

## B-spline에 대한 근사변환의 실험적 분석

김혁진\*

### An Experimental Analysis of Approximate Conversions for B-splines

Hyeock-Jin Kim \*

#### 요약

서로 다른 기하학적 모델링 시스템을 사용하는 곡선 및 곡면의 자료 교환에서, 시스템이 지원하는 B-spline 곡선 및 곡면의 최대 차수에 제한이 있을 때, 주어진 허용 오차 범위 내에서 낮은 차수로의 차수 감소가 필요하다. 본 논문에서는 근사 변환의 한 방법인 B-spline 곡선의 차수 감소 방법을 적용한 실험적 결과를 제공한다. B-spline 곡선의 근사 변환에서 기존의 Bézier 곡선의 차수감소 방법들을 차수 감소 과정에 적용하고, 그 방법들을 비교 분석한다. knot 제거 알고리즘도 자료 감소를 위하여 차수 감소 과정에 적용한다.

#### Abstract

The degree reduction of B-splines is necessary in exchanging parametric curves and surfaces of the different geometric modeling systems because some systems limit the supported maximal degree. In this paper, We provide an our experimental results in approximate conversion for B-splines apply to degree reduction. We utilize the existing Bézier degree reduction methods, and analyze the methods. Also, knot removal algorithm is used to reduce data in the degree reduction process.

▶ Keyword : approximate conversion, degree reduction, B-spline, Bézier curve, knot removal

---

• 제1저자 : 김혁진

• 접수일 : 2005.01.10, 심사완료일 : 2005.03.17

\* 청운대학교 컴퓨터학과 부교수

본 논문은 청운대학교 학술연구조성비 지원에 의하여 연구되었음

## I. 서론

기하학적 모델링 시스템에 사용하는 곡선 및 곡면 내에서 B-spline의 근사변환 알고리즘들이 유용하게 사용된다. B-spline의 근사변환은 CAGD와 같은 응용 분야에서 매우 중요하게 사용되고 있다. 이것은 B-spline을 이해하고 분석하며 렌더링(rendering)하는 데에 필요한 기본적인 처리과정으로써, 수치적으로도 안정( numerically stable)되기 때문에 컴퓨터 그래픽스 및 CAGD 등에 적용되고 컴퓨터 프로그래밍이나 CAD 등에도 도입되고 있다. 현재 B-spline의 근사변환에 관한 연구가 비교적 많이 연구되어 있지 않으나, Bézier 곡선보다는 실제적으로 B-spline이 더욱 많이 사용되므로, B-spline에 대한 근사변환 연구가 매우 중요시 되고 있다. B-spline에 대한 근사변환에는 Bézier 곡선의 차수 감소 방법과 이 과정에서 생성된 knot을 제거하여 불필요한 조정점을 제거하는 방법 등이 이용된다 [1,2,3,4].

본 논문에서는 H. Kim 등이 [1]에서 제시한 B-spline의 차수 감소 알고리즘으로 실험·분석한다. 따라서, [1]의 확장된 연구로써 B-spline의 근사변환에 따른 다양한 실험 결과들을 제공한다. 문제의 단순성을 고려하여 knot 벡터는 uniform한 형태를 취한다. 차수 감소의 차는 1차, 2차 9차 이를 실험하였으며, 모양은 원과 S자의 형태와 지그재그 형태 등을, 그리고 허용오차 범위를 다양하게 적용한다. 이러한 연구는 자연 현상을 처리하고 기하학적 표현의 효율적인 접근방법 연구에 매우 유용하게 사용된다.

## II. B-spline의 근사변환

본 논문에서는 최근 경향에 가장 필요한 시각화의 모델링/렌더링 분야에는 B-spline의 근사변환에 따른 기하 모델링(geometric modeling)에 관한 연구를 수행 한다.

B-spline의 차수를 감소하는 방법은 각 단계마다 다양하게 제시될 수 있다. 이러한 방법을 구현하기 위해서는 curve decomposition, Bézier degree reduction, knot 제거, error formulae 등과 같은 세부적인 구성방법 요소들이 필요하다. [1,2,3,4]

Eck과 Hadenfeld는 다항식 B-spline에 대해 기저 변환을 수행하기 위한 방법을 소개하였고[5], L. Piegl과 W. Tiller는 새로운 B-spline의 차수 감소 알고리즘을 제시하였다[1,6,7]. 이것은 B-spline 차수 감소 방법을 효율적으로 수행 하지만 오차 제어가 어렵다. 그리고, 한번에 (n-1) 차수로만 감소한다. J. Yong 등은 B-spline의 차수 감소 문제를 least square 방법을 이용하는 과정과 가중치를 적용하는 두 과정을 이용하되, 첫 번째 과정에서만 오차가 발생하는 연구를 수행하였다[8]. [1]의 논문에서 제시한 알고리즘은 샘플점들의 refit에 대한 하나의 대안으로서 제시하는 것으로, 다른 방법보다는 구현이 용이하다. 이 방법은 한번에 n차를 m(m<n)차로 감소할 수 있고, 오차 제어가 용이하면서 임의의 허용된 오차 범위에 대한 모든 근사곡선을 얻을 수 있다. 그러나 자료의 양이 증가하는 단점이 있다[1].

p차 B-spline 곡선 정의는 구간적 다항식 곡선으로 다음과 같다.

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i \quad a \leq u \leq b$$

여기서  $\{P_i\}, i=0, \dots, n$ 은 control polygon을 만드는 제어점이고,  $\{N_{i,p}(u)\}, i=0, \dots, n$ 은 차수가 p인 B-spline 기저 함수이다.

## III. Bézier 곡선의 차수 감소와 knot 제거

Bézier 곡선의 차수 감소 방법은 Forrest에 의해 처음 제시되었다. 이것은 곡선의 양 끝점에서 접선을 유지하는 알고리즘이다[9]. Farin에 의한 차수 감소 방법은 rational Bézier 곡선을 처리하는 방법을 제안하였다[10]. 그리고 Watkin과 Worsey는 Chebyshev 다항식을 사용하여 해결

하는 방안을 제시하였다[11]. Lachance는 단항식으로만 변환되는 유사한 방법을 기술하였다[12]. M. Eck은 constrained Chebyshev 다항식을 사용하여 Farin의 방법을 일반화하였다[13]. 또한 이 방법에 기반을 둔 least square 방법을 적용한 알고리즘을 개발하였다. 이것을 일명 LSE 방법이라고 한다[14].

Bézier 곡선의 차수 감소 문제는 차수가  $n$ 이고 제어점

$$\{b_i\}_{i=0}^n \subset R^s \text{이 주어진 Bézier 곡선}$$

$$b_n(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

이 있을 때,  $n$ 차에서 낮은 차수  $m(m < n)$ 이 되는 새롭게 찾는 다른 제어점  $\{q_i\}_{i=0}^m \subset R^s$ 으로 정의하는 또 다른 Bézier 곡선

$$q_m(t) = \sum_{i=0}^m q_i B_{i,m}(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

이 있다. 이때 이 두 곡선간에 적당한 거리 함수  $d(b_n, q_m)$ 를 최소화 하는  $q_m(t)$ 를 구한다[1,7].

Knot 제거 방법에서 Le Mehaute와 Lafranche는 Bézier 근사를 이용하는 방법으로, Lyche와 Morken은 first rank knot에 의해 하나 이상의 knot을 근사적으로 제거하고, global approximation 방법에 의한 작은 가중치로 모든 knot을 제거하는 방법을 제안하였다[15]. 이와 연관된 문제로써, 3차 B-spline에서 하나의 knot만을 제거하는 연구로 1983년 Kjellader, 1987년 Farin 외, 1990년 Sapidis와 Farin 등의 결과가 있다[16]. Tiller는 모든 knot을 제거하는데 컴퓨터의 정확성 내에서 제거되어질 수 있는 알고리즘을 제시하였다[17]. Eck과 Hadenfeld는 Lyche와 Morken의 방법과 약간 다른 방법으로, B-spline에서 하나의 knot만을 제거할 수 있는 가장 간단한 경우로 제한하는 연구를 수행하였다[18]. Eck은 이 방법을 이용하여 연속적인 knot을 제거하는 만족스러운 결과를 얻는 연구도 진행되었다[9]. H. Kim의 방법은 제거하는 knot의 순서에 상관없이 없기 때문에 제거되는 knot의 순서에 영향을 받지 않고 항상 같은 결과를 얻을 수 있는 연구를 수행하였다[3,4].

Knot 벡터  $U$ 로 정의되는  $p$ 차 B-spline  $C(u)$ 는

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i$$

으로 정의하고, knot벡터  $U$ 에서 내부 knot 중 1개를 제거할 경우 새로 정의되는 곡선  $\overline{C}(u)$ 는 다음과 같이 나타낸다[4].

$$\overline{C}(u) = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{N}_{i,p}(u) Q_i$$

#### IV. 실험 결과

실험한 시스템은 P4 CPU 1.7GHz/256MB Ram이고 Visual C++ 언어로 구현하였다. 실험하는 허용오차 범위는 1.0, 0.1, 0.01, 0.001 등을 적용하였으며, 너무 큰 값의 차수는 실제 거의 사용하지 않으므로 14차 까지만 실험하였다.

다음의 예는 실험적 결과들을 보여준다. 그림에서 원 모양( $\circ$ )은 주어진 조정점, 채워진 사각형( $\blacksquare$ )은 계산되어 만든 새 조정점, 실선은 원래의 곡선 및 polygon이며 점선은 새로 만들어진 곡선 및 polygon이다. B-spline의 모양은 원형이나 S, 지그재그형 등을 실험한다. 문제의 단순성을 고려하여 uniform 벡터를 적용한다. 감소하는 차수 수는 1차, 2차 그리고 9차를 실험한다.

(그림 1)은 단순한 형태인 원형으로 허용오차를 1.0, 0.1, 0.01로 변화 시키며 1차수 감소한 예이다. <표 1>은 이에 대한 생성된 조정점 수를 보여주는 표이다. (그림 2)는 S자형으로 허용 오차 범위를 0.1, 0.01, 0.001로 변화 시키며 2차수 감소한 예이다. <표 2>는 이에 대한 변화된 조정점 수를 보여주는 표이다. (그림 3)은 지그재그 형으로 허용오차 범위를 0.1, 0.01, 0.001로 변화 시키며 9차수 감소한 예이다. <표 3>은 변화된 조정점 수에 대한 수치적 자료를 보여준다. (그림 4)는 복잡한 복합형으로 허용오차 범위를 0.1, 0.01, 0.001로 변화 시키며 9차수를 감소한 예이다. <표 4>는 이에 대한 수치적 자료를 보여준다.

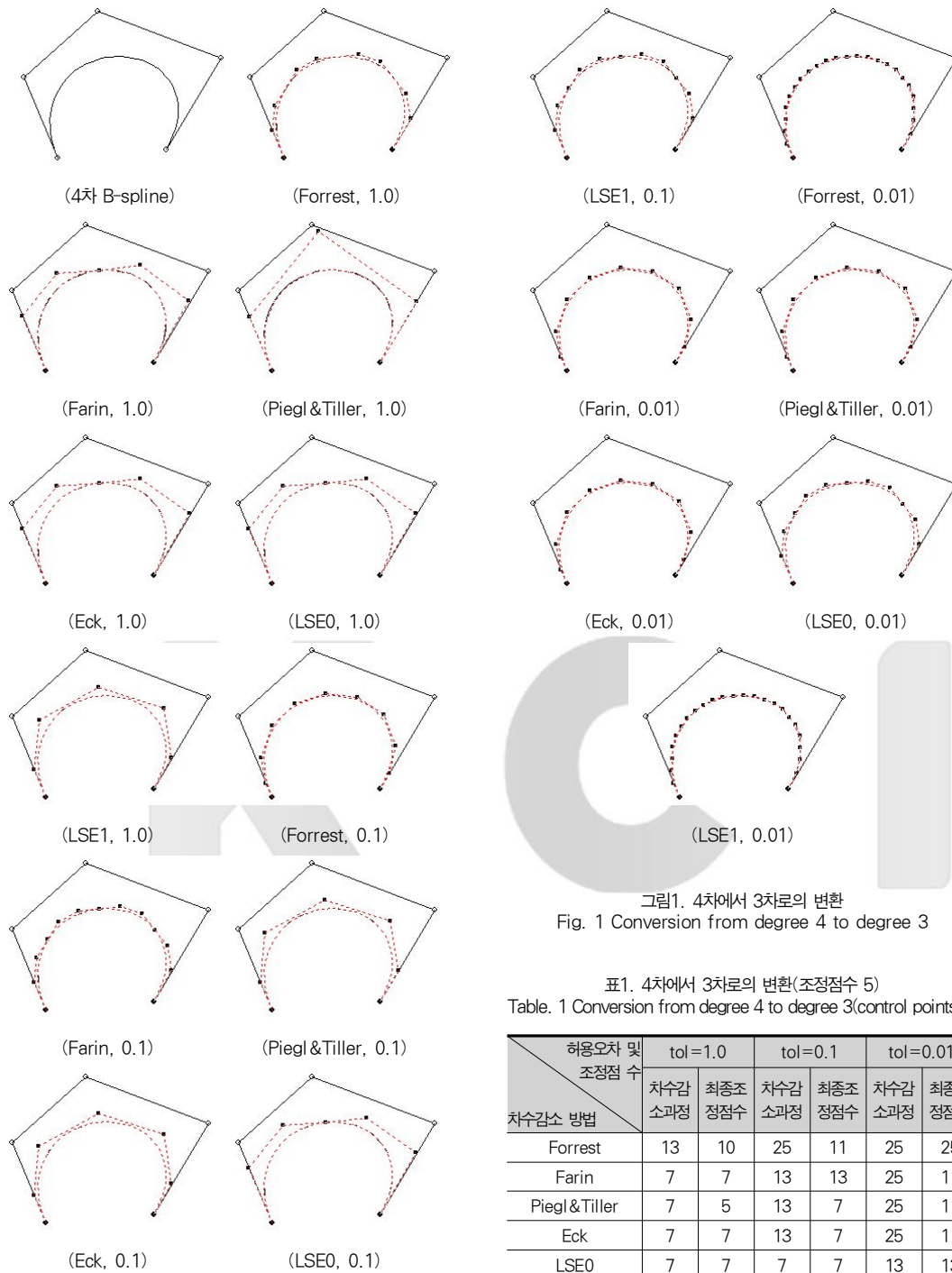


그림1. 4차에서 3차로의 변환  
Fig. 1 Conversion from degree 4 to degree 3

표1. 4차에서 3차로의 변환(조정점수 5)  
Table. 1 Conversion from degree 4 to degree 3(control points 5)

차수감소 방법	허용오차 및 조정점 수	tol=1.0		tol=0.1		tol=0.01	
		차수감 소과정	최종조 정점수	차수감 소과정	최종조 정점수	차수감 소과정	최종조 정점수
Forrest		13	10	25	11	25	25
Farin		7	7	13	13	25	11
Piegl&Tiller		7	5	13	7	25	11
Eck		7	7	13	7	25	11
LSE0		7	7	7	7	13	13
LSE1		13	7	13	13	25	25

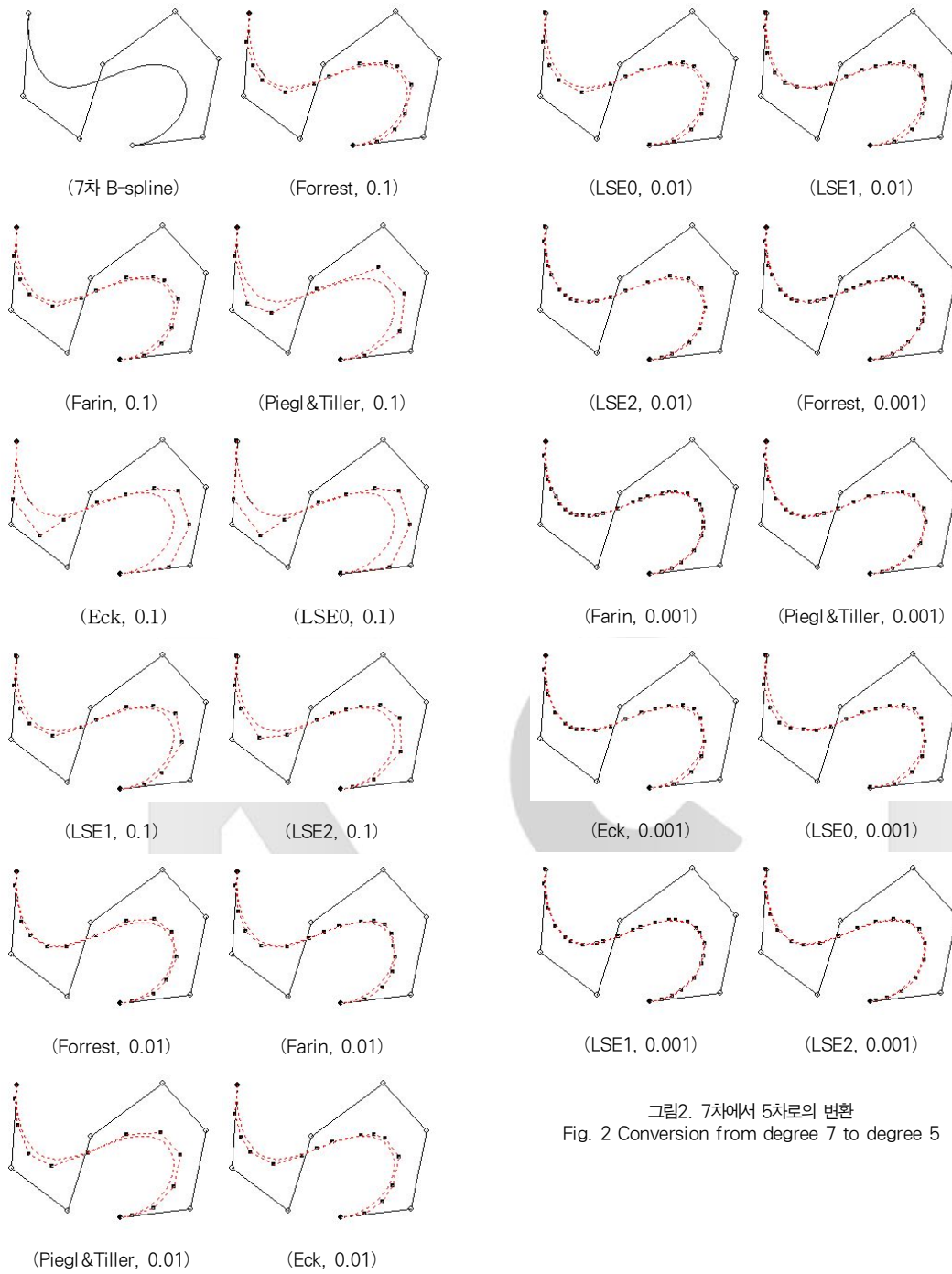
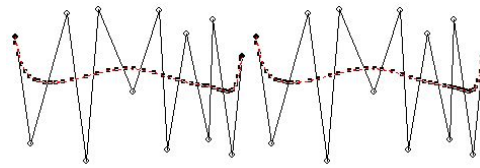


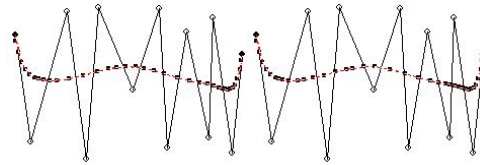
그림2. 7차에서 5차로의 변환  
 Fig. 2 Conversion from degree 7 to degree 5

표2. 7차에서 5차로의 변환(조정점수 8)  
Table. 2 Conversion from degree 7 to degree 5(control points 8)

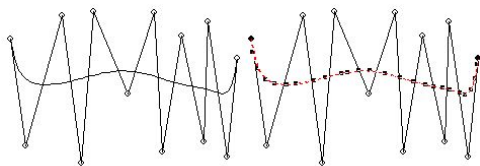
허용오차 및 조정점수 차수감소 방법	tol=0.1		tol=0.01		tol=0.001	
	차수감소 소과정	최종조 정점수	차수감소 소과정	최종조 정점수	차수감소 소과정	최종조 정점수
Forrest	21	15	41	16	41	34
Farin	21	15	31	19	41	33
Piegl&Tiller	21	11	41	13	41	23
Eck	11	11	21	16	26	24
LSE0	13	13	23	16	21	21
LSE1	21	14	28	21	41	27
LSE2	36	15	41	23	81	21



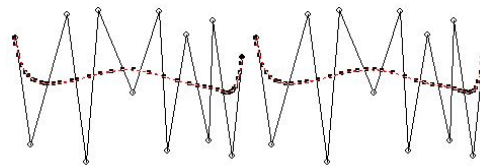
(Forrest, 0.01) (Farin, 0.01)



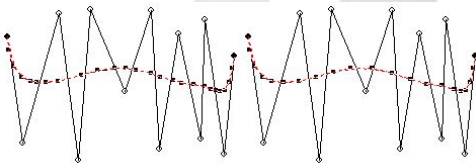
(Piegl&Tiller, 0.01) (Eck, 0.01)



(12차 B-spline) (Forrest, 0.1)



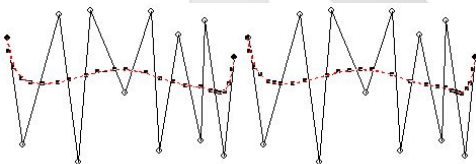
(LSE0, 0.01) (LSE1, 0.01)



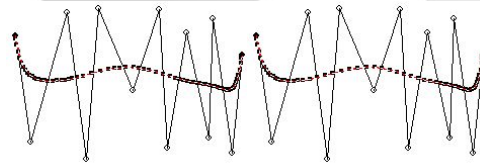
(Farin, 0.1) (Piegl&Tiller, 0.1)



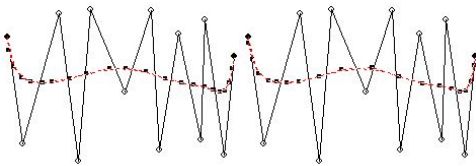
(LSE2, 0.01) (Forrest, 0.001)



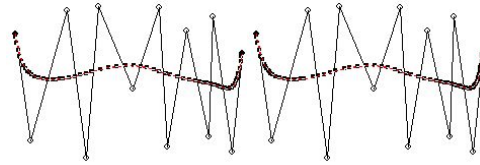
(Eck, 0.1) (LSE0, 0.1)



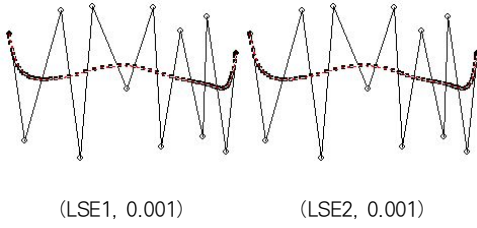
(Farin, 0.001) (Piegl&Tiller, 0.001)



(LSE1, 0.1) (LSE2, 0.1)



(Eck, 0.001) (LSE0, 0.001)

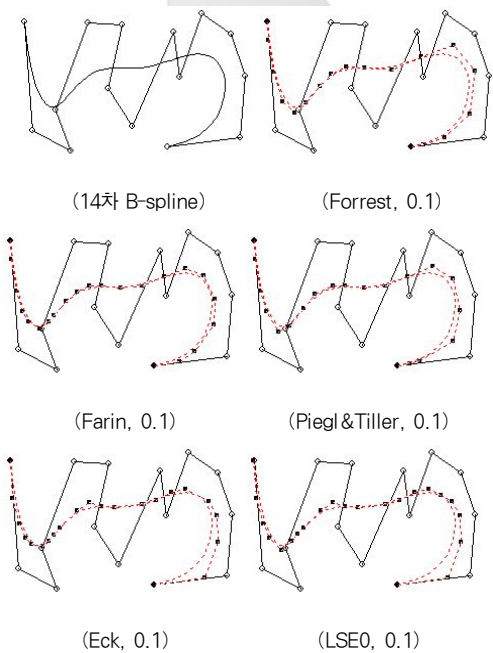
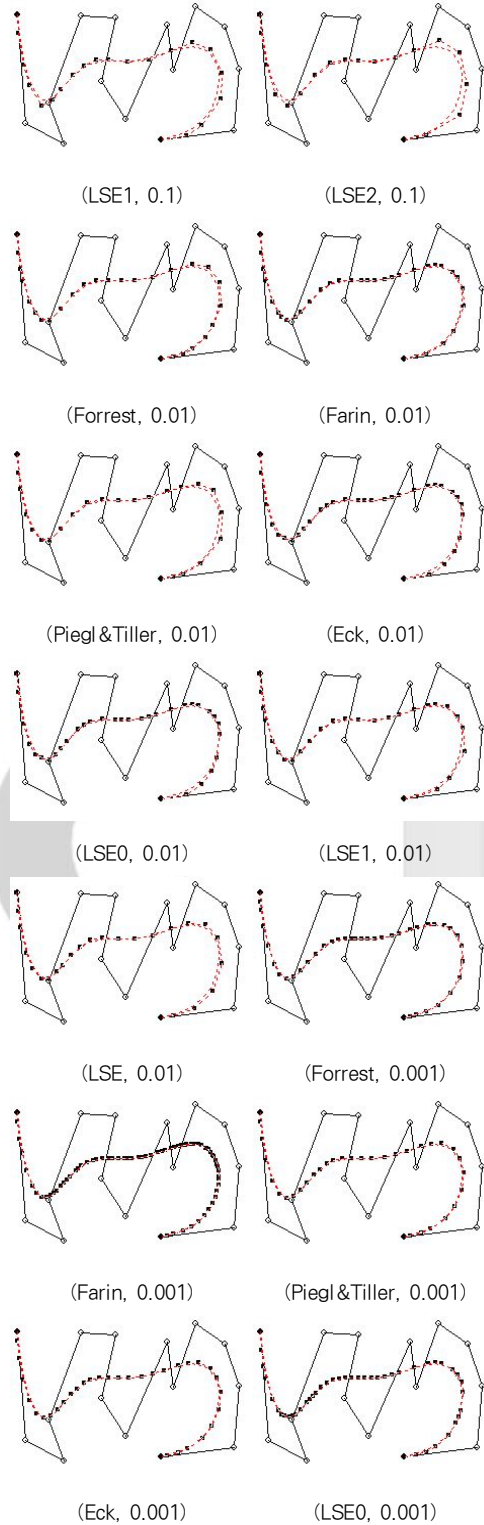


(LSE1, 0.001) (LSE2, 0.001)

그림3. 12차에서 3차로의 변환  
Fig. 3 Conversion from degree 12 to degree 3

표3. 12차에서 3차로의 변환(조정점수 13)  
Table 3 Conversion from degree 12 to degree 3(control points 13)

허용오차 및 조정점 수 차수감소 방법	tol=0.1		tol=0.01		tol=0.001	
	차수감소 소과점	최종조 정점수	차수감소 소과점	최종조 정점수	차수감소 소과점	최종조 정점수
Forrest	85	26	154	41	274	75
Farin	58	26	112	43	184	73
Piegl&Tiller	79	21	133	37	229	61
Eck	55	24	88	39	151	65
LSE0	40	27	73	40	127	71
LSE1	79	22	139	39	247	65
LSE2	139	20	232	36	436	61



(14차 B-spline) (Forrest, 0.1)  
(Farin, 0.1) (Piegl&Tiller, 0.1)  
(Eck, 0.1) (LSE0, 0.1)

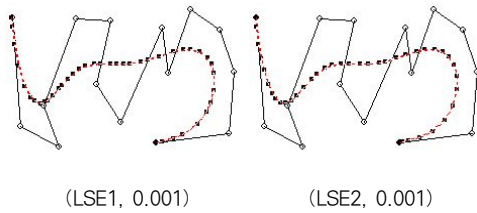


그림4. 14차에서 5차로의 변환  
Fig. 4 Conversion from degree 14 to degree 5

표4. 14차에서 5차로 변환(조정점수 15)  
Table. 4 Conversion from degree 14 to degree 5(control points 15)

허용오차 및 조정점 수 차수감소 방법	tol=0.1		tol=0.01		tol=0.001	
	차수감소과정	최종조정점수	차수감소과정	최종조정점수	차수감소과정	최종조정점수
Forrest	56	18	81	27	116	40
Farin	46	22	66	34	136	70
Piegl&Tiller	51	20	76	24	106	34
Eck	26	22	46	33	66	45
LSE0	26	22	46	33	56	46
LSE1	46	21	66	28	96	41
LSE2	66	20	106	25	171	40

### V. 결론

기하 모델링에서 시스템이 지원하는 곡선 및 곡면의 최대 차수에 제한이 있을 때, 낮은 차수로의 차수 감소가 필요하다. 본 논문에서는 H. Kim 등이 [1]에서 제안한 근사 변환의 한 방법인 B-spline 곡선의 차수 감소 방법을 적용한 다양한 예들을 실험하였다.

일반적으로 곡선 및 곡면의 차수를 감소시키면 자료의 양은 증가하게 된다. 특히 허용 오차 범위가 작으면 작을수록 조정점과 knot의 수는 더욱 증가하게 된다. 또한 감소하는 차수 차이가 크면 클수록 조정점과 knot의 수도 더욱 증가하게 된다. 이것은 공간적인 효율성은 떨어지지만 점의 계산 속도는 빨라지므로 차수에 제한을 두는 응용에서는 유용하게 사용된다. 시간적 효율성은 조정점이나 knot의 수보다는 차수에 더욱 의존되어 결정되어지기 때문이다.

B-spline의 근사 변환은 곡선의 모양, 허용오차 범위, 차수 감소 수 등에 따라 상이한 결과들로 나타난다. 그리고 차수 감소를 수행하는 Bézier 곡선의 차수 감소 세부 과정에서 어떤 방법을 이용하는냐에 따라 다양한 결과가 나온다. Bézier 곡선을 차수 감소 할 때에 Eck의 방법이나 LSE의 방법이 다른 방법들에 비하여 매우 안정적이다. 최종적으로 knot 제거 과정까지 마치면 서클모양은 Piegl&Tiller 방법과 Eck 방법이, S자와 복합형(S자와 지그재그)인 모양에서는 LSE0 방법과 Piegl&Tiller 방법이, 지그재그 모양에서는 Piegl&Tiller 방법과 LSE2 방법이 가장 우수하게 나타났다. 따라서 Piegl&Tiller 방법을 적용한 경우가 모양이나 허용 오차 범위, 그리고 감소 차수를 크게 변화 시키더라도 비교적 적은 수의 조정점을 유지하는 것으로 나타났다. 이러한 결과들은 B-spline의 기하 설계에 유용하게 활용할 수 있다.

앞으로, knot 제거 방법을 다양하게 적용한 실험적 연구와 곡면으로의 확대하는 연구가 요구된다.

### 참고문헌

- [1] Kim, H. et al., The degree reduction of B-splines using Bézier methods, Jour. of the KISS, Vol.26, No.8, pp.875-883, 1999
- [2] Kim, H., Degree reduction and computation of the maximum error of Bézier curves, Jour. of the KIOA, Vol.4, No.4, pp.25-33, 1999
- [3] Kim, H., Knot Removal for the efficient Visualization Implementations, Jour. of the KIOA, Vol.6, No.1, pp.1-6, 2001
- [4] Kim, H., Approximate conversion using the degree reduction of NURBS, Jour. of the KSCE, Vol.8, No.1, pp.7-12, 2003
- [5] Eck, M. and Hadenfeld, J., A stepwise algorithm for converting B-splines, edited by Laurent, P.J., LeMehaute, A., and Scumaker, L.L, Curves and Surfaces II, Academic Press, New York, pp.131-138, 1994
- [6] Piegl, L., and Tiller, W., Algorithm for degree reduction of B-spline curves, CAD, Vol. 27,



- No. 2, 1995
- [7] Piegl, L. and Tiller, W., The NURBS book, 2nd ed., Springer, 1997
- [8] Yong, Jun-Hai, et al., Degree reduction of B-spline curves, Comput. Aid. Geom. Des., Vol.18, pp.117-127, 2001
- [9] Forrest, A.R., Interactive interpolation and approximation by Bézier polynomials, The Comput. Jour., Vol. 15, No. 1, pp. 71-79, 1972. Corrected and updated version in CAD, Vol. 22, No. 9, pp.527-537, 1990
- [10] Farin, G.E., Algorithms for rational Bézier curves, CAD, Vol. 15, No. 2, pp. 73-77, 1983
- [11] Watkins, M.A. and Worsey, A.J., Degree reduction of Bézier curves, CAD, Vol. 20, No.7, pp. 398-405, 1988
- [12] Lachance, M.A., Chebyshev economization for parametric surfaces, Comput. Aid. Geom. Des., Vol. 5, pp. 195-208, 1988
- [13] Eck, M., Degree reduction of Bézier curves, Comput. Aid. Geom. Des., Vol. 10, pp. 237-251, 1993
- [14] Eck, M., Least squares degree reduction of Bézier curves, CAD., Vol. 27, No. 11, pp.24-30, 1995
- [15] Lyche, T. and Mørken, K., Knot removal for parametric B-spline curves and surfaces, Comput. Aid. Geom. Des., Vol.4, pp.217-230, 1987
- [16] Le Mehaute, A.J.Y. and Lafranche, Y., A knot removal strategy for scattered data in R<sup>2</sup>, in Mathematical methods in computer aided geometric design, Ed. Lyche, T. and Schumaker, L.L., Boston, Academic Press, pp.419-426, 1989
- [17] Tiller, W., Knot-removal algorithms for NURBS curves and surfaces, CAD, Vol.24, No.8, pp.445-453, 1992
- [18] Eck, M. and Hadenfeld, J., Knot removal for B-spline curves, Comput. Aid. Geom. Des., Vol.12, pp.259-282, 1995

## 저자 소개



김혁진

이주대학교 대학원 컴퓨터공학과 석

박사

김천대학 사무자동화과 조교수

현재 청운대학교 컴퓨터학과 부교수

〈관심분야〉 CG, CAGD, 웹기술 등