. 특히 이동 표본 추정 방식을 사용한 이유는 우리나라 국고채 수익률 기간구조가 2000년대 초반부터 추세적으로 하락하는 상황과 최근의 낮은 금리 수준을 모수 추정에 반영하는 것이 적절하다고 판단되기 때문이다.

〈표 2〉는 다양한 표본 기간에 대한 DNS모형의 추정 결과를 나타낸다. 표본 기간에 관계없이 수준과 기울기 요인의 자기회귀계수($a_{ii}, i = 1, \dots, 3$)는 상당한 지속성을 나타내지만 곡도 요인은 상대적으로 덜 지속적인 모습을 보여주고 있다. 비조건부 평균 모수($\mu_i, i = 1, \dots, 3$) 추정치는 표본 기간의 수준 요인과 기울기 요인의 특징이 잘 반영된 것으로 보인다. 특히 최근으로 표본이 이동할수록 수준 요인 추정치가 낮아 지므로 수익률 기간 구조의 전반적인 특징이 잘 나타나는 것으로 해석된다. 또한 곡도를 결정하는 모수(λ) 추정치는 모두 통계적으로 매우 유의하되 최근으로 표본이 이동할수록 그 값이 작아지는 것으로 나타났다.

3.3 포트폴리오 분석 기준

채권 포트폴리오의 투자성과는 월별 수익률의 투자 성과를 위험조정수익률의 관점에서 나타낸다. 따라서 먼저 식(11)을 이용하여 국고채의 만기별 실현 투자수익률(realized holding period returns)을 계산한다. 이 때 13개 만기에 대한 투자수익률을 계산하기 위해서 1개월부터 1개월 간격으로 240개월까지 구성된 240개의 만기의 현물 수익률이 필요하다. 그 이유는 채권 매입 후 한 달이 경과함에 따라 잔존 만기가 1개월 줄어들기 때문이다. 그러나 현물 수익률은 13개 주요 만기에 대해서만 관측되므로 이들 만기 사이에 1개월 간격으로 존재하는 현물 수익률은 3차 스플라인(cubic spline) 보간법으로 산출된다. 또한 포트폴리오의 수익률의 평균($\hat{\mu}$)에서 무위험 이자율(본 연구는 3개월 국고채 수익률을 무위험 이자율의 대응치로

사용)의 평균을 뺀 초과투자수익률의 평균($\hat{\mu}_{ex}$)을 수익률 표준편차($\hat{\sigma}$)로 나누어 샤프비율(Sharpe⁴ ratio) 즉 위험조정수익률(risk-adjusted return)과 목표 듀레이션을 나타내는 가중평균 만기(WAM) 등도 성과평가 지표로써 산출된다.

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} w'_t R_{t+1} \\ \hat{\mu}_{ex} &= \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} (w'_t R_{t+1} - Rf_{t+1}) \\ \hat{\sigma} &= \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} (w'_t R_{t+1} - \hat{\mu})^2} \\ SR &= \frac{\hat{\mu}_{ex}}{\hat{\sigma}}, \quad WAM = w'_t \tau \end{aligned} \quad (17)$$

여기에서 w_t 와 R_t 는 각각 투자비중 벡터와 무이표채 실현 투자수익률 벡터를 의미한다.

3.4 무계약 포트폴리오

〈표 3〉은 국고채 수익률 자료를 이용하여 구축한 이표채와 무이표채 포트폴리오의 투자성과를 정리한 것이다. 이때 포트폴리오 구성 만기는 1, 3, 5, 7, 10년이고 기대수익률과 공분산은 이동 표본 방식으로 추정된 DNS 모형으로부터 산출되었다. 초과수익률 계산을 위한 무위험이자율 대응치로써 3개월물을 사용하였고 목표 듀레이션이 주어질 경우 7년으로 설정하였다. 우선 목표 듀레이션이 없는 경우 무이표채 포트폴리오의 투자성과는 이표채 포트폴리오보다 소폭 높은 것으로 나타났는데 그 이유는 이표채의 경우 추가적인 무차익거래 제약조건을 만족해야 하므로 비중 선택 범위가 상대적으로 제약적이기 때문이다. 이와 같은 경향은 위험회피계수가 낮을수록 비중 선택의 자유도가 높아져 더욱 강화되는 것으로 나타났다. 목표 듀레이션을 7년으로 고정시킨 경우에도 무이표채 포트폴리오의 투자성과가 더 높게 나타나지만 목표 듀레이션이 없는 경우에 비해 그 차이는 더욱 작아졌

4) 샤프 비율은 평균과 표준편차로부터 계산되므로 고차 적률 위험을 반영하지 못한다는 한계가 존재한다. 이와 같은 단점을 극복하기 위한 연구로써 김봉준·전두배(2019)는 고차 적률 위험을 고려한 성과평가를 다루었다.



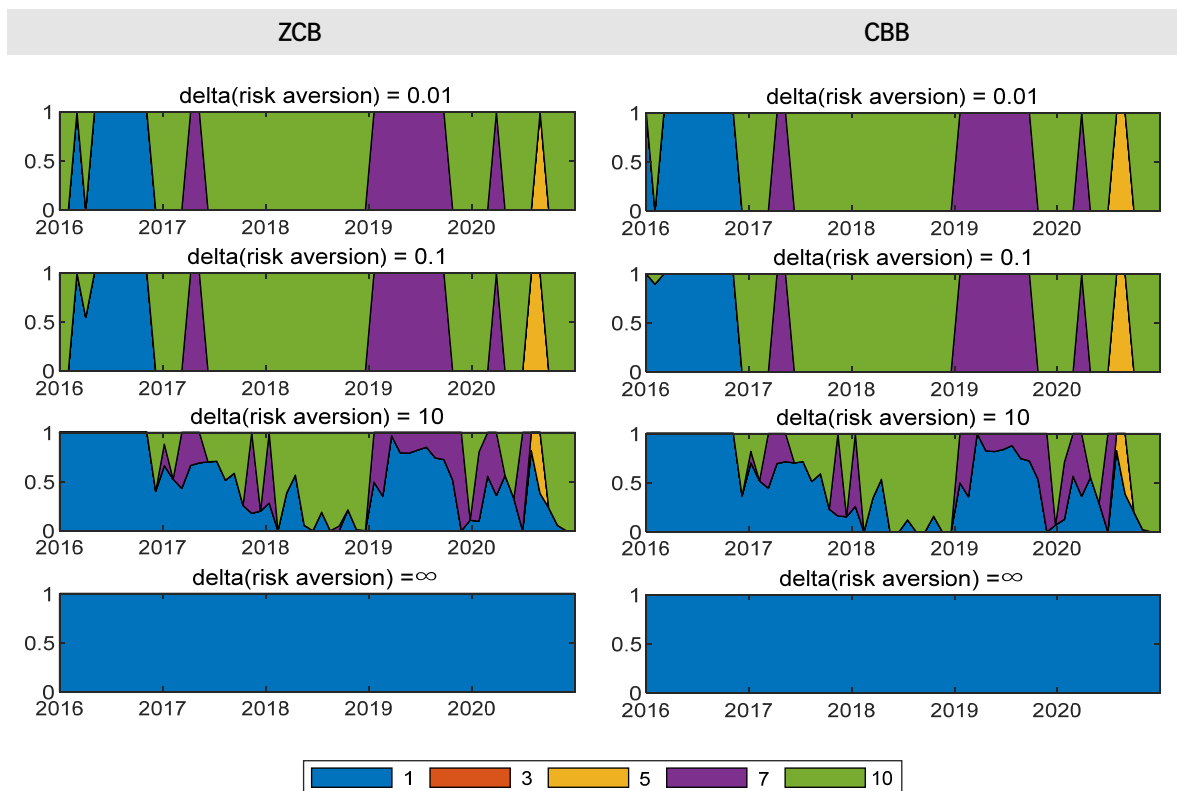
〈표 3〉 채권 포트폴리오의 평균 투자성과

이 표는 외표본 기간(2016년 1월부터 2020년 12월까지)의 국고채 현물 수익률을 대상으로 이동 표본 방식으로 추정된 DNS 모형으로부터 기대투자수익률과 공분산을 도출하여 구축한 국고채 포트폴리오의 투자성과를 정리한 것이다. 이때 목표 듀레이션은 설정되지 않았다.

포트폴리오 구분	위험회피 계수()	수익률 평균(%)	초과수익률 평균(%)	표준 편차(%)	샤프 비율	평균 듀레이션(년)
ZCB	0.01	4.09	2.82	3.72	0.76	8.12
	0.1	3.92	2.64	3.70	0.71	7.95
	10	3.07	1.79	2.42	0.74	4.98
	∞	1.75	0.47	0.31	1.52	1.00
CBB	0.01	3.47	2.20	3.37	0.65	7.17
	0.1	3.16	1.88	3.28	0.57	7.04
	10	2.91	1.63	2.24	0.73	4.69
	∞	1.75	0.47	0.31	1.52	1.00

주: ∞는 위험회피계수를 나타낸다. 수익률 및 표준편차는 연율화 값이고 듀레이션은 연 단위이다.

〈그림 3〉 채권 포트폴리오의 만기 비중 변화



주: X축은 외표본 기간인 60개월을, Y축은 투자비중을 의미한다. 범례는 구성 만기(년)를 나타낸다.

다. 표로 나타낸 투자성과는 포트폴리오의 평균적인 성과를 파악하는데 도움이 되지만 동적인 측면의 비중 변화를 파악하기 어렵다는 단점이 있다. 따라서 외표본 구간에서 나타나는 투자비중의 변화를 시계열적으로 파악함으로써 어떤 방향으로 비중 구성이 변화하는지 살펴볼 필요가 있다.

〈그림 3〉은 무이표채와 이표채의 포트폴리오 구성 비중의 시간에 따른 변화를 나타내며 이 경우 이동표본이 사용되었고 목표 듀레이션은 설정되지 않았다. 무제약 포트폴리오의 시간에 따른 배분 결과는 특정 만기에 집중되는 문제가 나타나지만 채권 포트폴리오의 듀레이션에 대한 방향을 제시해준다는 점에서 의미가 있다. 결국 외표본 기간 동안 전반적으로 단기에서 장기로의 만기 전환이 나타나되 2019년 이후 약간의 듀레이션 축소가 필요함을 시사하고 있다. 2019년의 경우 발생한 10년물 대신 7년물로의 전환은 이 기간에 나타난 장단기 금리 역전 현상을 반영한 것으로 해석된다.

두 그림으로부터 쉽게 알 수 있는 것은 초기의 변화를 제외하면 두 포트폴리오의 비중 변화가 상당히 유사하다는 것이다. 그런데 두 포트폴리오는 유사성이 높을 수 밖에 없는데 그 이유는 이표채에 이표 효과가 있더라도 만기 원금에 비해 그 절대적인 크기가 작으므로 두 포트폴리오가 공유하는 현금흐름이 상당히 크기 때문이다. 물론 금리 수준이 매우 높으면 높을수록 두 포트폴리오 사이의 간극은 더욱 커질 것으로 예상되지만 최근의 저금리 환경에서 두 포트폴리오는 유사성이 더 높을 수 밖에 없을 것이다. 그럼에도 불구하고 투자비중 배분의 차이가 존재하고 비중이 유사하더라도 기대수익률과 위험에 차이가 있으므로 샤프 비율의 차이가 발생하고 있다.

또한 모형에 기반한 이표채 포트폴리오 전략의 유효성을 확인하기 위하여 모형 기반의 이표채 투자전략과 〈부록 B〉에 수록된 기존의 벤치마크 투자전략의 평균 투자성과를 비교할 필요가 있다. 〈부록 B〉 1년 Bullet 전략과 〈표 3〉의 CBB($\delta = \infty$) 전략은 위험이 가장 작은 전략으로써 매우 높은 위험조정수익률을 나타내고 있다. 그 외의 가중평균 듀레이션이 유사한 전략 비교하면 전반적으로 모형 기반 이표채 투자전략의

위험조정수익률이 높게 나타나고 있다. 따라서 모형에 기반한 이표채 투자전략의 유효성이 존재하는 것으로 판단된다.

3.5 목표 듀레이션 제약

금융기관이나 연기금의 채권 포트폴리오 관리에서 목표 듀레이션 설정에서 시작한다. 따라서 본 연구의 초점은 목표 듀레이션 제약 조건이 부여된 이표채 포트폴리오이다. 목표 듀레이션은 은행의 경우 단기(주로 2년 이내)이고 보험사의 경우 장기(10년 이상)이지만 분석의 편의를 위해 7년으로 가정한다. 〈표 4〉와 〈그림 4〉는 각각 7년의 목표 듀레이션이 주어진 경우의 무이표채와 이표채의 포트폴리오의 평균적인 투자 성과와 시간에 따른 비중 변화를 나타낸다. 〈표 4〉를 보면 상대적으로 덜 제약적인 무이표채 포트폴리오의 샤프 비율이 이표채의 경우보다 소폭 높게 나타났으나 전반적으로 유사한 투자성과를 나타내고 있다. 이에 반해 〈그림 4〉를 보면 목표 듀레이션이 없는 경우와 달리 두 포트폴리오의 구성 비중의 시간에 따른 변화에 다소 차이가 나타난다. 기본적으로 무이표채와 이표채 포트폴리오 모두 1년물과 10년물에 대략 1:2의 투자 비중을 배분하여 7년의 목표 듀레이션을 유지한다. 그런데 위험회피성향이 낮아질수록 특정 기간에서 7년물에 100%까지 배분하는 무이표채 포트폴리오와 달리 이표채 포트폴리오는 여러 만기에 걸친 이표 지급 제약 조건이 추가적으로 고려되어 100%까지는 배분되지 않고 있다. 즉 7년물 이표채는 듀레이션이 7년보다 작기 때문에 100% 배분될 수 없다.

위 결과로부터 목표 듀레이션이 주어진 이표채 포트폴리오의 최적 만기 구조는 이표채 포트폴리오 모형으로부터 도출될 필요가 있다고 판단된다. 물론 무이표채와 이표채 포트폴리오의 만기 구조가 어느 정도 유사하고 이표 지급 등의 복잡함을 평균-분산 모형에 도입하는 것이 상대적으로 용이하지 않으므로 이표채 모형 대신 무이표채 모형을 사용할 수도 있을 것이다. 다만 이 경우 채권 만기별 배분 비중의 방향성을 참고하는 수준이 적절할 것이다.



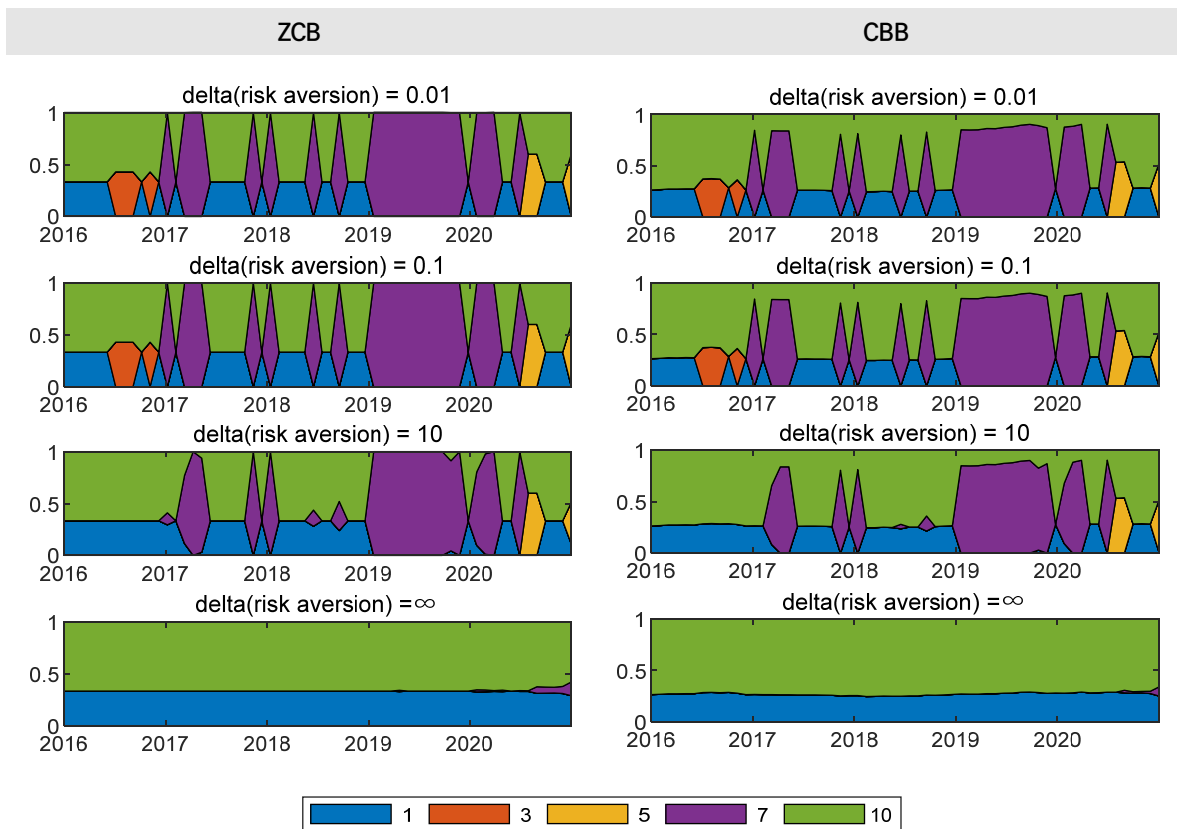
〈표 4〉 채권 포트폴리오의 평균 투자성과 ($D^{Target} = 7$)

이 표는 외표본 기간(2016년 1월부터 2020년 12월까지)의 국고채 현물 수익률을 대상으로 추정된 DNS 모형으로부터 기대투자수익률과 공분산을 도출하여 구축한 국고채 포트폴리오의 투자성과를 정리한 것이다. 이때 이동 표본이 사용되었고 목표 듀레이션은 7년이다.

포트폴리오 구분	위험회피 계수(δ)	수익률 평균(%)	초과수익률 평균(%)	표준 편차(%)	샤프 비율	평균 듀레이션(년)
ZCB $D^{Target} = 7$	0.01	3.22	1.95	3.35	0.58	7
	0.1	3.22	1.95	3.35	0.58	7
	10	3.14	1.86	3.39	0.55	7
	∞	2.66	1.38	3.47	0.4	7
CBB $D^{Target} = 7$	0.01	3.1	1.82	3.36	0.54	7
	0.1	3.1	1.82	3.36	0.54	7
	10	3.04	1.77	3.39	0.52	7
	∞	2.67	1.39	3.46	0.4	7

주: δ 는 위험회피계수를 나타낸다. 수익률 및 표준편차는 연율화 값이고 듀레이션은 연 단위이다.

〈그림 4〉 채권 포트폴리오의 만기 비중 변화 ($D^{Target} = 7$)



주: X축은 외표본 기간인 60개월을, Y축은 투자비중을 의미한다. 범례는 구성 만기(년)를 나타낸다.

그런데 분석 결과 목표 듀레이션의 존재 유무와 상관없이 채권 포트폴리오 분석 결과에 공통적으로 두가지 문제가 발견된다. 하나는 횡단면적인 만기별 배분의 과도한 집중이고 다른 하나는 시계열적인 배분 비중의 급격한 변화이다. 이 문제가 발생하는 이유는 <표 1>에서 알 수 있듯이 만기에 따른 채권 투자수익률과 위험 사이에 다소 강한 선형 관계가 나타나기 때문이다. 이는 동일한 신용도의 국고채 사이에서 만기만 다르기 때문에 발생한다. 물론 이 두 가지 문제는 평균-분산 포트폴리오 최적화 문제에서 자주 발생하지만 개별적 특성이 강한 주식과 달리 동질적 특성을 공유하는 정도가 큰 채권의 경우 더 심한 형태로 나타난다. 그러나 실제 자산배분은 적절한 한도 관리 하에서의 효율적인 배분을 추구하는 것이 일반적이다. 따라서 만기별 배분 비중을 특정 만기에 과도하게 집중시키거나 시간에 따른 만기별 배분 비중에 급격한 변화를 주는 것은 자산배분 측면에서 실행하기 어려운 전략이다. 따라서 이에 대한 적절한 조정이 필요하다. 즉 횡단면적인 분산 효과와 시계열적인 배분 비중의 지속성을 높이는 제약 조건의 추가적인 도입이 요구된다.

3.6 투자비중의 과도한 집중 및 변화의 완화

본 연구는 투자비중의 과도한 집중과 변화를 완화하기 위해 허핀달 지수(Herfindahl Concentration Index)와 비중 변화(monthly allocation change)를 이용한 제약조건을 추가적으로 도입한다. 횡단면적인 투자비중의 과도한 집중 문제는 특정 자산에 투자비중이 집중될 경우 벌칙이 적용되는 집중도 완화 지표(diversification metrics)를 통해 분산 투자를 유도함으로써 어느 정도 완화된다. 이 경우 허핀달 지수, Rosenbluth 지수, 엔트로피 지수 등이 이용된다(Woerheide and Persson;1993). 이 중 본 연구는 대표적으로 많이 사용되는 허핀달 지수(HHI_t)를 이용한다. 시계열적인 배분 비중의 급격한 변화 문제는 시간에 따른 투자비중의 변화(Δw_t^c)가 큰 폭으로 변할 경우 벌칙이 부여되는 비교적 간단한 형식으로 처리한

다. 이로 인해 포트폴리오 최적화 문제는 다음 식과 같이 목적함수에 두 가지 추가적인 제약조건이 반영되어 확장된다.

$$\min_{w_t^c} w_t^c \sum_{r_{t+1|t}} w_t - \frac{1}{\delta} w_t^c \mu_{r_{t+1|t}} + \delta_h HHI_t + \delta_w \Delta w_t^c \quad (18)$$

$$s.t. \quad w_t^c = 1, w_t^c \tau = D^{Target}, w_t \geq 0$$

$$\forall \tau \in \tau, \forall \tau^x \in \tau^x$$

$$w_t(\tau) = \sum_{\tau^x = \{\tau^c \in \tau^c | \tau^c \geq \tau\}} \frac{w_t^c(\tau^x)}{1 + m^c \cdot \tau^x \cdot y_t(\tau^x)} \left(I_{(\tau=\tau^x)} + y_t(\tau^x) \right) \quad (19)$$

coupon bonds

$$HHI_t = (w_t^c)^T w_t^c$$

$$\Delta w_t^c = w_t^c - w_{t-1}^c$$

여기에서 δ_h 와 δ_w 는 각각 투자비중의 집중과 변화에 대한 회피계수이다.

<표 5>는 7년의 목표 듀레이션 제약 하의 이표채 포트폴리오 최적화 모형에 δ_h 와 δ_w 중 하나에 0.1을 설정한 경우의 투자성과와 시간에 따른 만기별 배분 비중의 변화를 나타낸다. <표 5>에서 $\delta_h = 0.1$ 과 $\delta_w = 0.0$ 인 경우는 만기별 집중도 완화의 효과를, $\delta_h = 0.0$ 과 $\delta_w = 0.1$ 인 경우는 급격한 배분 비중의 완화 효과를 나타낸다. 두 경우 모두 앞서 분석한 $\delta_h = 0.0$ 과 $\delta_w = 0.0$ 인 경우에 비해 추가적인 제약 조건으로 인한 샤프 비율의 소폭 감소가 나타났다.

추가적인 제약조건으로 인해 샤프 비율이 소폭 감소하였지만 <그림 5>와 같이 배분 비중의 만기별 분산화와 시계열적 지속성이 높아진 결과가 나타났다. CBB ($\delta_h = 0.1, \delta_w = 0$)의 경우 만기별 비중이 분산되면서 어느 정도 시계열적인 지속성도 나타나지만 CBB ($\delta_h = 0, \delta_w = 0.1$)의 경우 투자비중의 시계열적 지속성은 높아졌지만 초기의 배분 비중으로부터 크게 벗어나지 않으려는 특징으로 인해 만기 분산화 문제는 그대로 존재하는 것으로 판단된다.

결국 최종 모형은 이표채 특성과 비중 집중 및 변화에 대한 제약조건이 반영된 형태이며 그 결과를 <표 6>과 <그림 6>에 나타냈다. 최종적으로 배분된



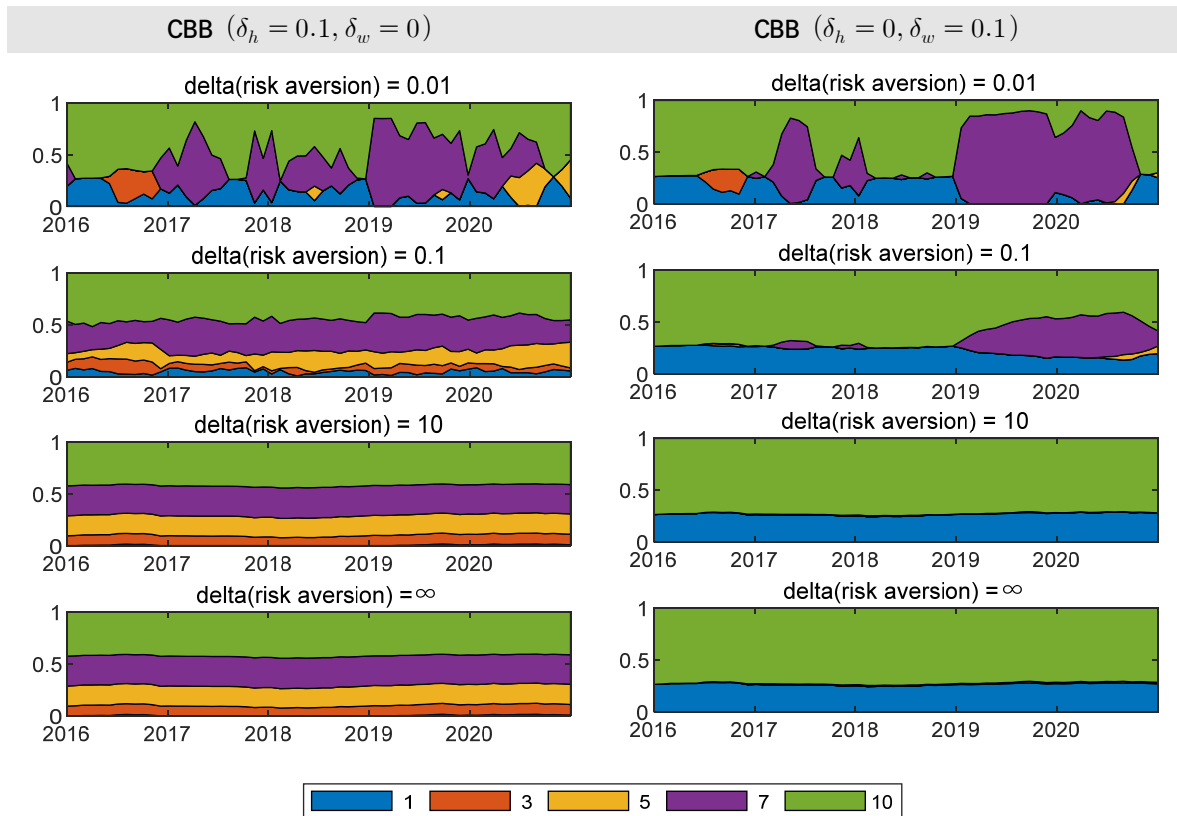
〈표 5〉 채권 포트폴리오의 평균 투자성과 (CBB, $D^{Target} = 7$, δ_h 또는 $\delta_w > 0$)

이 표는 외표본 기간(2016년 1월부터 2020년 12월까지)의 국고채 현물 수익률을 대상으로 추정된 DNS 모형으로부터 기대투자수익률과 공분산을 도출하여 구축한 국고채 포트폴리오의 투자성과를 정리한 것이다. 이때 이동 표본이 사용되었고 목표 듀레이션은 7년이다. 또한 투자비중의 집중 또는 시간에 따른 변화 완화와 관련된 벌칙 (penalty)항이 추가되었다.

포트폴리오 구분	위험회피 계수(δ)	수익률 평균(%)	초과수익률 평균(%)	표준 편차(%)	샤프 비율	평균 듀레이션(년)
$\delta_h = 0.1$ $\delta_w = 0.0$	0.01	3.05	1.77	3.38	0.52	7.00
	0.1	2.87	1.59	3.38	0.47	7.00
	10	2.80	1.53	3.37	0.45	7.00
	∞	2.80	1.53	3.37	0.45	7.00
$\delta_h = 0.0$ $\delta_w = 0.0$	0.01	3.01	1.74	3.38	0.51	7.00
	0.1	2.79	1.51	3.44	0.44	7.00
	10	2.67	1.39	3.46	0.40	7.00
	∞	2.67	1.39	3.46	0.40	7.00

주: δ , δ_h , δ_w 는 각각 위험, 비중 집중, 비중 변화에 대한 회피계수를 나타내고 D^{Target} 는 목표 듀레이션을 의미한다. 수익률 및 표준 편차는 연율화 값이고 듀레이션은 연 단위이다.

〈그림 5〉 채권 포트폴리오의 만기 비중 변화 ($D^{Target} = 7$, δ_h 또는 $\delta_w > 0$)



주: X축은 외표본 기간인 60개월을, Y축은 투자비중을 의미한다. 범례는 구성 만기(년)를 나타낸다.

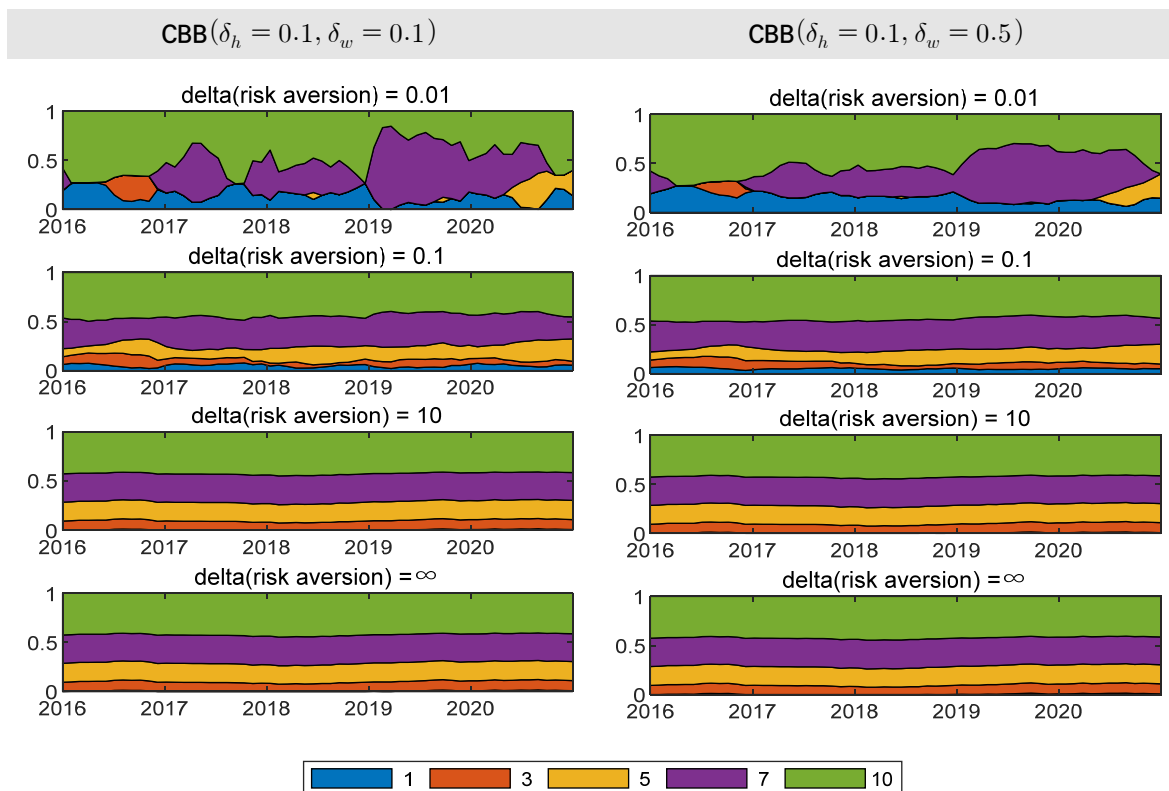
〈표 6〉 채권 포트폴리오의 평균 투자성과 (CBB, $D^{Target} = 7$, δ_h 와 $\delta_w > 0$)

이 표는 외표본 기간(2016년 1월부터 2020년 12월까지)의 국고채 현물 수익률을 대상으로 추정된 DNS 모형으로부터 기대투자수익률과 공분산을 도출하여 구축한 국고채 포트폴리오의 투자성과를 정리한 것이다. 이때 이동 표본이 사용되었고 목표 듀레이션은 7년이다. 또한 투자비중의 집중과 시간에 따른 변화 완화와 관련된 벌칙(penalty) 항이 추가되었다.

포트폴리오 구분	위험회피 계수(δ)	수익률 평균(%)	초과수익률 평균(%)	표준 편차(%)	샤프 비율	평균 듀레이션(년)
$\delta_h = 0.1$ $\delta_w = 0.1$	0.01	2.98	1.71	3.39	0.50	7.00
	0.1	2.85	1.57	3.38	0.47	7.00
	10	2.80	1.53	3.37	0.45	7.00
	∞	2.80	1.53	3.37	0.45	7.00
$\delta_h = 0.1$ $\delta_w = 0.5$	0.01	2.89	1.61	3.41	0.47	7.00
	0.1	2.83	1.55	3.38	0.46	7.00
	10	2.80	1.53	3.37	0.45	7.00
	∞	2.80	1.53	3.37	0.45	7.00

주: δ , δ_h , δ_w 는 각각 위험, 비중 집중, 비중 변화에 대한 회피계수를 나타내고 D^{Target} 는 목표 듀레이션을 의미한다. 수익률 및 표준 편차는 연율화 값이고 듀레이션은 연 단위이다.

〈그림 6〉 채권 포트폴리오의 만기 비중 변화 ($D^{Target} = 7$, δ_h 와 $\delta_w > 0$)



주: X축은 외표본 기간인 60개월을, Y축은 투자비중을 의미한다. 범례는 구성 만기(년)를 나타낸다.



비중은 위험회피계수에 따라 다르지만 추가된 제약 조건의 효과가 잘 나타나는 것으로 판단된다. 따라서

최종 모형은 이표채, 이동 표본, $D^{Target} = 7$, $\delta_h = 0.1$, $\delta_w = 0.1$ 의 분석 조건을 가진다⁵⁾.

[4] 안정성 검토 및 추가 분석

최종 모형의 안정성을 검토하기 위하여 기본 분석 조건(이표채, 이동 표본, $D^{Target} = 7$, $\delta_h = 0.1$, $\delta_w = 0.1$)의 변화가 투자성과에 미치는 영향을 검토하고 이표채 포트폴리오 모형의 또 다른 확장 가능성을 살펴보고자 한다.

4.1 확장 표본

표본 선택에 따른 안정성을 검토하기 위하여 추정 기간의 시작 시점을 2006년 1월로 고정된 상태에서

표본의 종료 시점(첫 번째 종료 시점은 2015년 12월)을 1개월씩 이동해가며 모수를 재추정하는 확장 표본 방식(expanding window)을 적용한다. <표 7>은 기본 분석 조건(이표채, 이동 표본, $D^{Target} = 7$, $\delta_h = 0.1$, $\delta_w = 0.1$)하에서 이동 표본 대신 확장 표본을 적용한 포트폴리오의 투자성과를 정리한 것이다. 확장 표본이 적용된 한 결과는 <표 6>의 이동 표본의 경우와 매우 유사하다. 물론 목표 듀레이션 도입 및 투자비중의 집중도와 변화도에 대한 제약 조건 자체가 이미 두 포트폴리오의 특성을 유사하게 만드는 효과가

<표 7> 채권 포트폴리오의 평균 투자성과 (확장 표본)

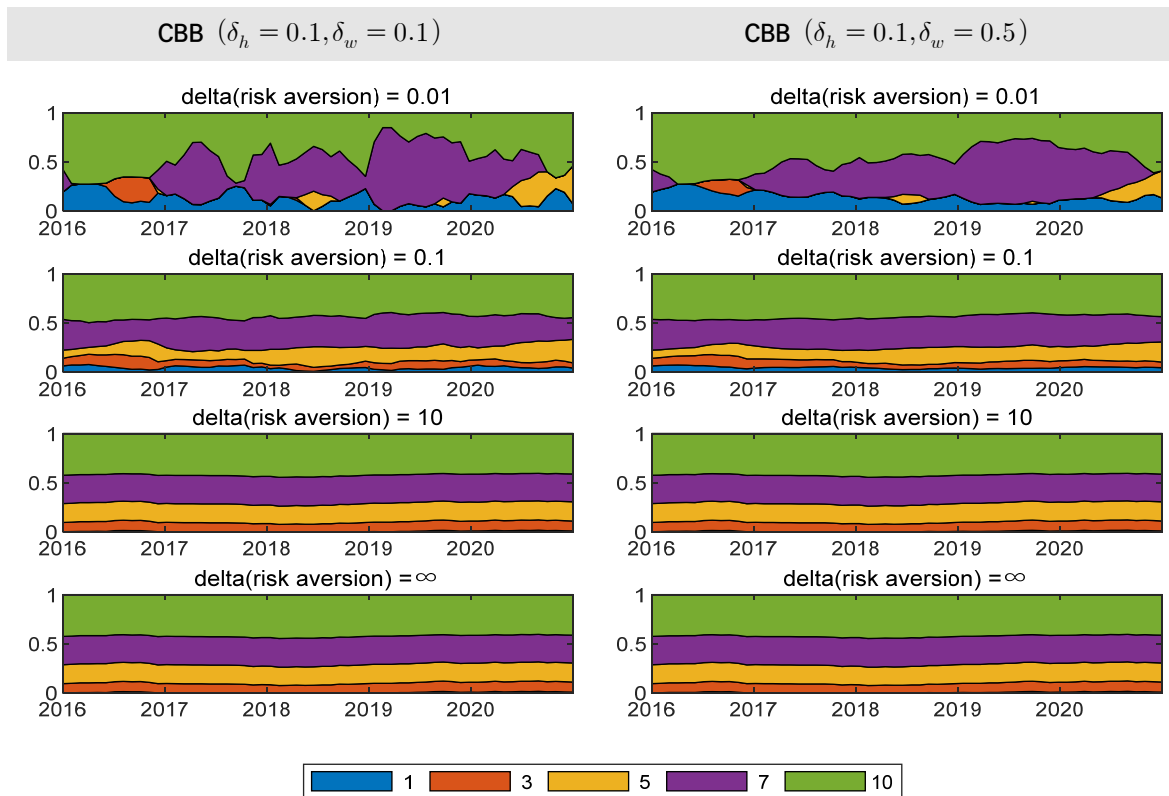
이 표는 외표본 기간(2016년 1월부터 2020년 12월까지)의 국고채 현물 수익률을 대상으로 확장 표본 방식으로 추정된 DNS 모형으로부터 기대투자수익률과 공분산을 도출하여 구축한 국고채 포트폴리오의 투자성과를 정리한 것이다. 이때 목표 듀레이션은 7년이다. 또한 투자비중의 집중과 시간에 따른 변화 완화와 관련된 벌칙(penalty)항이 추가되었다.

포트폴리오 구분	위험회피 계수(δ)	수익률 평균(%)	초과수익률 평균(%)	표준 편차(%)	샤프 비율	평균 듀레이션(년)
CBB $D^{Target} = 7$ $\delta_h = 0.1$ $\delta_w = 0.1$	0.01	3.00	1.72	3.39	0.51	7.00
	0.1	2.85	1.57	3.38	0.47	7.00
	10	2.80	1.53	3.37	0.45	7.00
	∞	2.80	1.53	3.37	0.45	7.00
CBB $D^{Target} = 7$ $\delta_h = 0.1$ $\delta_w = 0.5$	0.01	2.90	1.62	3.40	0.48	7.00
	0.1	2.83	1.55	3.38	0.46	7.00
	10	2.80	1.53	3.37	0.45	7.00
	∞	2.80	1.53	3.37	0.45	7.00

주: CBB 이표채를 나타낸다. δ , δ_h , δ_w 는 각각 위험, 비중 집중, 비중 변화에 대한 회피계수를 나타내고 D^{Target} 는 목표 듀레이션을 의미한다. 수익률 및 표준편차는 연율화 값이고 듀레이션은 연 단위이다.

5) 물론 δ_h 와 δ_w 도 δ 와 같이 적절한 개수의 후보 집합에서 선택되는 초모수이지만 적절한 배분이 이루어졌다고 판단되는 $\delta_h = 0.1$ 과 $\delta_w = 0.1$ 인 경우를 사용한다.

〈그림 7〉 채권 포트폴리오의 만기 비중 변화 (확장 표본)



주: X축은 외표본 기간인 60개월을, Y축은 투자비중을 의미한다. 범례는 구성 만기(년)를 나타낸다.

있을 것이다. 그러나 이 조건들을 제거한 경우에도 표본 적용의 차이가 모형의 안정성을 변화시킬 정도는 아니었다⁶⁾. 따라서 3장의 분석 결과는 이동 표본과 확장 표본으로 대표되는 표본 선택에 강건한 것으로 판단된다.

4.2 구성 만기의 확장

3장의 분석에서 사용된 주요 만기는 1, 3, 5, 7, 10년이다. 그러나 유동성 또는 시장 수급 등의 요인으로 인해 구성 만기의 종류는 달라질 수 있다. 그러므로 구성 만기의 차이에 따른 효과를 파악하기 위하여 1, 3, 5, 10, 15년인 경우와 1, 3, 5, 10, 15, 20년인

경우로 변경한 경우를 살펴본다.

〈표 8〉과 〈그림 8〉은 기본 분석 조건(이표채, 이동 표본, $D^{Target} = 7$, $\delta_h = 0.1$, $\delta_w = 0.1$)하에서 구성 만기를 확장한 포트폴리오의 투자성과와 시간에 따른 배분 비중의 변화를 정리한 것이다. 구성 만기가 확장됨으로써 7년의 목표 듀레이션을 유지하기 위한 7, 10년물의 비중이 감소하는 대신 15 또는 20년물의 비중이 증가하는 등 투자비중의 재배분이 나타났다. 특히 기준에 장기 영역을 담당하던 10년물 대신 10, 15, 20년물의 조합으로 장기 영역이 세분화되었다. 물론 투자 후보군이 확장되었으므로 사프비율은 기준에 비해 높아졌다.

6) 기본 분석 조건(이표채, 이동 표본 등)을 선택적으로 변화시켜가며 검토한 결과 이동 표본과 확장 표본의 차이에 따른 결과의 차이는 매우 작으므로 지면의 제약을 고려하여 이 결과는 별도로 보고하지 않도록 한다.



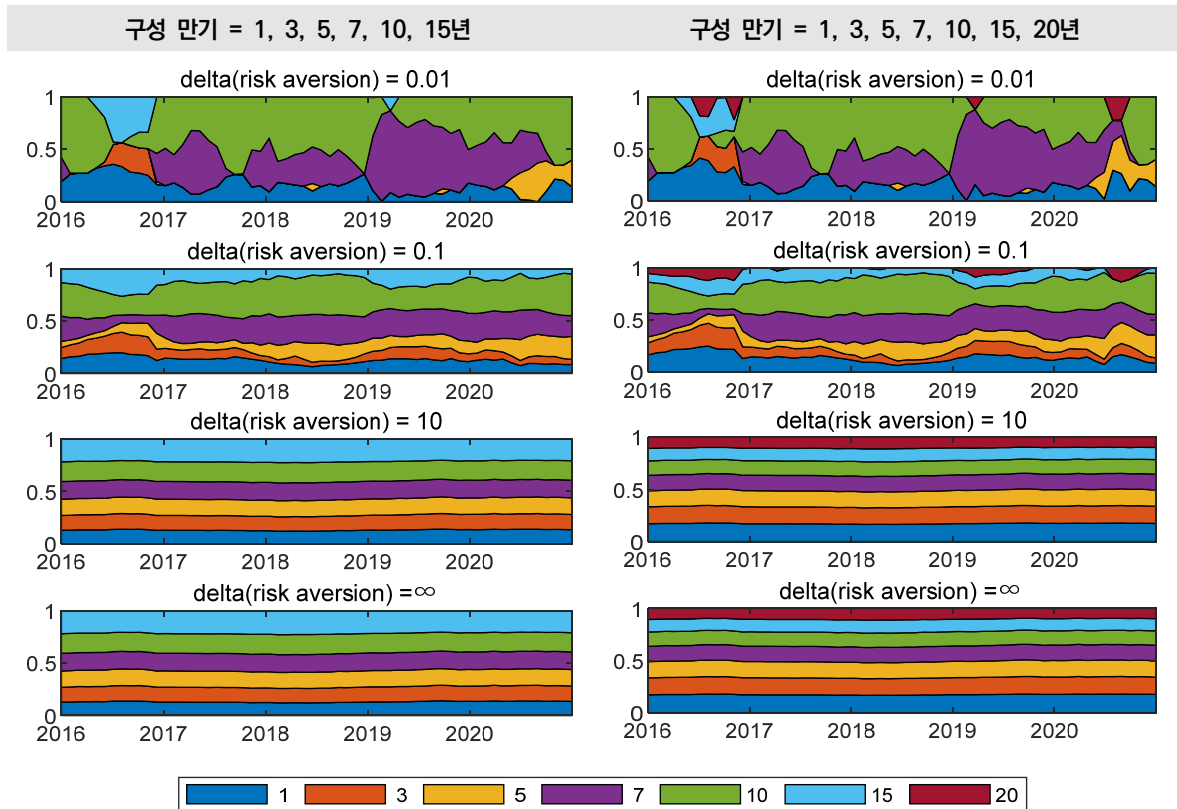
〈표 8〉 채권 포트폴리오의 평균 투자성과 (구성 만기 확장)

이 표는 외표본 기간(2016년 1월부터 2020년 12월까지)의 국고채 현물 수익률을 대상으로 추정된 DNS 모형으로부터 기대투자수익률과 공분산을 도출하여 구축한 국고채 포트폴리오의 투자성과를 정리한 것이다. 구성 만기를 확장한 모형을 적용하였다. 이때 이동 표본이 사용되었고 목표 듀레이션은 7년이다. 또한 투자비중의 집중과 시간에 따른 변화 완화와 관련된 벌칙(penalty)항이 추가되었다.

포트폴리오 구분	위험회피 계수(δ)	수익률 평균(%)	초과수익률 평균(%)	표준 편차(%)	샤프 비율	평균 듀레이션(년)
구성 만기 1,3,5,7,10, 15년	0.01	3.06	1.78	3.35	0.53	7.00
	0.1	2.84	1.57	3.35	0.47	7.00
	10	2.66	1.39	3.33	0.42	7.00
	∞	2.66	1.38	3.33	0.42	7.00
구성 만기 1,3,5,7,10, 15, 20년	0.01	3.14	1.86	3.31	0.56	7.00
	0.1	2.90	1.62	3.32	0.49	7.00
	10	2.64	1.36	3.31	0.41	7.00
	∞	2.64	1.36	3.31	0.41	7.00

주: 수익률과 표준편차는 연율화한 값이고 듀레이션은 연단위이다.

〈그림 8〉 채권 포트폴리오의 만기 비중 변화 (구성 만기 확장)



주: X축은 외표본 기간인 60개월을, Y축은 투자비중을 의미한다. 범례는 구성 만기(년)를 나타낸다.

4.3 스트립 채권의 효과

스트립(Separate Trading of Registered Interest and Principal of Securities: STRIPS) 채권은 이표 채의 원금 또는 이자의 현금흐름을 분리하여 할인채로 만든 채권이며 최근 보험사 등에서 적은 비용으로 듀레이션을 늘리고자 할 때 사용되는 것으로 알려져 있다⁷⁾. 본 연구의 이표채 포트폴리오 모형은 이표 채의 현금흐름을 무이표채로 표현하는 구조이므로 스트립도 이표채 현금흐름 제약식을 다음 식과 같이 변경하면 쉽게 포함된다. 물론 이 경우 목적함수의 제어변수로써 이표채 만기별 비중 벡터(w_t^c)외에 스트립 채권의 만기 비중 벡터(w_t^s)도 추가된다.

$w_t^s(\tau^s)$ 가 만기가 τ^s 인 스트립 채권의 비중 (벡터)일 때 이표채 포트폴리오 최적화 모형은 다음과 같이 확장된다.

$$\forall \tau \in \tau, \forall \tau^x \in \tau^x \quad (20)$$

$$w_t(\tau) = \sum_{\tau^x = \{\tau^c \in \tau^c | \tau^c \geq \tau\}} \frac{w_t^c(\tau^x)}{1 + m^c \cdot \tau^x \cdot y_t(\tau^x)} \left(I_{\{\tau = \tau^x\}} + y_t(\tau^x) \right) + \underbrace{w_t^s(\tau^s)}_{STRIPS}$$

<표 9>와 <그림 9>는 기본 분석 조건(이표채, 이동 표본, $D^{Target} = 7$, $\delta_h = 0.1$, $\delta_w = 0.1$)하에서 7년 또는 5년의 스트립 채권이 추가된 포트폴리오의 투자 성과와 시간에 따른 배분 비중의 변화를 정리한 것이다.⁸⁾ 듀레이션과 만기가 동일한 무이표체인 스트립 채권이 포함됨으로써 목표 듀레이션 7년을 유지하기 위한 7, 10년물의 비중이 감소하고 대신 스트립 채권의 비중이 증가하는 투자비중의 재배분이 나타났다. 목표

<표 9> 채권 포트폴리오의 평균 투자성과 (스트립 채권 추가)

이 표는 외표본 기간(2016년 1월부터 2020년 12월까지)의 국고채 현물 수익률을 대상으로 추정된 DNS 모형으로부터 기대투자수익률과 공분산을 도출하여 구축한 국고채 포트폴리오의 투자성과를 정리한 것이다. 추가적으로 5와 7년 만기의 스트립 채권이 추가되었다. 이때 이동 표본이 사용되었고 목표 듀레이션은 7년이다. 투자비중의 집중과 시간에 따른 변화 완화와 관련된 벌칙(penalty)항이 추가되었다.

포트폴리오 구분	위험회피 계수(0)	수익률 평균(%)	초과수익률 평균(%)	표준 편차(%)	샤프 비율	평균 듀레이션(년)
스트립 만기 7년	0.01	3.05	1.78	3.38	0.53	7.00
	0.1	2.90	1.62	3.38	0.48	7.00
	10	2.84	1.57	3.38	0.46	7.00
	∞	2.84	1.57	3.38	0.46	7.00
스트립 만기 5년	0.01	3.02	1.74	3.38	0.52	7.00
	0.1	2.89	1.61	3.37	0.48	7.00
	10	2.82	1.54	3.37	0.46	7.00
	∞	2.82	1.54	3.37	0.46	7.00

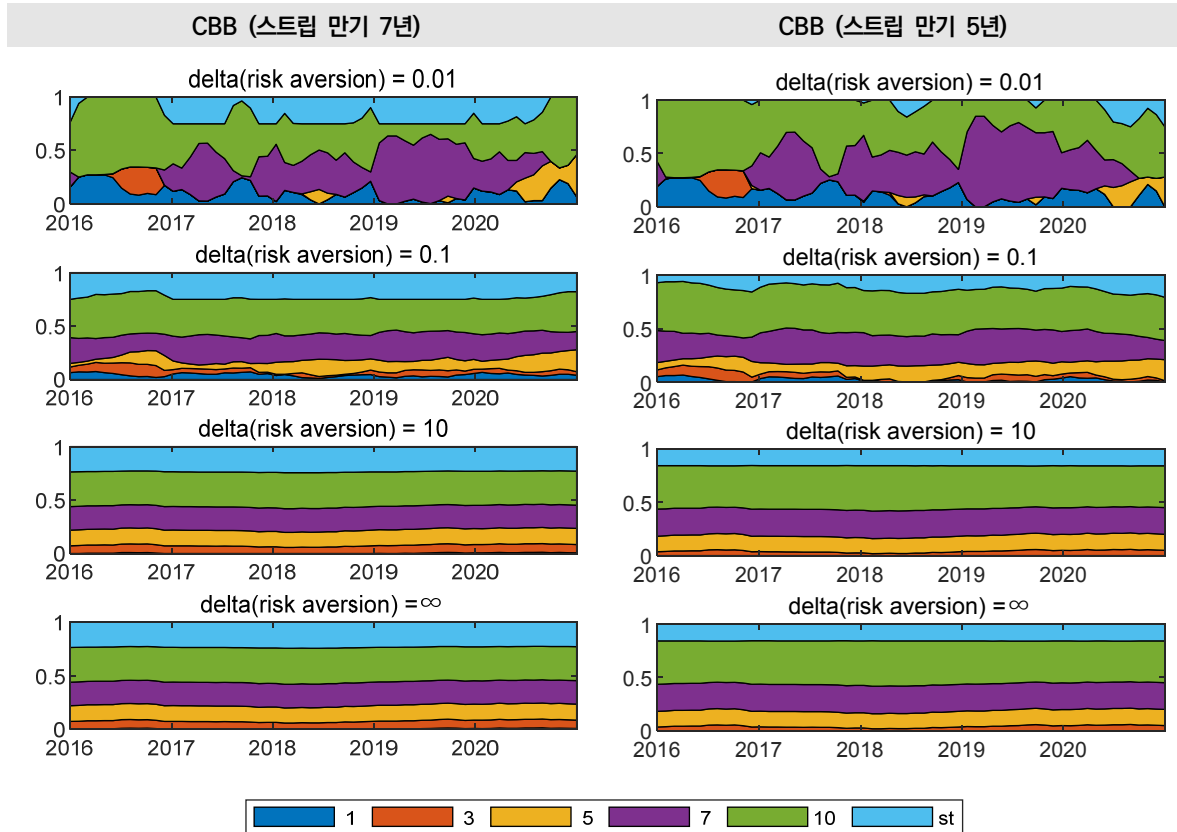
주: δ 는 위험회피계수를 나타낸다, 수익률과 표준편차는 연율화한 값이고 듀레이션은 연단위이다.

7) 보다 자세한 스트립채권에 관한 내용은 김필규(2021)를 참고할 수 있다.

8) 김필규(2021)에 따르면 스트립 채권의 만기는 주로 장기(2020년 6월 기준으로 320개월)이고 국고채 대비 스트립원금의 비중은 2010년 1.5%에서 2019년에는 9.4%로 늘어난 상황이다. 이에 반해 본 연구에서 선택한 7년은 다소 짧아 시장의 특성을 제대로 반영하지 못한 측면이 있다. 그럼에도 불구하고 7년을 선택한 이유는 기본 분석 조건(이표채, 이동 표본, $D^{Target} = 7$, $\delta_h = 0.1$, $\delta_w = 0.1$)의 틀 안에서 스트립 채권의 특성으로 인한 대체 효과를 파악하기 위해 목표 듀레이션과 가상의 스트립채권의 만기를 일치시켰기 때문이다. 익명의 심사위원님께서 지적하였듯이 추후 연구에서는 보다 현실적인 분석이 되기 위해서 목표 듀레이션과 스트립 채권을 시장 현실에 맞게 조정할 필요가 있을 것으로 보인다.



〈그림 9〉 채권 포트폴리오의 만기 비중 변화 (스트립 채권 추가)



주: X축은 외표본 기간인 60개월을, Y축은 투자비중을 의미한다. 범례는 구성 만기(년)를 나타낸다.

듀레이션과 같은 7년 만기의 스트립의 투자비중은 다소 높게 나타났고 목표 듀레이션보다 짧은 5년 만기 스트립의 투자비중은 상대적으로 작게 나타났다. 스트립 채권의 투자비중은 시장 환경의 변화에 다소 민감한 비중 변화를 나타내고 있다. 따라서 스트립 채권은 다소 경직적일 수 있는 이표채 포트폴리오에 신축적인 배분 비중의 변화를 줄 수 있는 역할을 하는 것으로 판단된다.

특히 7년 만기 스트립 채권이 포함된 경우 7년과 10년 만기 채권의 배분 비중의 많은 부분이 7년 만기 스트립 채권의 비중으로 전환되는 대체 효과가 나타났다. 이는 듀레이션이 목표 듀레이션보다 짧거나 긴 7또는 10년물 이표채와 달리 7년 만기 스트립 채권의 듀레이션이 정확히 7년이므로 목표 듀레이션 조건의 충족에 더욱 유리하기 때문이다.

4.4 목표 듀레이션 범위 조건

보다 현실적인 채권 포트폴리오의 듀레이션 관리는 목표 듀레이션의 상한(D_U^{Target})과 하한(D_L^{Target}) 안에서 그 변동이 허용되는 형태이다. 이 경우 위험과 수익에 대한 상충관계를 고려하여 형성된 듀레이션에 대한 기대에 따라 듀레이션의 확대 또는 축소가 발생할 것이다. 이 경우 다음 식과 같이 목표 듀레이션 제약조건을 수정한다.

$$D_L^{Target} \leq w_t \tau \leq D_U^{Target} \quad (21)$$

〈표 10〉과 〈그림 10〉은 기본 분석 조건(이표채, 이동 표본, $D^{Target} = 7$, $\delta_h = 0.1$, $\delta_w = 0.1$)하에서

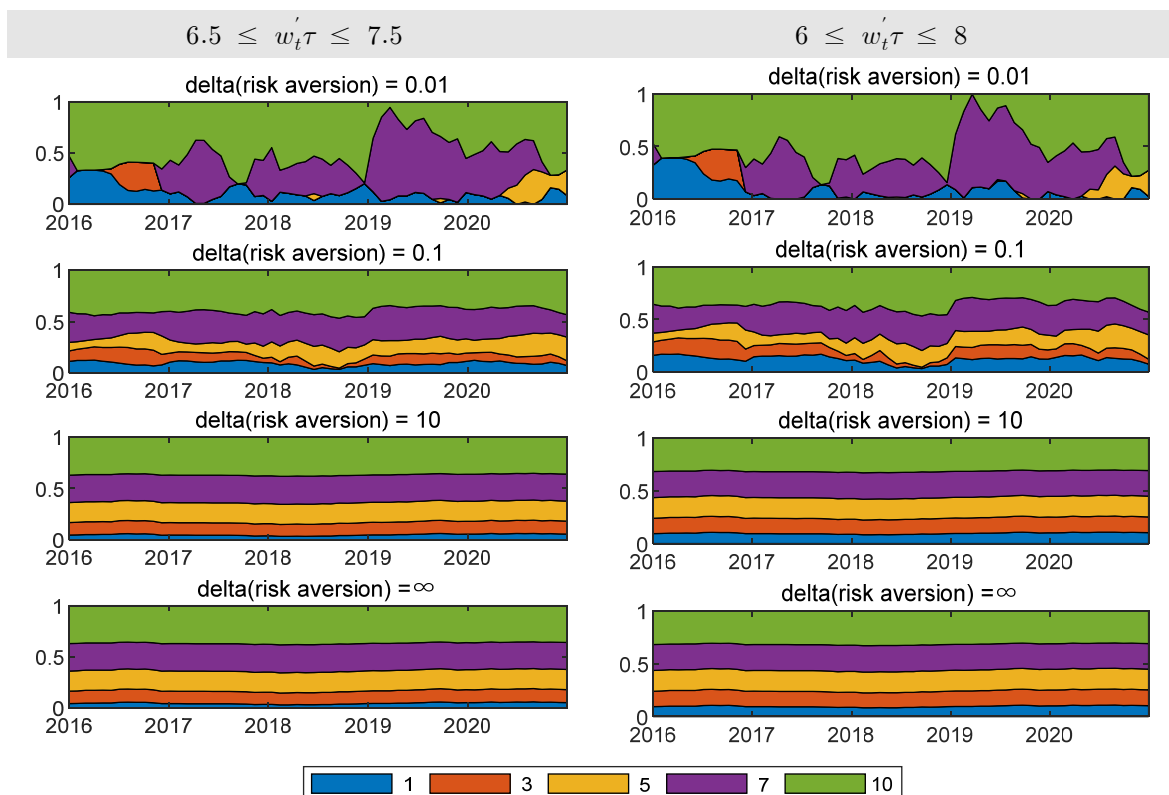
〈표 10〉 채권 포트폴리오의 평균 투자성과 ($D_L^{Target} \leq w_t \tau \leq D_U^{Target}$)

이 표는 외표본 기간(2016년 1월부터 2020년 12월까지)의 국고채 현물 수익률을 대상으로 추정된 DNS 모형으로부터 기대투자수익률과 공분산을 도출하여 구축한 국고채 포트폴리오의 투자성과를 정리한 것이다. 이때 이동 표본이 사용되었고 목표 듀레이션은 범위 형태로 주어졌다. 투자비중의 집중과 시간에 따른 변화 완화와 관련된 벌칙(penalty)항이 추가되었다.

포트폴리오 구분	위험회피 계수(δ)	수익률 평균(%)	초과수익률 평균(%)	표준 편차(%)	샤프 비율	평균 듀레이션(년)
목표 듀레이션 6.5~7.5년	0.01	2.95	1.67	3.42	0.49	7.20
	0.1	2.85	1.57	3.14	0.50	6.58
	10	2.72	1.45	3.10	0.47	6.50
	∞	2.72	1.44	3.10	0.47	6.50
목표 듀레이션 6~8년	0.01	2.90	1.62	3.46	0.47	7.39
	0.1	2.84	1.56	2.93	0.53	6.24
	10	2.64	1.36	2.82	0.48	6.00
	∞	2.64	1.36	2.82	0.48	6.00

주: δ 는 위험회피계수를 나타낸다. (D_L^{Target})과 (D_U^{Target})은 각각 목표 듀레이션의 하한과 상한을 의미한다. 수익률 및 표준편차는 연율화 값이고 듀레이션은 연 단위이다.

〈그림 10〉 채권 포트폴리오의 만기 비중 변화 ($D_L^{Target} \leq w_t \tau \leq D_U^{Target}$)



주: X축은 외표본 기간인 60개월을, Y축은 투자비중을 의미한다. 범례는 구성 만기(년)를 나타낸다.



고정된 목표 듀레이션(7년) 대신 목표 듀레이션의 범위(6.5~7.5년)가 적용된 포트폴리오의 투자성과와 시간에 따른 배분 비중의 변화를 정리한 것이다. 목표 듀레이션의 상·하한 지정으로 인해 위험회피성향이 높을수록 듀레이션이 축소되고 있다. 특히 위험회피성향이 가장 낮은 경우를 제외하면 목표 듀레이션이

고정인 경우에 비해 시간 가변하는 경우 샤프 비율이 소폭 상승하였다. 이는 위험회피성향이 낮을수록 기대 수익률 예측이 다소 어려운 장기채 비중이 높아짐에 따라 실제 실현된 채권의 투자수익률에 대한 예측 오차가 반영된 것으로 해석된다⁹⁾.

[5] 결론

본 연구는 무이표 채권의 평균-분산 포트폴리오 모형을 이표채 분석이 가능하도록 확장하고 우리나라 국고채의 이표채 포트폴리오에 대한 실증분석을 하였다. 최근 이표채 포트폴리오 모형으로써 제안된 Deguest *et al.* (2018)은 이론적 기반이 견고한 모형이다. 그러나 개별 채권에 대한 자료의 처리와 이표채 확률 과정의 추정 등 실무적으로 적용하기에는 다소 어려운 측면이 있다. 따라서 본 연구는 추가적인 자료 처리 및 복잡한 이표채 확률 과정 모형의 추정없이 평균-분산 포트폴리오 최적화 문제에 이표채 비중을 산출하기 위한 제약조건을 도입한 상대적으로 간소화된 형태의 모형을 제시하였다. 이는 실무적으로 사용이 가능하다는 점에서 의미를 가진다고 판단된다.

2006년 1월부터 2020년 12월까지의 우리나라 국고채 수익률 기간 구조를 이용한 실증분석 결과를 요약하면 다음과 같다. 첫째, 이표채와 무이표채 포트폴리오는 만기 분산 및 시간에 따른 배분 비중의 변화 측면에서 매우 유사하였다. 둘째, 듀레이션 제약이 있을 경우 이표채 포트폴리오의 배분 비중은 이표채의 듀레이션의 영향으로 무이표채의 경우와 다소 차이가 있었다. 셋째, 포트폴리오 구성 만기의 선택 또는 스트립 채권의 도입은 만기간 배분 비중의 대체를 발생시켰다. 넷째, 기관 투자자 입장에서 볼 때 채권 포트폴리오의 횡단면적 만기 집중 및 시계열적 급격한 비중 변화를

완화하기 위한 제약조건이 필요하였다. 본 연구의 실무적 시사점은 목표 듀레이션을 설정한 금융기관의 적극적 자산배분은 이표채 포트폴리오 모형으로 분석하는 것이 적합하며 본 연구가 실무적 적용이 용이하고 다양한 형태로 확장 가능한 방법론을 제시하였다는 점이다.

이표채 포트폴리오 최적화 모형이 주어지면 금융기관 또는 연기금의 미래 채권 포트폴리오 구축에 도움이 될 것으로 생각된다. 본 연구에서 사용되는 기대수익률과 공분산은 이표채가 아니라 무이표채로부터 산출되므로 기존의 어떤 형태의 이자율 기간 구조 모형도 사용 가능하다. 향후 거시경제 전망은 대부분의 금융기관에서 실시하고 있으므로 이와 같은 전망에 기반한 채권 포트폴리오 전략 수립은 전략적 자산배분 측면에서 중요하다. 물론 Schnorrenberger and Moura (2017)에 의해 거시 요인이 고려된 채권 포트폴리오 최적화 모형이 제시되었지만 역시 투자대상이 이표채가 아니라 무이표채라는 한계가 있다. 따라서 향후 후속 연구로써 Diebold *et al.* (2006)의 거시경제 요인 확장 DNS 모형을 이용하여 거시 경제 전망에 따른 국고채 포트폴리오의 투자전략을 구축함으로써 금융기관의 전략적 자산배분 기법을 고도화할 수 있을 것으로 기대한다.

9) 채권의 기대수익률 예측은 만기가 길어질수록 어려워지는 경향이 있다. 그 이유는 채권의 투자수익률 계산시 만기가 반영되고 잔존 만기에 따른 불확실성이 크기 때문이다. 예를 들어 1년 만기 채권의 수익률은 투자수익률 계산시 약 1년의 만기가 곱해지는데 반해 10년 만기 채권의 경우 약 10이 곱해져 투자수익률의 변동성이 매우 크게 나타난다.

참고 문헌

- 김봉준·전두배, 2019, 고차 적률 위험을 고려한 포트폴리오 성과 평가, *자산운용연구* 제7권 제1호, pp. 1-25.
- 김필규, 2021, 스트립채권시장의 특성 분석과 활성화 방안, *자본시장연구원 연구보고서* 21-01.
- 박세영, 2020, 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 최적자산배분 전략, *자산운용연구* 제8권 제2호, pp. 1-23.
- 이상현·김명직, 2019, Dynamic Nelson-Siegel 모형을 이용한 국고채 최적 투자 포트폴리오, *자산운용연구* 제7권 제1호, pp. 24-48.
- Bai, J., T. G. Bali, and Q. Wen, 2019, Common Risk Factors in the Cross-section of Corporate Bond Returns, *Journal of Financial Economics* 131, pp. 619-642.
- Caldeira, J. F., G. V. Moura, and A. A. P. Santos, 2016, Bond Portfolio Optimization using Dynamic Factor Models, *Journal of Empirical Finance* 37, pp. 128-158.
- Christensen, J. H., F. X. Diebold, and G. D. Rudebusch, 2008, An Arbitrage-Free Generalized Nelson-Siegel Term Structure Model, *Econometrics Journal* 12, pp. 33-64.
- Deguest, R., F. Fabozzi, L. Martellini, and V. Milhau, 2018, Bond Portfolio Optimization in the Presence of Duration Constraints, *The Journal of Fixed Income* 28, pp. 6-26.
- Diebold, F. and C. Li, 2006, Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields, *Journal of Econometrics* 130, pp. 337-364.
- Diebold, F. X., G. D. Rudebusch, and S. B. Aruoba, 2006, The Macroeconomy and the Yield Curve: A Dynamic Latent Factor Approach, *Journal of Econometrics* 131, pp. 309-338.
- Jostova, G., S. Nikolova, A. Philipov, and C. Stahel, 2013, Momentum in Corporate Bond Returns, *The Review of Financial Studies* 26, pp. 1649-1693.
- Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton, 1992, Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation, *Econometrica* 60, pp. 77-105.
- Korn, O. and C. Koziol, 2006, Bond Portfolio Optimization, *The Journal of Fixed Income* 15, pp. 48-60.
- Markowitz, H., 1952, Portfolio Selection, *Journal of Finance* 7, pp. 77-91.
- Puhle, M., 2008, Bond Portfolio Optimization, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer.
- Sack, Brian P., 2000, Using Treasury STRIPS to Measure the Yield Curve, Working Paper, Board of Governors of the Federal Reserve System. Washington
- Schnorrenberger, R. and G. V. Moura, 2017, Fixed-Income Portfolio Optimization Based on Dynamic Nelson-Siegel Models with Macroeconomic Factors for the Brazilian Yield Curve, Working paper.
- Thornton, D. L. and G. Valente, 2012, Out-of-Sample Predictions of Bond Excess Returns and Forward Rates: An Asset Allocation Perspective, *Review of Financial Studies* 25, pp. 3141-3168.
- Vasicek, O., 1977, An Equilibrium Characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Economics* 5, pp. 177-188.
- Woerheide, W. and D. Persson, 1993, An Index of Portfolio Diversification, *Financial Services Review* 2, pp. 73-83.



부 록

A. 이표채 투자수익률 계산시 경과이자 반영 방법

이표채의 투자수익률(holding period return)은 가격 변화 외에도 경과이자(accumued interest) 및 이표수익(coupon payment)이 발생하므로 다음과 같이 계산된다 (Jostova *et al.*; 2013, Bai *et al.*; 2019).

$$R_t^{[\tau_c]} = \frac{\left(P_{ct}^{[\tau_c - \frac{1}{12}]} + AI_t + CP_t \right) - \left(P_{c,t-1}^{[\tau_c]} + AI_{t-1} \right)}{P_{c,t-1}^{[\tau_c]} + AI_{t-1}} \quad (A.1)$$

여기에서 $P_{c,t}^{[\tau_c]}$ 는 만기가 τ_c 인 이표채의 t 시점 경과이자 제외가격(clean price)이다. AI_t 와 CP_t 는 각각 t 시점의 경과이자와 이표수익을 나타낸다.

그러나 본 연구는 이표채의 발행 시점의 채권을 매수하고 한 달 후 매도하는 것으로 가정하고 있다. 또한 이표채의 가격을 무이표채의 포트폴리오로 계산할 때 경과이자 포함가격(dirty price; $P_{c,t}^{[\tau_c]}$)을 사용하

므로 이표채 투자수익률은 다음과 같이 무이표채 투자 수익률($\log P_t^{[\tau - \frac{1}{12}]} - \log P_{t-1}^{[\tau]}$)의 포트폴리오로 좀 더 간략히 나타낼 수 있다.

$$R_t^{[\tau]} = \frac{\left(P_{ct}^{[\tau_c - \frac{1}{12}]} + AI_t \right) - P_{c,t-1}^{[\tau_c]} - \left(P_{dt}^{[\tau_c - \frac{1}{12}]} - P_{d,t-1}^{[\tau_c]} \right)}{P_{c,t-1}^{[\tau_c]}} = \frac{\left(P_{dt}^{[\tau_c - \frac{1}{12}]} - P_{d,t-1}^{[\tau_c]} \right)}{P_{d,t-1}^{[\tau_c]}} \quad (A.2)$$

$$\approx \log P_{dt}^{[\tau_c - \frac{1}{12}]} - \log P_{d,t-1}^{[\tau_c]} = w_{t-1} \left(\log P_t^{[\tau - \frac{1}{12}]} - \log P_{t-1}^{[\tau]} \right)$$

여기에서 $P_{c,t}^{[\tau_c]}$ 는 만기가 τ 인 이표채의 t 시점 경과이자 포함가격(dirty price)이고 $P_{t-1}^{[\tau]}$ 는 이표채의 만기를 구성하는 무이표채들의 만기 벡터 τ 로 이루어진 무이표채 가격의 벡터이고 w_{t-1} 는 이표채의 비중을 복제하는 무이표채의 비중 벡터이다. 즉 식(A.2)은 경과이자가 이미 이표채의 현재가치를 계산할 때 포함되므로 투자수익률 계산과정에서 이 부분이 반영된다는 것이다.

B. 이표채 벤치마크 투자전략의 투자성과

〈표 B〉 이표채 벤치마크 투자전략의 평균 투자성과

이 표는 외표본 기간(2016년 1월부터 2020년 12월까지)의 벤치마크 전략에 따른 투자성과를 정리한 것이다. 단일 만기 전략은 1,3,5,10,20년을 대상으로 하며 아령전략은 1년물과 20년물에, 사다리전략은 5개의 모든 만기에 동일한 비중을 두는 전략이다.

포트폴리오 구분	만기	수익률 평균(%)	초과수익률 평균(%)	표준 편차(%)	샤프 비율	평균 듀레이션(년)
아령(Barbell)		2.59	1.32	4.52	0.29	18.23
	1	1.75	0.47	0.31	1.52	0.99
	3	2.11	0.83	1.06	0.78	2.94
	5	2.56	1.28	2.16	0.59	4.82
	7	2.87	1.59	3.20	0.50	6.62
	10	2.96	1.68	4.69	0.36	9.23
사다리(Ladder)	20	3.44	2.17	8.84	0.24	17.24
		2.59	1.32	4.52	0.29	6.97

주: 수익률 및 표준편차는 연율화 값이고 듀레이션은 연 단위이다.

Efficient KTB Portfolio using Coupon Bearing Bond Mean-Variance Optimization Model

Sang-Heon Lee* · Hosam Ki** · Geonho Choi***

Abstract

The purpose of this paper is to extend zero-coupon bond (ZCB) mean-variance portfolio optimization model to coupon bearing bond (CBB) counterpart and perform the empirical analysis for the efficient portfolio of KTB (Korean Treasury Bond). As KTB is issued as the semi-annual coupon bond, it is appropriate for CBB portfolio model to be used. We introduce the no arbitrage condition between CBBs and ZCBs as an additional constraint into an otherwise standard mean-variance bond optimization model. From the empirical analysis of KTB from 2006 to 2020, our finding is four-fold. First, the optimal CBB portfolio is similar to ZCB portfolio. Second, CBB portfolio is slightly different from the ZCB portfolio when considering target duration constraint. Third, the selection of maturities and introduction of strips result in the substitution effect between maturities. Fourth, from the perspective of financial institutions such as bank and insurance companies, some concentrated allocations (corner solutions) and the abrupt changes in weights are needed to be mitigated. The implication of our study is that it is appropriate to use this parsimonious CBB portfolio optimization model for strategic bond portfolio management.

Key words: *coupon bearing bond, mean-variance optimization, Sharpe ratio, diversification effect, dynamic Nelson-Siegel model*

Article history : Received 30 April 2021, Revised 9 June 2021, Accepted 12 June 2021

JEL Classification: G17, E43, C53

* First author: NH Bank E-mail: shlee725@gmail.com

** KB Bank, E-mail: hosamki@gmail.com

*** Corresponding author: Professor of Economics, Dong Duck University, E-mail: geonhochoi@dongduk.ac.kr