

컴퓨터를 이용한 수학 교육(적분 방법)에 대한 연구

전 상 표*

Using Mathematics Education(Integration Method)) through Computer

Sang Pyo, Jun *

요 약

컴퓨터와 다양한 매체의 발달에 따라 다양한 학습 방법이 제시되고 있다. 그중 e-learning 등의 방법에 의해 다양한 분야에서 많은 강의가 이루어지고 있다. 수학 교육에서도 컴퓨터 대수 시스템인 Mathematica와 Maple, Matlab 등 많은 응용 소프트웨어를 이용한 강의가 이루어지고 있다. 컴퓨터를 이용한 수학 교육 시 나타나는 문제에 대해서 많은 수학 교육학자 사이에 논쟁이 되고 있다.

이 논문에서는 컴퓨터를 이용한 학습자와 기존 판서 학습자 사이의 수학 이론의 이해도와 이론의 응용력에 대한 차이가 있는지 입의의 학생을 표본 추출 후 각각의 방법에 의한 수학의 정적분 분야에 대한 교육 후 시험을 실시 후 통계 분석을 통하여 컴퓨터에 의한 수학 교육시의 문제점을 알아보고, 적절한 컴퓨터 교육의 방향을 제시 하고자 한다.

Abstract

Through the development of computer and multimedia, many different kinds of theories about instructional method are presented. Especially, many lectures in associated with E-learning are done. In mathematics teaching, mathematica-algebra system lecturing, computer and Maple Matlab lecturing etc, are accomplished. There are many controversies among educators in problems originated by computer teaching. In this paper, we going to make a research about problems which are caused by mathematics computer-based education and present a desirable way of computer based education through studying comprehension rate and application ability among learner who uses computer learning and other learner who uses exiting blackboard-based learning with statistical analysis after sampling test

▶ Keyword : 컴퓨터 활용 수업(Computer Assisted Instruction), 이러닝(e-learning), 수학 교
(Mathematics Education), 적분 방법 교육(Integration method Education)

• 제1저자 : 전상표

• 접수일 : 2007. 11. 5, 심사일 : 2007. 12. 3, 심사완료일 : 2007. 12.18.

* 남서울 대학교 교양학부 교수

※ 본 논문은 남서울대학교 2007년 자체연구비 지원에 의하여 연구되었음

I. 서론

컴퓨터 소프트웨어를 이용한 교육의 장단점은 많은 학자들 사이에 논쟁이 되고 있다. 컴퓨터 교육의 장점은 첫째, 모든 학습자들이 잘 교육받은 양질의 교수에 의해 잘 정리된 교육을 반복해서 받을 수 있어 이해 증진을 할 수 있다. 둘째로 컴퓨터의 활용으로 교수에게 지시를 받고 모방하는 교육에서 직접 경험하는 교육이 될 수 있어 수업에 주체자가 될 수 있다. 마지막으로 인간 정신능력을 신장시키어 배운 내용 이외의 다목적의 응용프로그램을 창조 할 수 있다.

컴퓨터를 이용한 교육 시 문제점은 교육 방법이 획일화되어, 학생들이 습득 하는 지식이 모두 같게 되어 모두 같은 내용의 지식을 가지게 된다. 둘째로는 학생과 교수 모두 컴퓨터 소프트웨어에 의존하게 되어 교수는 학생에게 가르칠 교수 계획, 교육 절차, 평가 등에서 컴퓨터에 종속되게 되고 학습에 자신의 지식이 반영되지 않는 단순 전달자가 된다. 셋째는 학생들과 긴밀한 상담에 의해 습득되는 각 학생들의 개인적인 교육 수준과 이해 정도에 따른 등급별 교육이 이루어지지 않는다. 이는 교수의 다양한 교육 방법이 차단되고 학생 개인별 이해도를 저해 시키게 된다. 마지막으로 각 수업 내용 이외에 인간적 정신 수양을 위한 친밀한 교육이 이루어지지 않는다. 교과 내용 이외 학생과의 질문과 대답 속에서 형성되는 부가적인 지식 형성이 되지 않는다.

수학 교육에서도 컴퓨터를 이용한 교육이 많이 시행되고 있다. 컴퓨터의 수학에의 이용은 수학적 이론이 가지는 여러 가지 특성 때문에 이해하기 어려운 부분을 학생들에게 도움이 되게 하는 다른 교육에 없는 다른 장점들이 있다. 첫째 다양한 수학 방정식의 표현이다. 둘째는 즉각적인 결과의 유도, 수학이론이 무엇일까? 하는 답을 보여 준다. 셋째 수동적인 교육에서 능동적인 수업이 된다. 또 기호와 식으로 추상적화된 수학 개념을 그래프 등의 보충 개념으로 확인할 수 있어 이론을 정확하게 할 수 있게 된다. 또 컴퓨터에 대한 활용도도 증가 되고, 쉽게 수학 교육에 접하게 되어, 수학 교육에 학습자의 흥미를 유발하게 되어 다른 기초 교육인 물리, 화학 등의 과목 교육뿐 아니라 사회생활 전반에 자신감을 가지게 한다.

컴퓨터를 이용하여 수학에 관련된 문제를 기호로 처리하여 연산을 수행하는 컴퓨터 시스템으로 컴퓨터 대수 시스템(Computer Algebra System)이 있다. 이는 수치계산과 대수적 연산을 수행하고, 연산의 결과를 그래픽으로 처리하는 소프트웨어들을 말한다[1].

이 컴퓨터 대수 시스템을 이용하여 수학 교육 시 지식을 가르칠 학생이 선정 되면 학생 수준에 따라 교수의 개인적 수학적 지식을 학생에서 적절하게 변환하여 가르쳐야 한다. 교육에 컴퓨터 대수 시스템을 적용 시 학생 수준에 맞는 수학적 지식 문제를 학생에 맞는 내용이 있는 프로그램을 선택하고, 적절한 프로그램을 사용하여 관련 지식을 이해시키고, 지식을 응용하여 사용 할 수 있게 하여야 한다. 수학 내용을 가르치기 위해 어떤 소프트웨어를 선택해야 하는지, 어떤 알고리즘을 사용하는지가 가장 중요한 부분이라고 할 수 있다.

소프트웨어와 알고리즘에 따라 지도 하는 내용에 다른 표현 양식으로 전달되고 왜곡된 지식을 습득 할 수 있기 때문이다[2]. 이 논문에서는 컴퓨터를 활용하여 수학 교육 시 많이 사용하는 프로그램들의 장단점과 사용법을 알아보고, 컴퓨터를 적용하여 교육한 집단과 기존의 교육 방법에 의해 교육한 집단 두 표본 집단을 구성하여 동일한 문제를 각각의 방법에 의하여 교육 후 집단별 이해도와 다른 응용문제에 대한 이해도를 통계 분석 하였다.

II. 관련연구

2.1 컴퓨터대수 시스템의 소개

Mathematica, Maple, 및 Matlab은 이미 넓은 사용자층을 확보하고 있는 컴퓨터 대수 시스템들이다. 이 중 Mathematica와 Maple은 순수 수학을 연구하는 사용자들에게 주로 이용되며, Matlab은 C언어와의 호환성이 뛰어나므로 수학을 응용한 분야에 널리 이용 되고 있다. 이 논문에서는 Mathematica의 장단점을 알아보고, 이를 이용하였다.

2.1.1 Mathematica

Mathematica는 현재 일리노이 대학의 복합 시스템 연구 센터의 Stephen Wolfram 박사에 의해 "수학문제라면 무엇이든지 해결할 수 있는 소프트웨어"라는 목표아래 개발되어 1988년 6월 처음 발표 된 이후, 현재 Ver.5가 출시되었다.

Mathematica의 특성은 다음과 같다[3].

- 1) 대수적 계산이 가능하게 하고, 영역별로 분리된 수학프로그램을 하나로 통합하여 사용할 수 있다.
- 2) 기존의 프로그램 플랫폼의 제약을 벗어나 교수가 필요에 따른 모형구축 가능.
- 3) 사용자 정의(Package)를 이용하여 응용 적용이 가능.
- 4) 프로그램 자체의 체계적인 도움말 기능.
- 5) 수치와 기호계산(symbolic calculation), 함수와 데이

터의 분석 및 시각화 기능이 다양.

- 6) 고급 프로그래밍 언어로 외부 프로그램에 대한 제어 가능.
- 7) 수식과 그래픽 등이 복합된 문서작성기로 사용 가능.
- 8) 다른 소프트웨어에 비하여 우수한 시양의 컴퓨터가 필요.
- 9) Fortran, C언어, Java 등을 사용해 본 경험이 필요.

최근 Mathematica를 Web을 매개로 사용할 수 있도록 하는 방법에 대한 노력이 가속되고 있다.

2.2 컴퓨터 대수 시스템의 적용

Mathematica 5 를 이용하여 유리수의 분수 표현, 무리수의 사용에서 계산 시 오차의 정도를 알아보기 위해 수치 적분을 시행 후 결과를 분석하였다.

문제1: $f(x) = e^{\pi x}$ 와 직선 x 축, y 축, 그리고 $x = 1$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 계산하라.

풀이: 주어진 함수의 정의된 구간을 몇 개의 임의의 소구간으로 분할하여 일반적인 Riemann Sum을 계산하는 프로그램으로 면적을 계산 했다.

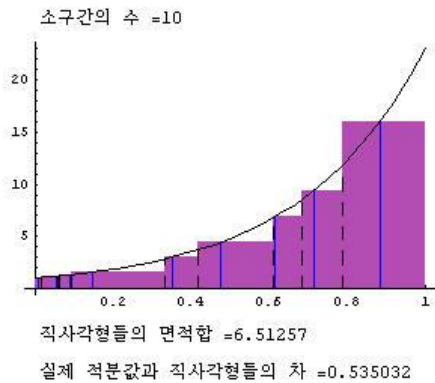


그림 1. 리만의 합
Fig. 1 Riemann Sum

그림 1과 같이 실제 적분 값과 직사각형들의 차가 0.535032로 나타났다. 이 계산된 오차는, 임의의 분할에 대한 계산을 컴퓨터가 제어 할 수 있다.

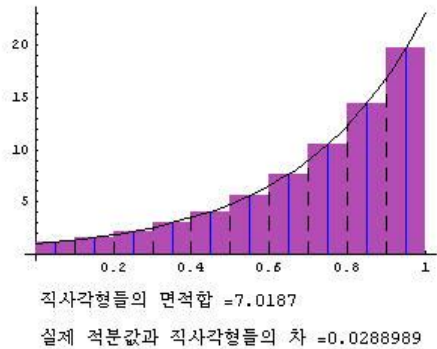


그림 2. 매스매티카로 처리한 결과
Fig. 2 Result of mathematics

그림 2는 간단한 프로그램을 작성하여 그래프와 중간 값 및 오차를 계산하여 출력하였다[5]. 위의 결과에서 실제 적분 값과 직사각형들의 차가 0.0288989로 나타났다.

2.3 컴퓨터 대수 시스템의 교육 시 특성

중이 위에 연필로 문제를 푸는 수학만을 공부하고 컴퓨터 사용에 익숙하지 않은 초보자의 경우, 컴퓨터 대수 시스템의 프로그램의 명령어가 수학에서 사용하는 수식과 같은 형태를 가지므로 배우고 사용하기가 용이하였다. 또한 수학에서 사용하는 대부분의 함수를 정의할 수 있으며 함수 표현도 동일하기 때문에 컴퓨터 언어에 익숙하지 않은 사용자도 쉽게 이용할 수 있다. 또한 수학문제를 푸는데 적용되는 많은 공식들에 대한 명령어를 가지고 있어서, 수학적인 지식이 부족한 사용자도 많은 계산과정을 고려하지 않고 정확한 값을 얻을 수 있도록 도와주는 훌륭한 계산기이다.

어떤 대수 시스템 프로그램은 공식들에 대한 명령어들을 찾기 어렵고, 컴퓨터 사용에 부담이 많은 초보자는 처음 Mathematica를 접할 때 사용법을 익히는데 많은 노력과 시간이 요구된다. 그러나 사용법이 익숙해지면 간단한 알고리즘을 적용하여 필요한 계산식을 프로그램으로 작성할 수 있으며 이를 이용하여 다양한 계산을 할 수 있다. 작성된 프로그램은 간단한 수정에 의하여 여러 가지 다양한 문제에 쉽게 적용할 수 있다.

III. 컴퓨터사용 수업과 판서 수업 비교

이 장에서는 기본 문제와 응용 문제를 컴퓨터를 이용한 수

업과 판서 수업에 각각 적용한 실험을 통하여 교육적 효과를 통계적으로 분석한다.

3.1 기본 문제 응용력 분석 실험

수학의 형식적인 언어체계는 복잡한 수학 개념을 추상화된 기호로 표현 된다. 수학적 지식을 자유자재로 표현하고 또 제어 할 수 있는 이유도 기호의 사용 덕분 이다. 이런 기호체계를 컴퓨터 프로그램에 의해 자동 조작성이 가능하도록 하는 노력으로 컴퓨터 프로그램이 사용되는데 수학적 지식을 각각 판서 교육과 컴퓨터 교육을 통해 교육 시킨 후 개념 이해의 정도와 이해 후 다양한 문제에 있어서의 응용력을 알아보기 위해 다음 같은 비교 실험을 하였다.

대상: N대학교에 재학 중인 공과대학 1학년 학생 100명을 단순 확률 추출법에 의하여 표본을 50명씩 구성 후 다음과 같이 교육 하였다.

집단a: 50명의 학생을 기존의 판서로 이룬 수업 실시
 집단b: 50명의 학생을 e-learning을 통한 컴퓨터 소프트웨어 수업 실시

다음과 같이 적분법에 기본이 되는 문제 5문제를 20점 만점으로 시험을 보았다.

- 문제 1. 함수 $\exp(\pi x)$ 가 x 축 $[0, 2]$ 사이에서 둘러싸인 넓이를 10등분 시 직사각형법에 중간 합 공식을 이용하여 구하라.
- 문제2. 함수 $\exp(\pi x)$ 가 x 축 $[0, 2]$ 사이에서 둘러싸인 넓이를 10등분 시 사다리꼴 법에 의해서 구하라.
- 문제3. 함수 $\exp(\pi x)$ 가 x 축 $[0, 2]$ 사이에서 둘러싸인 넓이를 10등분 시 Simpson $\frac{1}{3}$ 법에 의해서 구하라.
- 문제4. 함수 $f(x) = x^2$ 과 $g(x) = x + 2$ 가 $(0 \leq x \leq 2)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 10등분시 사다리꼴 법에 의해서 구하라.
- 문제5. 함수 $f(x) = x^2$ 과 $g(x) = x + 2$ 가 $(0 \leq x \leq 2)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 10등분 시 Simpson $\frac{1}{3}$ 법에 의해서 구하라.

시험 결과를 통계 소프트웨어인 SPSS를 사용하여 분석

하면 표 1과 같다.

표 1 기본 문제 통계량
 Tabel 1 Statistics Data of Basic Problems

	N	Min	Max	Avg	Std. Dev.
Groupa	50	58.00	99.00	79.56	12.0461
Groupb	50	60.00	99.00	81.46	10.2105

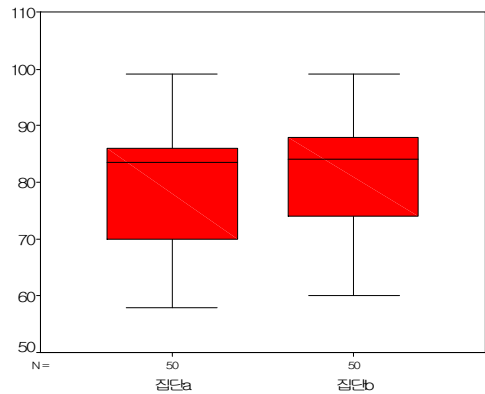


그림 3 표1의 상자 그림
 Fig. 3 Box-plot of Table1

표 1과 그림 3에 의하면 컴퓨터를 이용한 학생이(집단b)가 집단a와 평균값이 보다 높다. 그리고 높은 성적을 받은 학생이 상대적으로 많고, 성적의 표준편차도 작아 평균에 밀집되어 있고, 상위 점수에 밀집 되어 있으며 전체 성적의 퍼진 정도도 집단a 보다 작다. 컴퓨터 교육에 의한 기본문제에 대한 이해도는 기존 교육에 의한 이해도는 보다 좋게 나타났다.

3.2 응용 문제 이해력 분석 실험

다음에 있는 응용이 필요로 하는 5개의 문제에 대하여 시험을 보았다.

- 대상: N대학교에 재학 중인 공과대학 1학년 학생 100명을 단순 확률 추출법에 의하여 표본을 50명씩 구성 후 다음과 같이 교육 하였다.
- 집단1: 50명의 학생을 기존의 판서로 이룬 수업 실시
- 집단2: 50명의 학생을 e-learning을 통한 컴퓨터 소프트웨어 수업 실시

문제6. 함수 $\exp(-\pi x)$ 가 x 축 $[0, 2]$ 사이에서 둘러싸인 넓이를 20등분 시 직사각형법에 중간 합

공식을 이용하여 구하라.

문제7 함수 $\exp(-\pi x)$ 가 x 축 $[0, 2]$ 사이에서 둘러 싸인 넓이를 20등분 시 사다리꼴 법에 의해서 구하라.

문제8. 함수 $\exp(-\pi x)$ 가 x 축 $[0, 2]$ 사이에서 둘러 싸인 넓이를 20등분 시 Simpson $\frac{1}{3}$ 법에 의해서 구하라.

문제9. 함수 $f(x) = e^x$ 과 $g(x) = e^{-x}$ 가 $(0 \leq x \leq 2)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 10등분 시 사다리꼴 법에 의해서 구하라.

문제10. 함수 $x = \frac{1}{2}y^2$ 와 $y = x - 2$ 사이에 로 둘러 싸인 도형의 넓이를 구하라.

시험 결과를 통계 소프트웨어인 SPSS를 사용하여 분석하면 표 2와 같다.

표 2 응용 문제 통계량
Table 2 Statistics Data of Advanced Problems

	N	Min	Max	Avg	Std. Dev.
Group1	50	50.00	99.00	80.14	13.0275
Group2	50	40.00	95.00	76.92	12.5240

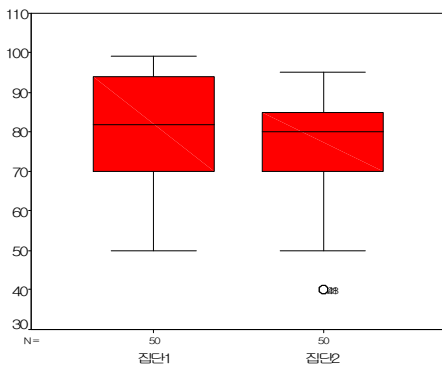


그림 4 표2의 상자 그림
Fig. 4 Box-plot of Table 2

응용문제에 대한 통계 분석한 결과 표2와 그림4에 의하면 기존 수업에 의해 수업한 학생의 성적이 높으나 컴퓨터에 의한 집단의 성적과 큰 차이는 없다. 학생 수준 별로 상위의 학

생의 경우 응용문제에 대한 컴퓨터 적용 시 성적의 변화가 적으나 이해력이 떨어진 학생의 성적 하락폭이 판서 교육 보다 상대적으로 큰 변화가 있다. 컴퓨터 교육 학생 집단에서는 낮은 점수의 이상 값도 존재 한다.

판서교육을 받은 학생의 성적은 중앙값을 중심으로 높은 점수의 학생과 낮은 점수의 학생의 분포가 대칭을 이루고 있으나 컴퓨터 교육 학생은 왜도가 양의 값으로 한쪽으로 기울어진 값으로 나타났다.

3.3 기본 문제와 응용 문제 실험간 통계 분석

각 집단 간 기본 문제와 응용 문제간의 성적 변화를 관찰하기 위해 “기본 문제의 평균과 응용 문제의 각 학생당 성적 차이가 없다” 라는 귀무 가설을 Pairwise t-test 시행한 결과 표 3, 표 4와 같다.

표 3 집단a(μ_a)와 집단1(μ_1) $\mu_a - \mu_1$ 의 검정통계량

Table 3 Statistical Table of $\mu_a - \mu_1$

	집단a 와 집단1 ($\mu_a - \mu_1$)의 통계량				
	평균	표준 편차	차이의 95%신뢰구간	t값	유의 확률
대응차	-.580	7.502	-2.712 1.552	-.547	.587

표 4 집단b(μ_b)와 집단2 (μ_2) $\mu_b - \mu_2$ 의 검정통계량

Table 4 Statistical Table of $\mu_b - \mu_2$

	집단b 와 집단2 학생들의 대응 표본 검정				
	평균	표준 편차	차이의 95%신뢰구간	t값	유의 확률
대응차	4.54.	7.801	2.322 6.757	4.115	.000

표3과 표4에 의하여 보면 기본 판서 수업을 받은 학생의 기본 문제와 응용에 대한 각 학생당 차이가 있는지에 대한 가설검정의 결과 유의수준 0.05에서 유의확률이 0.587로 가설을 기각 할 수 없다는 결과가 나왔다. 즉 판서 이론 수업 후 기본 문제에 시험 성적과 응용문제에 대한 학생 성적의 평균이 변화가 없다. 그러나 컴퓨터 수업 시 결과는 유의수준 0.05에서 기각 되어 학생 성적의 변화가 있다. 즉 통계적으로 기본문제의 이해와 응용문제의 적용 시험 성적 간의 학생 평균 성적에 차이가 있다고 할 수 있다.

IV. 결 론

수학 교육에 있어서의 컴퓨터의 이용 시 인식해야 하는 문제는 첫째 수학 지식과 관련 없는 컴퓨터 하드웨어 상에서의 문제가 있다는 것이다. 예를 들면 소수점 표현과 분수 사용, 정보저장의 한계에 의한 무리수 표현 등의 문제가 있다 즉 컴퓨터의 유한성과 이산성의 문제 이다. 또 수학 교육 이론에 비교적 전문 지식이 없는 전문 프로그래머에 의해 개발된 교육용프로그램을 학습에 이용 시 수학적 지식이 왜곡 전달될 가능성이 있다.

수학 교육에 다양한 매체를 통한 멀티미디어적인 교육이 가지는 여러 장점 중에 문제 풀이 형식의 수동적이고 왜 하는 지 모르는 추상적 내용의 수업에서 같이 참여하고 같이 생각하는 눈에 보이는 수업이 되고, 자신감도 가지게 하는 큰 장점도 있다. 이런 장점을 위해 컴퓨터에 의한 교육도 반드시 필요하다. 교육에 생기는 문제는 소프트웨어 문제는 프로그램의 이해와 적용을 증대 하면 되고, 컴퓨터의 하드웨어적 문제는 기술의 발전에 의해 충분히 개선 될 것이다. 그러나 수학 교육에 있어서의 컴퓨터 교육은 다른 교육과 다르게 프로그램을 다루는 숙련도나 하드웨어적인 문제를 넘어 존재 하는 문제가 있다.

첫째 컴퓨터 환경에서 학생이 이해했다는 것이 프로그램에 대한 특정 조작을 잘 하는 것인지 프로그램이 작동 되는 수학적 개념을 이해했는지를 명확하지 않다. 즉 학생이 수학적 개념 이해가 아닌 컴퓨터 프로그램을 이해가 되어서 응용력이 상당히 떨어졌다. 둘째 많은 사용자가 computer의 기능에 대한 활용기술을 숙지하지 못하여 응용소프트웨어를 쓰지 못하는 경우가 많았다. 셋째, computer의 사용에 익숙한 사용자라도 수학문제해결을 목적으로 하는 소프트웨어에 대한 이해와 사용기법의 부족으로 적절한 결과를 얻지 못 했다. 소프트웨어에 대한 이해와 사용기법을 충분히 숙지하였더라도 개인적으로 수학문제의 응용력 부족으로 문제를 해결에 어려움을 겪기도 했다. 또 교수가 의도하는 이론의 내용을 컴퓨터 이용으로 이해했다고 볼 수 없다는 것이고, 이해 후 적용에 적절하게 정확한 이용을 하지 못했다. 수학을 공부하고 교육해야 하는 가장 큰 이유 중 하나는 문제에 대한 답을 찾는 것에 있는 것은 아니다. 어떤 형상을 보고 문제화하여 그 문제를 이해하고, 자기가 가지고 있는 지식을 이용하여 논리적이고 합리적으로 이론을 전개하여 답을 찾아가는 과정에 있다. 답이 맞으면 다른 분야에 응용을 생각하고 답이 잘못된 경우는 원인을 찾아 반성 하고 새로운 지식을 습득하는 창조 하는

힘을 학생에게 키워 주는 것이다. 이런 과정을 생략하고 컴퓨터로 즉각적 답을 찾는 것은 수학 교육의 목표를 달성하기 어렵다. 이런 원인을 해결하기 위해 수학의 개념을 판서 교육을 통하여 반복 적용 암기한 후 이 추상적 내용이 무엇인지를 컴퓨터 소프트웨어를 잘 이용하여 원리를 이해시키는 교육의 보조 도구로서 적용하는 것이 바람직한 방향이라 생각되고 많은 이용방법의 연구가 필요 할 것 같다.

참고문헌

- [1] 전영국(2001). Mathematica를 이용한 웹기반 미적분 모듈의 개발, 컴퓨터교육학회논문지 제4권 2호, pp105-106.
- [2] Balacheff(1991). "Artificial Intelligence and Real Teaching" Learning from Computers Mathematics Education and Technology Springer-Verlag.
- [3] 이장훈(2002). 고교수학교육을 위한 맵스메티카 활용의 실제 - 수업 모델의 예를 중심으로, 수학사랑 제4회, pp156-178.
- [4] 한동승(2002). 대학 미적분학 교육과 Maple, 수학교육포럼, Vol 1 no 2
- [5] 정갑식(2000). 맵스메티카를 이용한 미분, 적분에 대한 지도, 인하대학교 대학원 석사 논문.

저 자 소개



전 상표

인하대학교 수학과 졸업

인하대학교 수학과 석사

인하대학교 통계학과 박사

현재: 남서울대학교 교양학부 수학담당 전임교수

〈관심분야〉 컴퓨터 활용 수학 교육, 프로세스 분석