

## 적립배율에 기반한 자산배분 모형\*

이 재 현\*\* (숭실대학교)

### Abstract

적립배율은 자산규모를 지출로 평가한 기금의 구매력지표이자 재정건정성 지표이다. 부과방식 혹은 부분적립 방식을 따르는 사업성 기금의 재정지표로 활용될 수 있다. 본 연구는 적립배율의 변동 요인인 지출성장률과 사업수지에 대한 특성을 반영하는 자산배분 모형을 연구하였다. 적립배율의 위험을 줄이기 위해서는 지출성장률과는 양의 상관관계, 사업수지와는 음의 상관관계를 갖는 자산군이 유리함을 증명하였다. 이를 통해 최적 위험자산 투자비중을 유도하는 방법론에 대해 분석하였다. 그 결과 자산중심접근법에 의한 손실위험제약과 비교하였을 때 적립배율 위험제약을 사용할 경우 손실위험제약에서는 투자 불가능한 집합이 적립배율 위험제약하에서는 투자가능한 집합이 도출될 수 있음을 증명하였다. 명시적인 부채가 없는 사업성 기금에 ALM(자산부채종합관리) 기반의 자산배분 모형으로 활용될 수 있기를 기대한다.

## 1 서론

최근 연기금들이 자산부채종합관리(ALM)에 대한 필요성을 인식하기 시작하였다. 연기금에 있어서 ALM은 제도과 기금운용을 통합적으로 고려하여 의사 결정을 내리는 방법론이다. 다만, ALM이라는 용어에서 나타나듯이 부채(혹은 잠재부채)가 없는 연기금에 있어서는 ALM에 대한 필요성에 대해 적극적으로 인식하고 있지 않다. 이런 이유로 대체로 명시적이거나 잠재부채를 인식할 필요가 없는 제도 혹은 기관에서 ALM 도입에 적극적이지 않다. 그러나 제도와 통합적

으로 의사결정한다는 취지에서의 ALM 방법론은 부채가 존재하지 않은 제도에서도 그 필요성이 존재한다. 흔히 ALM에서 가장 많이 사용되는 적립비율의 개념은 저장(stock)의 개념에서 “자산/부채”로 통상 정의되지만, 유량(flow)의 개념으로 “수입/지출”의 비율로 정의되기도 한다.

또한, 많은 수의 연기금의 투자정책서에서는 기금의 실질가치를 유지하는 것을 운용의 목적으로 두고 있다. 다만, 기금의 실질가치를 측정하는 구체적인

\* 본 연구는 펀드평가 3사(한국펀드평가, Fn가이드, 제로인)의 성균관대학교 자산운용연구센터(CAPM) 연구비 지원으로 수행되었습니다.

주제어 : 자산배분, 적립배율, ALM

JEL 분류기호 : G11, G20

\*\* 숭실대학교 금융학부 조교수, E-mail : jaylee@ssu.ac.kr



실행 지표는 다수의 연기금에서 이를 적시하고 있지 않다. 실질가치는 기금의 구매력을 의미하는데, 기금이 존재하는 역할 측면에서의 관리 지표가 요구된다. ALM 지표는 이러한 기금의 구매력과 연결된다. 자산을 부채로 나눈 적립비율은 자산의 구매력을 부채 규모로 평가한 것으로 1%의 운용수익률이 적립비율%의 부채조달비용을 보존해주는 것을 의미한다. 자산을 보험료 부과대상인 총소득 혹은 보증잔액으로 나눈 비율인 투자레버리지는 자산의 구매력을 사업규모로 평가한 것으로 1%의 운용수익률이 투자레버리지%의 보험료율을 보존해주는 것을 의미한다. 마지막으로 본 연구의 대상이 되는 자산을 지출로 나눈 적립비율은 자산의 구매력을 총지출로 평가한 것으로 1%의 운용수익률이 적립비율%의 지출성장률을 보존해주는 것을 의미한다. 이렇듯 ALM지표는 자산의 기능을 구매력 관점에서 설명할 수 있다.

본 연구는 명시적 부채가 없는 다수의 사업성 기금에 적합한 적립배율(자산/지출)에 기반한 자산배분 모형을 제공하는 것을 목적으로 한다. 자산배분의 시초적 연구라 할 수 있는 Markowitz(1952) 모형 이후 소비가 자산배분 모형에 포함되기 시작하면서 Campbell and Viceira(2001,2002)에 의해 장기투자자의 전략적 자산배분에 대한 이론적 연구가 시작되었으나 이를 ALM에 의한 전략적 자산배분으로는 확대되지 않았다. Markowitz(1952)의 평균분산 모형은 자산의 위험-수익 측면만을 본 것으로 제도의 특성을 반영하지 못하였다. 제도의 특성을 반영하려는 ALM 모형은 시뮬레이션에 의한 방법(Boender et al, 2007)과 평균분산 틀내에서 제도 변수를 고려하는 최적화 모형으로 구분되어 발전되어 왔다. 평균분산 틀내에서의 최적화 모형에 대한 연구의 시작으로는 Leibowitz and Henriksson(1988), Sharpe and Tint(1990), Ezra(1991), Leibowitz, et al.(1994)에서 자산에서 부채를 차감한 잉여수익(Surplus) 기반으로 한 최적화 방법론을 제시되어 평균분산 방법론에 의한 ALM 모형에 대한 연구가 시작되었다. 이들 연구와 앞서 언급한 Campbell and Viceira 모형의 연관성은 지출과의 상관관계의 중요성과 이에 대한 자산배분 모형안에서

의 반영이라는 공통점이 있다. 국내의 경우 박세영(2020), 이경희, 성주호(2008), 김용기 외 2인(2016), 이수진 외 2인(2018) 등에 의해 평균분산 틀내에서 제도변수와와의 통합적 분석에 의한 자산배분 모형이 제시되었다. 박세영(2020)은 소득에 따라 최적소비 및 최적투자 전략에 대한 연구로 개인ALM 측면의 연구이다. 이경희, 성주호(2008)는 잉여금 최적화 모형을 퇴직연금에 적용하였으며, 김용기 외 2인(2016)은 Leibowitz, et al.(1994)의 Surplus 모형이 부채의 변동을 고려하지 못함을 지적하고 적립비율 자체의 변동 위험을 헤징하는 모형을 제시하였다. 이수진 외 2인(2018)은 부분적립방식의 재정방식을 따르는 보험성 연기금에 적합한 투자레버리지를 목표지표로 하는 자산배분 모형을 제시하였다. 따라서 다양한 ALM 지표 중 지출을 구매력 평가기준으로 하는 적립배율에 관한 자산배분 모형이 제시될 필요성이 있다.

본 연구의 주제인 적립배율은 재정건전성을 측정하는 하나의 지표이고 이와 관련해서는 재정방식(funding system)의 이해와 무관하지 않다. 유호선(2020)에 따르면 국제노동기구에 의해 분류된 재정방식은 크게 부과방식(PAYG), 완전적립방식(Fully Funded System), 부분적립방식(Partially Funded System)으로 구분된다. 부과방식은 당해연도 수입으로 당해연도 지출에 사용하는 방식이다. 완전적립방식은 부채로 자금을 조달하여 자산을 운용하여 미래 부채 상환에 대비하는 방식이다. 이러한 완전적립방식은 부채로 자금을 조달하지 않더라도 연금과 같이 미래 지급 의무가 있는 급여에 대한 현재가치를 의미하는 잠재부채를 위해 자산을 적립하는 방식으로도 이해된다. 부과방식과 완전적립방식에서 기금의 역할은 제도의 충격에 대비하는 것이다. 이때 제도의 충격은 부과방식에서는 유량의 개념으로 완전적립방식은 저량의 개념으로 측정해야 할 것이다. 부분적립방식의 경우는 부과방식과 완전적립방식이 혼합된 형태이다. 만일 잠재부채가 현재 자산규모에 비해 매우 커서 완전적립방식으로 제도가 운영되기 어려운 경우 장기적으로 부과방식으로 이행을 준비해야 하는데 이에 대한 과도기로 인식되는 재정방식이다. 따라서 기금의

역할은 부과방식으로 이행되는 시점을 가급적 늦추는 역할을 수행해야 한다. 동일한 연기금이라도 하더라도 재정방식을 다양하게 이해해 볼 수 있는데, 엄밀히 말하면 특정 연기금이 어떤 재정방식을 따르는가가 아니라 어떤 재정방식으로 이해하는 것이 적절한가가 기금운용전략에 있어 더 합리적이라고 볼 수 있다. 재정지표 역시 적립비율(자산/부채), 투자레버리지(자산/총소득), 적립배율(자산/지출) 등이 대표적이지만 자산을 어떤 제도변수로 구매력을 평가하느냐에 따라서 다양한 재정지표를 고려해 볼 수 있다. 또한, 재정지표 역시 재정방식과 일대일로 정확히 매핑되는 구조는 아니다. 해당 재정방식을 적용할 때 어느 재정지표가 더 적절한가가 중요하기 때문이다. 이런 관점에서 적립배율은 기본적으로 부분적립방식에서 부과방식으로 이행되기 전의 제도 지속성과 재정 건정성을 나타내는 지표로 많이 활용되는데, 부과방식을 따르는 일부 연기금에서도 활용될 수 있다. 다만, 완전적립방식에서 적립배율은 적립비율(자산/부채)이라는 재정지표에 비해 정보 열위에 있기 때문에 사용하는 것이 적합하지 않을 뿐이다. 부과방식하에서 기금은 제도에서 발생하는 충격에 대비하기 위한 버퍼로 정의된다. 그런데 그 적정기금의 크기가 지출로 표준화하여 표현

할 경우 이는 적립배율의 형태를 띠게 된다. 또한, 부과방식 혹은 부분적립방식은 대부분의 사업성 기금의 재정방식이다. 사업성 기금은 특수 목적 사업을 위해 당해연도 수입으로 지출에 충당하게 된다. 이때 미래 발생 가능한 잠재 부채를 갖고 있어 이에 대한 적립을 위해 수입이 지출보다 더 많을 경우 부분적립방식으로 정의되기도 한다. 또한 사업성 기금의 재정목표가 기금의 실질가치라는 추상적 목표를 두고 있음을 고려할 때 적립배율은 현실적으로 연기금이 사용할 수 있는 지표로서 기능을 수행할 수 있다. 왜냐하면 적립배율은 정의상 지출의 성장률을 기금의 운용수익으로 조달해야 하며, 동시에 장기적 제도 지속 가능성을 위해서는 기금의 운용수익률이 매우 중요하기 때문이다.

이에 본 연구는 부과방식 혹은 부분적립방식을 따르는 사업성 기금에서 활용될 수 있는 ALM 기반의 자산배분 모형을 제시하고자 한다. 우선 2장에서는 적립배율위험 기반의 자산배분 모형을 제시한다. 간단히 자산군을 주식과 채권으로만 정의할 경우 닫힌 해를 얻을 수 있는데 이해를 통해 그 특징을 살펴본다. 3장에서는 수치분석을 통해 해의 특징을 살펴보고 4장에서 결론을 제시하기로 한다.

## [ 2 ] 모 형

### 2.1 적립배율과 기금의 동태 방정식

적립배율은 기금의 규모를 지출로 나눈 배율이다. 통상 당해연도 지출로 나누어지기도 하고 차년도 지출 예상액으로 나누어지기도 한다. 본 연구에서는 모형 전개의 편의를 위해 당해연도 지출로 나눈 적립배율을 사용하기로 한다. 적립배율은 현재의 자산규모로 몇 년도의 지출을 충당할 수 있는지를 의미하는 재정 건전성 지표이다. 그리고 사업성 기금의 경우 1배를 기본적으로 목표로 하지만 이에 대해서는 목표수익률을

언급할 때 다시 논의하기로 하자.

기금의 자산은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$A_t = A_{t-1}(1 + r_t) + C_t - P_t \quad (1)$$

(여기서  $A_t$ : t 시점의 자산,  $r_t$ : t 시점의 운용수익률,  $C_t$ : t 시점의 수입,  $P_t$ : t 시점의 지출을 의미한다.)

식(1)을  $P_t$ 로 나누면 다음과 같이 정리된다.



$$\frac{A_t}{P_t} = \frac{A_{t-1}}{P_{t-1}} \frac{1+r_t}{1+\tau_t} + \frac{C_t}{P_t} - 1 \quad (2)$$

(여기서  $\tau_t$  : t 시점의 지출 성장률이다.)

적립배율은  $\frac{A_t}{P_t}$ 로 정의되기 때문에 식(2)은 아래와 같이 다시 쓸 수 있다.

$$m_t = m_{t-1} \frac{1+r_t}{1+\tau_t} + n_t \approx m_{t-1}(1+r_t-\tau_t) + n_t \quad (3)$$

(여기서  $m_t$  : t 시점의 적립배율,  $n_t$  : t 시점의 지출대비 수지를 의미한다.)

적립배율은 식(3)에 따르면 지출성장률 조정 수익률과 지출대비 수지에 의해 변동함을 알 수 있다.

## 2.2 목표수익률

식(3)에서 수익률과 지출성장률, 지출대비 수지에 해당하는 변수를 상수(장기적 추세값으로 이해할 수 있다)로 가정하여 t시점에서 t+T 시점까지 확대하여 전개하면 다음과 같다.

$$m_{t+T} = m_t(1+r-\tau)^T + \sum_{i=1}^T n(1+r-\tau)^{i-1} \quad (4)$$

식(4)에 따르면 흑자 수치 여부와 수익률, 지출성장률의 크기에 따라 미래 재정상태가 결정된다. 즉 다음의 표와 같이 정리된다.

T시점을 무한대로 확대하면, 만일 지출성장률이 운용수익률보다 클 경우 식(4)의 앞부분은 0으로 수렴하고 식(4)의 뒷부분은 아래와 같이 수렴된다.

$$\bar{m} = \frac{n}{\tau-r} \quad (5)$$

식(5)의  $\bar{m}$ 은 수렴되는 적립배율의 크기가 된다. 이러한 모수조건에 있는 연기금은 결국 목표수익률 r의 크기에 의해 목표적립배율이 1:1 매칭되는 상황이 발생한다. 혹은 목표수익률은 다음과 같이 정의된다.

$$r = \tau - \frac{n}{m} \quad (6)$$

즉, 식(6)에서의 목표 적립배율을  $\bar{m}$ 로 정의한다면 목표수익률은 단순한 구조의 산식으로 정의될 수 있다. 이런 관점에서 사실 엄밀히 말한다면 적립배율을 재정 지표로 할 경우 부채는 지출이 되고, 운용수익률은 지출성장률을 보존하는 구조가 될 것이다. 그리고 만일 수지가 균형( $n=0$ )이고 목표수익률이 지출성장률이라면 현재 적립배율이 무한히 유지되는 상황이 발생한다.

그런데, 적자구조에서 지출성장률이 운용수익률보다 높다면 기금 자산의 구매력은 감소하다가 결국 소진되게 된다. 식(4)의 앞부분에서 0으로 수렴되는 수준과 뒷부분의 음수의 크기가 역전되는 시기가 존재하기 때문이다. 이때는 제도개선이 필요할 것이다. 그리고 흑자구조에서 운용수익률이 지출성장률보다 높다면 식(4)의 앞부분과 뒷부분 모두 무한대로 수렴되기 때문에 기금은 확산하게 되어 이 역시 지출을 늘리는 방향으로 제도 정책이 변경되어야 한다. 흔히 공공성을 갖고 있는 연기금에서는 이러한 구조는 찾아보기

〈표 1〉 모수에 따른 기금의 재정 상태

	수입 > 지출	수입 < 지출
지출성장률 > 운용수익률	수렴	소진
운용수익률 < 지출성장률	확산	안정 및 소진

어렵다. 마지막으로 적자 구조에서 지출 성장률이 운용수익률보다 낮을 경우 모수 조건에 따라 기금의 구매력이 감소되기도 하고 안정적으로 유지되기도 한다. 여기서 모수 조건은 식(4)의 앞부분의 성장과 뒷부분의 음수의 크기가 서로 상쇄되어 상승이나 하락 추세에 있어 발생하는 조건이다. 여기서 안정이라는 것은 기금의 구매력이 감소하더라도 상당한 시간이 지난 후에 소진되는 현상을 의미한다.

그렇다면 목표적립배율은 어떻게 설정하는 것이 타당할까? 이 부분은 완전히 정책적이다. 다만, 부과방식과 부분적립방식에서는 그 의미가 다르다. 부과방식의 경우 앞서 언급한대로 기금은 제도에서 발생하는 충격에 대비하는 버퍼의 성격을 갖고 있다. 기대적으로 수입과 지출은 같지만 충격이 발생할 경우 항상 균형수지를 달성하는 것은 어렵다. 따라서 수지의 위험량을 산출하여 이를 적정기금 규모로 할 경우 적정기금은 통상 지출대비 기금 규모로 표현된다. 왜냐하면 지출은 지속적으로 성장하는 특징을 갖고 있기 때문이다. 이에 비례하여 위험량 역시 증가하게 될 것이다. 부분적립방식에서는 목표로 하는 적립배율의 크기는 좀 더 정책적이다. 사실 가장 좋은 방법은 모수조건을 수렴되는 조건으로 구성하고 제도의 위험을 고려하여 목표적립배율을 크기를 설정한 후 식(6)과

같은 목표수익률을 설정하는 것이다. 그러나 현실적으로 제도를 변경하는 것은 자산운용정책을 수립하는 것보다 더 까다롭기 때문에 소진이 되는 조건에서 벗어나기 어렵고 가급적 소진기간을 연장하는 방향으로 목표를 설정하는 것이 일반적이다. 아래 <표 2>를 통해 각국의 공적연금의 재정 목표를 참고할 수 있다.

국민연금기금의 경우에도 공식적으로 재정지표를 언급하고 있지는 않지만 재정계산 시 재정 안정화 조건으로 2070년에 적립배율 1배 등과 같은 목표를 통해 보험료율 및 소득대체율 등의 제도변수를 산출하고 있다.

### 2.3 적립배율 위험

식(3)을 통해 적립배율의 기댓값과 위험을 아래와 같이 측정할 수 있다.

$$E[m_t] = \mu_m = m_{t-1}(1 + \mu_A - \mu_r) + \mu_n \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[m_t] &= \sigma_m^2 = m_{t-1}^2(\sigma_A^2 + \sigma_r^2 - 2\sigma_{Ar}) \\ &\quad + \sigma_n^2 + 2m_{t-1} - \sigma_{An} - 2m_{t-1}\sigma_m \\ &= \{m_{t-1}^2(\sigma_A^2 - 2\sigma_{Ar}) + 2m_{t-1}\sigma_{An}\} \\ &\quad + m_{t-1}^2\sigma_r^2 + \sigma_n^2 - 2m_{t-1}\sigma_m \end{aligned} \quad (8)$$

<표 2> 주요 국가들의 재정방식 및 재정목표

구분	재정방식	재정목표
독일	완전부과방식	- 법정적립배율(1개월 연금지출의 0.2~1.5) - 보험료율 상한, 소득대체율 하한 설정
스웨덴	완전부과방식	- 장기 자산과 부채비율의 균형 유지 (완충기금 장기 유지, 현재 수입으로 현재의 지출을 충당)
영국	완전부과방식	- 적립배율(연간 연금 급여지출의 최소 1/6 준비금 보유)
미국	부과방식 (부분적립)	- 단기(10년) : 향후 10년간 적립배율 최소 1배유지 - 장기(75년) : 향후 75년간 수지 균형
일본	부과방식 (부분적립)	- 100년 후 적립배율 1배 - 보험료율 상한, 소득대체율 하한 설정
캐나다	부분적립	- 향후 예측 가능한 기간동안 일정 적립배율 유지(보통 5~6배) - 보험료율을 최저화하거나 안정화

자료 : 국민연금연구원, 2016, 재정목표 및 재정지표의 국제비교연구



(여기서,  $\mu_A$ : 기대수익률,  $\mu_r$ : 기대 지출성장률,  $\mu_n$ : 기대 지출대비 수지비율,  $\sigma_A$ : 자산변동성,  $\sigma_r$ : 지출성장률 변동성,  $\sigma_n$ : 지출대비 수지비율의 변동성,  $\sigma_{Ar}$ : 자산과 지출성장률의 공분산,  $\sigma_{An}$ : 자산과 지출대비 수지비율간의 공분산을 나타낸다.)

식(8)에서 수익률과 제도변수 간의 공분산은 다시 아래와 같이 분해된다.

$$\sigma_{Ar} = \sum w_i \rho_{i,r} \sigma_i \sigma_r, \quad \sigma_{An} = \sum w_i \rho_{i,n} \sigma_i \sigma_n \quad (9)$$

(여기서  $w_i$ :  $i$ 자산의 투자비중,  $\sigma_i$ :  $i$ 자산의 변동성,  $\rho_{i,r}$ :  $i$ 자산과 지출성장률의 상관계수,  $\rho_{i,n}$ :  $i$ 자산과 지출대비 수지비율의 상관계수를 나타낸다.)

식(8)과 식(9)를 통해 적립배출 위험은 다양한 요인에 의해 영향을 받지만 지출성장률과는 상관관계가 높은, 수지비율과는 상관관계가 낮은 자산군이 많이 포함될수록 낮아지게 된다. 이는 Campbell and Viceira(2001)에서 소비를 포함하는 자산배분 모형을 고려할 경우 소비증가율과 자산수익률의 공분산이 위험자산의 비중에 영향을 주고 있음과 맥락을 같이 한다.

또한 식(8)의 경우  $\{ \}$  부분은 자산운용으로 인한 위험을 의미하고 그 이외에는 제도변수에 의해서만 나타나는 위험으로 분해된다. 이는 자산운용으로 인해 제도에 주게 되는 추가적 위험을 나타낸다. 만일 수익률 변동성이 0이라고 한다면 적립배출은 완전히 제도변수에 의해서만 변동되게 될 것이다. 이러한 특징은 적립배출 위험의 임계값을 사용할 때 다시 논의하자.

## 2.4 자산배분

적립배출 위험을 기반으로 자산배분 해를 산출할 수 있는 모형을 유도할 수 있다. 우선 자산배분은 쌍대문제가 존재하는 데, 위험제약하의 기대수익률 극대화와 목표수익률 제약하의 위험 최소화로 문제를

정의할 수 있다. 우선 기대수익률 극대화 문제를 살펴 보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{(문제 P1)} \quad w_i^* &\in \arg \text{Max} \mu_A = \sum w_i \mu_i \\ \text{(제약조건)} \quad \text{s.t.} \quad &\Pr[m_t \leq \underline{m}] \leq k \text{ (적립배출 위험 제약)} \\ &w_i \geq 0, \quad \sum w_i = 1 \text{ (투자비중 제약)} \end{aligned}$$

제약조건 중에서 적립배출 위험제약은 적립배출이  $\underline{m}$ 가 될 확률을  $k$ 이하로 되는 제약으로 전통적인 자산수익률 Shortfall 제약과 같은 맥락으로 이해할 수 있다. 여기서 적립배출 위험제약은 적립배출 VaR로 표현할 수 있는데, 1 year  $1-k$  Asset to Expenditure Ratio at Risk(AEaR)로 부르기로 하자. 적립배출 위험제약을 표준화하여 등식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\underline{m} - \mu_m = z_k \sigma_m \quad (10)$$

식(10)에서  $z_k$ 는 표준화된 적립배출 분포에서의 임계값이다. 지출 대비 수지비율의 분포가 정규분포가 아닐 수 있기 때문에 정규분포의  $z_k$ 와는 차이가 있다. 그러나 수지출 대비 수지비율의 변동성이 크지 않다면 표준화 정규분포와 근사할 것으로 추정된다. 모형의 편의상 정규분포로 가정하여 논의를 전개하자.

그리고  $\underline{m}$ 는 위험제약 상 임계 적립배출이 된다.  $\underline{m}$  역시 정책적으로 결정할 수 있으나 식(8)에 의하면 자산운용으로 인해 원래 갖고 있던 제도변수 변동에 의한 최저 적립배출 수준이하로 떨어지지 않게 설정할 수 있다. 이 때 임계 적립배출은 식(8)에서 자산 변동성을 0으로 설정하여 제도변수에 의해서만 변동하는 적립배출의 위험 수준 값을 VaR의 형태로 설정하는 것도 제안된다. 이 제약은 자산운용으로 인해 원래 제도가 갖고 있던 위험 수준 이상으로 하락하지 않게 하겠다는 의미이다.

다음으로 주어진 목표수익률 하에서 위험을 최소화 하는 자산배분 모형을 고려할 수 있다.

(문제 P2)  $w_i^* \in \arg \text{Min } \sigma_m^2$   
 (제약조건) s.t  $\mu_m = \bar{m}$  (목표 적립배율 제약)  
 $w_i \geq 0, \sum w_i = 1$  (투자비중 제약)

목표 적립배율을 달성하면서 적립배율 위험을 최소화 하는 문제로 목표 적립배율은 앞서 언급한 바대로이다. 이 문제에서는 식(8)을 최소화하게 되는 데, 기대수익률이 목표수익률을 달성하는 제약하에 이루어진다. 그리고 목적함수에 적립배율의 변동성 대신에 P1의 위험제약인 AEaR을 최소화하는 문제로도 전환할 수 있다.

두 문제 모두 닫힌 해를 찾는 것은 쉽지 않다. 다만, 자산군이 위험자산과 무위험자산으로 2개일 때 무제약하에서의 적립배율 위험 최소화는 닫힌 해를 쉽게 관찰할 수 있다. 물론 자산군이 2개일 때는 복잡하기는 하지만 찾을 수 있으나 닫힌 해를 통해 해의 특징을 관찰하기에는 수식이 너무 복잡하다. 이런 특징은 3장 수치분석에서 자세히 다루기로 한다. P2의 경우 자산군이 2개이면 목표적립배율 제약조건으로 해가 도출된다. 이 역시 위험의 특징에 따른 해의 변화가 관찰되지 않기 때문에 무제약하의 적립배율 변동성 최소화 문제를 통해 닫힌 해의 특징을 파악해보자.

위험자산의 비중을  $w_E$ , 위험자산의 변동성을  $\sigma_E$  라고 할 때 식(8)을 최소화하는 위험자산의 비중은

아래와 같다.

$$w_E^* = \frac{m_{t-1} \rho_{E\tau} \sigma_\tau - \rho_{En} \sigma_n}{m_{t-1} \sigma_E} \quad (11)$$

식(11)을 통해 다음과 같은 특징을 파악할 수 있다.

- (1) 위험자산과 지출성장률의 상관관계가 높을수록 위험자산 비중은 증가한다.
- (2) 위험자산과 지출대비 수치비율의 상관관계가 높을수록 위험자산 비중은 감소한다.
- (3) 지출변동성이 클수록 위험자산 비중은 증가한다. 그리고 위험자산 변동성, 지출대비 수치비율의 변동성이 클수록 위험자산 비중은 감소한다.
- (4) 전기 적립배율은 위험자산과 지출대비 수치비율의 상관계수인  $\rho_{En}$ 의 부호에 의해 같은 방향으로 위험자산 투자비중에 영향을 준다.

적립배율 위험최소화를 위한 위험자산의 투자비중의 특징 중 (1),(2),(3)은 직관적으로 쉽게 이해할 수 있다. 수익률과 재정에 같은 방향으로 움직이는 변동성은 도움이 되지 않기 때문이다. (4)의 특징<sup>1)</sup>은 수지와 위험자산이 같은 방향으로 움직일 때는 적립배율이 높을수록 위험자산 투자비중을 늘려야 하고 상관계수가 음수인 경우는 그 반대가 됨을 의미한다.

## [ 3 ] 수치분석

### 3.1 Shortfall 위험제약

본 연구에서 제시되는 AEaR 위험제약과 통상 연구 분야에서 많이 사용하는 손실제약을 서로 비교하여 ALM

이 자산중심 접근법과 어떤 차이가 있는지 살펴보자. AEaR 위험제약은 식(10)과 같이 정의되어 있다. 자산중심접근법에서는 일반적으로 Shortfall 위험제약을 통해 손실위험을 통제한다. 그리고 등 위험선은 다음과

1)  $\frac{\partial w_E^*}{\partial m_{t-1}} = \frac{\rho_{En} \sigma_n}{m_{t-1}^2 \sigma_E}$



같다.

$$\mu_A + z_k \sigma_A = 0 \quad (12)$$

식(12)는 손실이 발생할 확률이  $k$ 가 되는 등 위험선이다. 그리고 자산 Shortfall선은 직선으로 정의된다.

식(10)과 식(12)의 비교를 위해 제도 변수에 대한 모수 가정이 필요하다. 그리고 아래와 같이 설정하였다.

$$m_{t-1} = 1, \mu_\tau = 4\%, \mu_n = -2\%, \sigma_\tau = 8\%, \sigma_n = 4\%, \rho_m = -0.5, k = 0.05$$

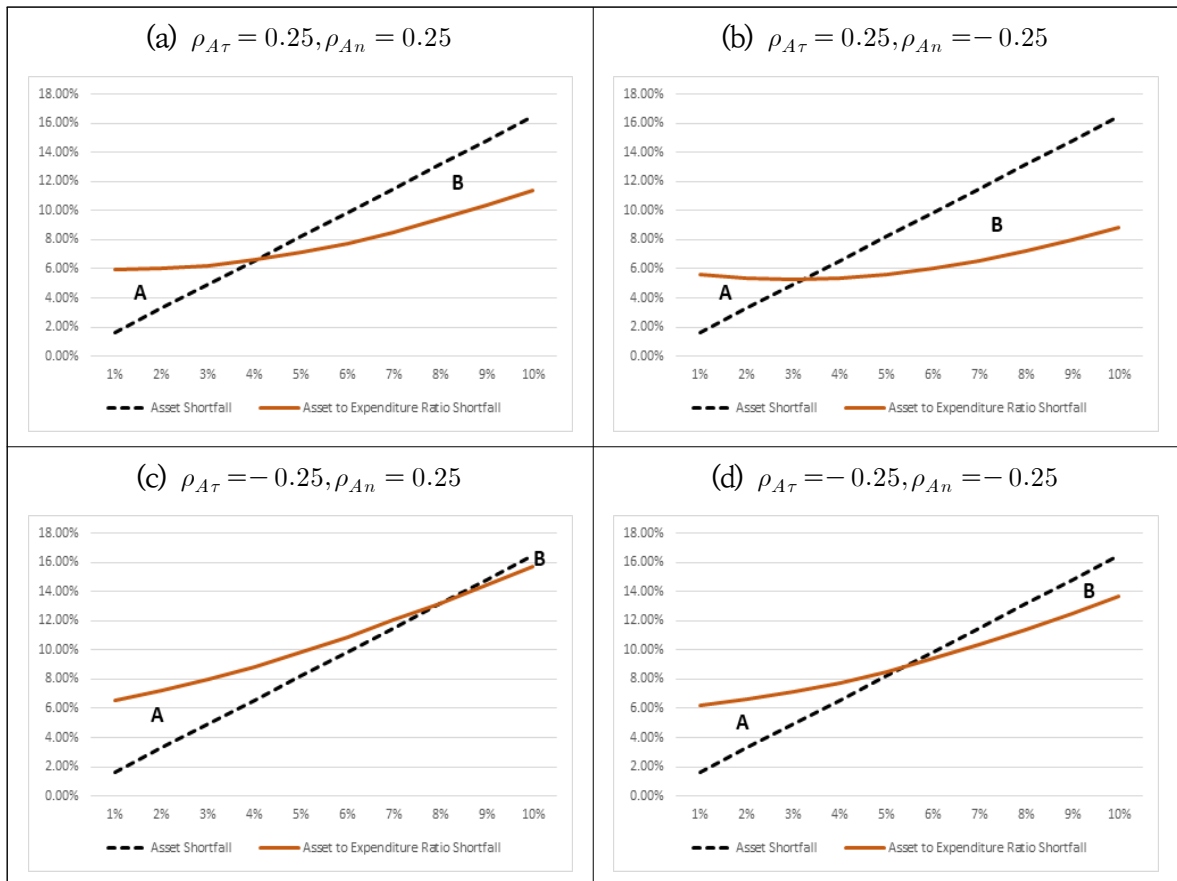
$$\text{위의 모수조건하에 } \underline{m} = m_{t-1} - 1.65\sigma_m^0 = 0.83$$

으로 산출된다. 이때  $\sigma_m^0$ 은 자산변동성이 0일 때 적립배율의 변동성을 의미한다.

위험-수익 평면에서 x축은 자산변동성이고 y축은 각각 식(10)과 식(12)를 만족하는 자산 기대수익률이다. 따라서 이 외의 변수는 결국 자산 수익률과 지출성장률, 지출대비 수지비율간의 상관계수인데, 이 조합에 따라 다음과 같은 그림이 도출된다.

〈그림 1〉은 자산이 하나라고 간주될 때 자산군과 제도변수간 상관관계에 따라 등위험선이 어떻게 변화되는지를 보여주고 있다. 우선 A영역은 자산위험계약으로는 투자가능하지만 적립배율 위험계약에서는 투자불가능한 영역이다. 그리고 B영역은 자산위험에서는 투자불가능하지만 적립배율 위험계약에서는 투자가능한 영역이다. 지출성장률과는 양의 상관관계 지출

〈그림 1〉 자산 Shortfall선과 AEA<sub>R</sub> 등 위험계약선



대비 수지비율과는 음의 관계가 적립배율 위험 상 가장 좋은 모수조건이다. <그림 1>에서 (b)에 해당하며 이 때 B영역의 크기가 가장 크게 나타난다. 모두 등위험 선이기 때문에 등위험선 위에서는 위험제약을 모두 만족하는 투자집합이다. 가장 불리한 모수조건인 (c)에서는 B영역의 크기는 매우 비현실적인 영역으로 축소된다. 이 경우 적립배율 위험제약은 자산위험제약에 비해 강한 제약조건이 된다. 이렇듯 자산중심접근법과 ALM에 의한 투자 정책은 차이가 있을 수 있음으로 보여주고 있다. 물론 주어진 제도변수의 모수조건에 따라 상이한 그림이 나타날 수 있다. 제도변수의 변동성보다는 기댓값에 의해 영향을 많이 받으며 지출성장률과 지출대비 수지 비율의 기댓값에 의해 상하로 움직이는 현상을 관찰할 수 있었다. 또한, 두 제약의 미달 확률을 5%로 설정하였는데 이 역시 상하로 움직이는 효과를 관찰하게 된다.

2차함수 형태로 AEaR 등 위험선이 나타나는 이유는 식(8), 식(10)에서 자산변동성의 2차함수로 나타나기 때문이다. 따라서 기율기에 영향을 주는 요소는 기초 적립배율, 상관계수, 제도 변수의 변동성이 될 것이다.<sup>2)</sup>

### 3.2 다양한 모수조건하에서 자산배분 해

자산배분은 <그림 1>에서 효율적 프론티어를 나타낸다면 효율적 프론티어 선과 각 위험제약선이 교차하는 구간에서 자산배분의 해가 산출되게 된다. 따라서 등 위험제약선의 상하 이동(shift), 기율기의 뒤틀림(twist)에 의해 그 해가 결정될 가능성이 크다. 특히 상하 이동에 영향을 주는 유의수준(shortfall 확률), 제도변수의 기댓값 등은 직접적으로 큰 폭의 해의 변화를 주게 된다. 따라서 최적 자산배분은 다양한 모수 조합내에서 산출될 가능성이 크다.

간단한 예제를 통해 이를 살펴보자. 자산군은 위험 자산과 무위험자산 두 개이며, 무위험자산의 변동성은 0으로 하고 위험자산의 기대수익률과 위험은 각각 6%와 12%를 가정한다. 무위험자산의 수익률은 2%로 가정하자. 이 이후는 완전히 제도변수와의 관계를 통해 포트폴리오의 속성이 결정되게 된다.

우선 제도변수와 관련된 시나리오를 가정하면 아래와 같다.

시나리오 1은 지출성장률이 낮고 적자인 구조이며 시나리오 2는 지출성장률이 높고 흑자인 구조를 가정하였다. 시나리오 3과 4는 시나리오 1과 2에서 지출성장률과 지출대비 수지비율의 상관관계를 변화 시킨 것으로 시나리오 1,2는 위험자산이 유리한 상황, 시나

<표 3> 수치분석 시나리오

	시나리오 1		시나리오 2		시나리오 3		시나리오 4	
	기댓값	변동성	기댓값	변동성	기댓값	변동성	기댓값	변동성
지출성장률	4%	8%	8%	8%	4%	8%	8%	8%
수지비율	-4%	4%	4%	4%	-4%	4%	4%	4%
위험자산과 제도변수의 상관계수								
지출성장률	0.25		0.25		-0.25		-0.25	
수지비율	-0.25		-0.25		0.25		0.25	

2) 식(8)의 { }에 있는  $\sigma_A$ 의 계수가 기율기의 변동을 이끈다.



리오 3,4는 불리한 상황을 가정한 것이다.

또한, 현재 적립배율과 임계 적립배율은 1절과 마찬가지로 1과 0.83을 설정하였다.

〈표 4〉를 살펴보면 시나리오 1은 〈표 1〉에서 소진, 안정 및 소진의 영역에 있다. 위험자산 비중이 50%이하에서는 장기적으로 소진되며, 그 이상에서는 장기적으로 안정된다. 주식투자비중에 따라 위험의 변동을 알 수 있는데, 자산 shortfall 확률은 비례적으로 증가하지만 적립배율 shortfall 확률은 크지는 않지만 감소하다가 증가하는 U형태의 그래프를 갖는다. 만일 10%의 유의수준을 적용할 경우 해가 없을 가능성이 존재한다. 다만, 적립배율 최소화할 경우 최적 위험자산 투자비중은 48.0%가 되며 이 때 Shortfall 확률은 10.1%가 된다. 물론 이 경우 기대수익률 3.9%는 목표수익률을 달성하고 있다면 해당 자산배분 해는 정책적 목표를 달성할 수 있다.

포트폴리오의 자산 속성은 모든 상황에서 시나리오 1과 같기 때문에 시나리오 2에서 시나리오 4까지는 적립배율 shortfall 확률 중심으로 살펴보자. 시나리오 3과 4는 시나리오 1과 2에 비해서 상관계수 속성이 좋지 못하다. 따라서 적립배율 Shortfall 확률이 각 시나리오 대비해서 증가한 것을 알 수 있다. 시나리오

3의 경우 적립배율 shortfall 제약을 10%로 설정할 경우 해가 없게 된다. 다만, 앞서 언급한 바대로 적립배율 shortfall 확률을 최소화하는 최적 위험자산투자비중은 시나리오 2에서는 42.4%, 시나리오 3에서는 2.3%, 시나리오 4에서는 0%가 된다. 즉, 상관계수가 위험자산과 불리한 방향으로 추정될 경우 시나리오 1과 2와 같은 U형태의 그래프는 존재하지 않고 자산 Shortfall과 같은 비례적으로 커지는 현상이 관찰된다. 그리고 시나리오 4에서 만일 적립배율 shortfall 확률 제약을 10%로 설정할 경우 해는 산출될 수 있다. 이 때 최적 위험자산 투자비중은 51.2%이다.

또한 목표수익률을 언급할 때 논의가 되었지만 시나리오 2와 4에서는 적립배율이 장기적으로 수렴되는 특징을 갖고 있다.

한편, 위의 시나리오 모두는 위험자산과 제도변수 간의 유리 혹은 불리한 상황만을 고려하였다. 존재되어 있는 경우를 파악하기 위해 시나리오 1의 모수를 기준으로 위험자산과 지출성장률, 지출대비 수지비율의 상관관계 조합을 (0.25, 0.25)인 상황을 시나리오 5, (-0.25, -0.25)인 상황을 시나리오 6으로 하여 시나리오 1에 대비하여 어떻게 위험에 대한 값이 변화하는 지 살펴보자.

〈표 4〉 시나리오 1에서의 포트폴리오 속성

위험자산 투자비중	포트폴리오 기대수익률	포트폴리오 위험	기대 적립배율	적립배율 위험	자산 Shortfall	적립배율 Shortfall
0.0%	2.0%	0.0%	94.0%	10.6%	0.0%	13.9%
10.0%	2.4%	1.2%	94.4%	10.3%	2.3%	12.5%
20.0%	2.8%	2.4%	94.8%	10.2%	12.2%	11.4%
30.0%	3.2%	3.6%	95.2%	10.2%	18.7%	10.6%
40.0%	3.6%	4.8%	95.6%	10.3%	22.7%	10.3%
50.0%	4.0%	6.0%	96.0%	10.6%	25.2%	10.2%
60.0%	4.4%	7.2%	96.4%	11.0%	27.1%	10.3%
70.0%	4.8%	8.4%	96.8%	11.5%	28.4%	10.7%
80.0%	5.2%	9.6%	97.2%	12.1%	29.4%	11.3%
90.0%	5.6%	10.8%	97.6%	12.8%	30.2%	12.0%
100.0%	6.0%	12.0%	98.0%	13.6%	30.9%	12.7%

시나리오 5,6과 상관계수를 제외하고 모두 동일한 모수조건에서 적립배율 위험은 모두 시나리오 1에

비해 증가하였다. 적립배율 위험을 최소화하는 위험자산 비중은 시나리오 5에서 34.5%, 시나리오 6에서는

〈표 5〉 시나리오 2~4에서의 포트폴리오 속성

위험자산 투자비중	시나리오2			시나리오3			시나리오4		
	기대적립 배율	적립배율 위험	적립배율 Shortfall	기대적립 배율	적립배율 위험	적립배율 Shortfall	기대적립 배율	적립배율 위험	적립배율 Shortfall
0.0%	98.0%	10.6%	7.2%	94.0%	10.6%	13.9%	98.0%	10.6%	7.2%
10.0%	98.4%	10.3%	6.2%	94.4%	11.0%	14.0%	98.4%	11.0%	7.4%
20.0%	98.8%	10.2%	5.5%	94.8%	11.5%	14.3%	98.8%	11.5%	7.9%
30.0%	99.2%	10.2%	5.1%	95.2%	12.1%	14.8%	99.2%	12.1%	8.4%
40.0%	99.6%	10.3%	4.9%	95.6%	12.8%	15.4%	99.6%	12.8%	9.1%
50.0%	100.0%	10.6%	4.9%	96.0%	13.6%	16.0%	100.0%	13.6%	9.9%
60.0%	100.4%	11.0%	5.2%	96.4%	14.4%	16.8%	100.4%	14.4%	10.7%
70.0%	100.8%	11.5%	5.6%	96.8%	15.3%	17.5%	100.8%	15.3%	11.6%
80.0%	101.2%	12.1%	6.2%	97.2%	16.2%	18.2%	101.2%	16.2%	12.4%
90.0%	101.6%	12.8%	6.8%	97.6%	17.1%	19.0%	101.6%	17.1%	13.3%
100.0%	102.0%	13.6%	7.6%	98.0%	18.1%	19.7%	102.0%	18.1%	14.1%

〈표 6〉 시나리오 5, 6에서의 포트폴리오 속성

위험자산투자비중	시나리오5 상관계수 조합 (0.25, 0.25)			시나리오6 상관계수 조합 (-0.25, -0.25)		
	기대적립배율	적립배율 위험	적립배율 Shortfall	기대적립배율	적립배율 위험	적립배율 Shortfall
0.0%	94.00%	10.58%	13.94%	94.00%	10.58%	13.94%
10.0%	94.40%	10.54%	13.01%	94.40%	10.76%	13.52%
20.0%	94.80%	10.63%	12.43%	94.80%	11.07%	13.40%
30.0%	95.20%	10.85%	12.16%	95.20%	11.50%	13.54%
40.0%	95.60%	11.20%	12.18%	95.60%	12.03%	13.87%
50.0%	96.00%	11.66%	12.42%	96.00%	12.65%	14.36%
60.0%	96.40%	12.22%	12.84%	96.40%	13.35%	14.96%
70.0%	96.80%	12.87%	13.40%	96.80%	14.12%	15.62%
80.0%	97.20%	13.60%	14.05%	97.20%	14.95%	16.33%
90.0%	97.60%	14.39%	14.76%	97.60%	15.82%	17.05%
100.0%	98.00%	15.23%	15.50%	98.00%	16.73%	17.77%



19.4%로 시나리오 1의 48%에 비해서는 감소하였다. 즉, 유불리함이 혼재되어 있는 경우에는 상관계수가 위험자산과 유리한 상황인 시나리오 1과 불리한 상황

인 시나리오 3의 중간 정도의 속성을 유지한다. 그리고 상대적으로 지출성장률과 상관관계가 더 위험을 감소시키는 경향을 갖고 있다.

## [ 4 ] 결론

본 연구는 대부분의 사업성 기금에 적용가능한 적립 배율을 기반으로 하는 자산배분 모형을 제시한다. 적립배율을 목표지표로 사용할 수 있는 재정방식은 부과 방식 혹은 부분적립방식이다. 목표 설정의 차이는 있을 수 있다고 하더라도 결국 적립배율로 관찰하는 위험은 자산군이 제도변수와 갖는 상관관계에 영향을 받는 것은 공통적이다. 이러한 특징은 ALM적으로 매우 중요한데, 명시적인 부채가 없는 대다수의 사업성 기금에서 실제 제도 특성에 부합하는 자산배분 모형이 필요가 없는 것은 아니다. 그리고 지출은 사업성 기금에게 있어 부채로 간주되며, 동시에 사업수지는 유량형태의 적립비율이다.

본 연구는 제도 변수가 자산배분에 영향을 줄 수 있는 모형인 적립배율 기반의 자산배분 모형을 제안한다. 비록 많은 부분 모형의 편의상 간단한 것도 사실이지만 복잡할수록 모형의 실익이 있기 보다는 실행의 어려움이 더 클 수도 있다.

본 연구의 결론을 간단히 요약하면 다음과 같다. 기대적으로 주어진 지출성장률의 기댓값과 사업수지

의 추계값을 통해 목표로 하는 적립배율을 통해 목표수익률을 도출할 수 있다. 물론 목표 적립배율은 다소 정책적이기는 하지만 부과방식의 경우 사업수지의 위험량을 추정함으로써 지출로 평가되는 위험량의 크기를 통해 목표 적립배율을 탐색할 수 있다. 적립배율의 위험은 자산군과 지출성장률, 지출대비 수지비율 간의 상관관계수에 의해 영향을 받는다. 그리고 자산운용으로 인해 발생하는 추가적 위험이 크지 않게 설정할 수 있는 제약을 설정할 수 있으며 이를 우리는 적립배율 shortfall(AEaR)로 정의하였다.

위험자산의 투자비중은 상관관계가 유리한 방향일수록 자산 shortfall과 상이한 해가 도출될 수 있음을 살펴보았다. 기존의 자산배분 연구가 대체로 완전적립형 재정방식의 모형에 집중되어 있다는 점을 고려할 때 본 연구는 부분적립방식, 부과방식하에서 자산배분 모형을 제시하였다 점에서 의의를 갖는다. 본 연구를 통해 제도 특성에 부합하는 자산배분의 해를 찾을 수 있기를 기대한다.

## 참 고 문 헌

국민연금연구원, 2016, 재정목표 및 재정지표의 국제비교연구, 국민연금연구원 조사보고서

유호선, 2020, 연금제도의 지속가능성에 대한 이론적 고찰: 국제기구들의 논의를 중심으로, 사회보장연구, 제36권, 제2호, pp. 1-35.

김용기, 김대식, 이재현, 2016, 적립비율 위험(Funding Ratio at Risk) 제약 기반 자산배분 모형, 한국증권학회지, 제45권 제5호, pp. 953-970

박세영, 2020, 크고 부정적인 불확실성 경제충격을 고려한 최적자산배분 전략, 자산운용연구, 제8권 제2호, pp 1-25

이경희, 성주호, 2008, 잉여금 최적화 전략에 따른 퇴직연금 기금의 자산배분, 보험학회지, 제80호, pp. 169-202

이수진, 위경우, 이재현, 2018, 보험료율위험 기반 최적 자산배분, 금융연구, 제32권, 제2호, pp. 1-20

Boender G., C. Dert, F. Heemskerk, and H. Hoek, 2007, A Scenario Approach of ALM, Chapter 18 in Handbook of Asset and Liability Management Volume2 edited by S. A. Zenios and W.T. Ziemba

Campbell, J. Y., and L. M. Viceira. 2001. Who

Should Buy Long-Term Bonds? ,American Economic Review Vol 91. pp 99-127.

Campbell, J. Y., and L. M. Viceira. 2002. Strategic Asset Allocation: Portfolio Choice for Long-Term Investors. Oxford University Press.

Ezra, D. D., 1991, Asset Allocation by Surplus Optimization, Financial Analysts Journal, Vol. 47, No. 1, pp. 51-57

Leibowitz, M. L. and R. D. Henriksson, 1988, Portfolio Optimization Within a Surplus Framework, Financial Analysts Journal, Vol. 44, No 2., pp 43-51

Leibowitz, M. L., S. Kolgelman, L. N., Bader, and A. R. Dravid, 1994, Interest Rate-Sensitive Asset Allocation, Journal of Portfolio Management, Vol. 20, No. 3, pp. 8-15

Markowitz, H. 1952, Portfolio Selection, The Journal of Finance, Vol. 7, No 1., pp 77-91.

Sharpe, W. F., and L. G. Tint, 1990, Liabilities-A New Approach, THE Journal of Portfolio Management, Vol 16, No. 2, pp 5-10



# Asset Allocation Model Based On Asset to Expenditure Ratio

Jaehyun Lee\* (Soongsil University)

## Abstract

The asset to expenditure ratio is an indicator of a fund's purchasing power and financial soundness that evaluates the size of its assets by its expenditure. It can be used as a financial indicator of a government policy fund that follows the pay-as-you-go funding system or the partial funded system. This study studies an asset allocation model that reflects the characteristics of the expenditure growth rate and business balance, which are factors that change the asset to expenditure ratio. In order to reduce the risk of the asset to expenditure ratio, we prove that an asset class that has a positive correlation with the expenditure growth rate and a negative correlation with the business balance is advantageous. Through this, we propose the methodology for deriving the optimal weight of risky assets. As a result, we prove that when the asset to expenditure ratio risk constraint is used compared to the asset only shortfall constraint, a set that cannot be invested in the asset shortfall constraint can be investable under the asset to expenditure ratio risk constraint. It is expected that it can be used as an asset allocation model based on ALM (Asset and Liability Management) for a government policy fund which has no explicit liabilities.

**Key words :** *Asset Allocation, Asset to Expenditure Ratio, ALM*

Article history : Received 31 March 2022, Revised 24 April 2022, Accepted 14 May 2022

---

JEL Classification : G11, G20

\* School of Finance, Soongsil University, E-mail: jaylee@ssu.ac.kr

www.kci.go.kr