

## 정점 색칠 문제의 다항시간 알고리즘

이 상 운\* 최 명 복\*\*

### A Polynomial Time Algorithm for Vertex Coloring Problem

Sang-Un, Lee\* Myeong-Bok, Choi \*\*

#### 요 약

본 논문은 지금까지 NP-완전인 난제로 알려진 정점 색칠 문제를 선형시간 복잡도로 해결한 알고리즘을 제안하였다. 제안된 알고리즘은 그래프  $G=(V,E)$ 의 최소 채색수  $\chi(G) = k$ 를 결정하기 위해 사전에  $k$  값을 알지 못한다는 가정에 기반하고 있다. 단지 주어진 그래프를 독립집합  $\bar{C}$ 와 정점 피복 집합  $C$ 로 정확히 양분하여  $\bar{C}$ 에 색을 배정하는 방법을 적용하였다. 독립집합  $\bar{C}$ 의 원소는  $\delta(G)$ 인 정점  $v$ 가,  $C$ 의 원소는 정점  $v$ 의 인접 정점들  $u$ 가 배정된다. 축소된 그래프  $C$ 는 다시  $\bar{C}$ 와  $C$ 로 양분되며, 이 과정을  $C$ 의 간선이 없을 때까지 수행한다. 26개의 다양한 그래프를 대상으로 제안된 알고리즘을 적용한 결과 정점  $v$ 를 선택하는 횟수는 정점의 수  $n$ 보다 작은 값을 나타내었으며,  $\chi(G) = k$ 를 찾는데 성공하였다.

▶ 키워드 : 최소 정점 피복, 최대 독립 집합, 최소 차수, 정점 색칠 문제, 채색수

#### Abstract

The Vertex Coloring Problem hasn't been solved in polynomial time, so this problem has been known as NP-complete. This paper suggests linear time algorithm for Vertex Coloring Problem (VCP). The proposed algorithm is based on assumption that we can't know a priori the minimum chromatic number  $\chi(G) = k$  for graph  $G=(V,E)$ . This algorithm divides Vertices  $V$  of graph into two parts as independent sets  $\bar{C}$  and cover set  $C$ , then assigns the color to  $\bar{C}$ . The element of independent sets  $\bar{C}$  is a vertex  $v$  that has minimum degree  $\delta(G)$  and the elements of cover set  $C$  are the vertices  $u$  that is adjacent to  $v$ . The reduced graph is divided into independent sets  $\bar{C}$  and cover set  $C$  again until no edge is in a cover set  $C$ . As a result of experiments, this algorithm finds the  $\chi(G) = k$  perfectly for 26 Graphs that shows the number of selecting  $v$  is less than the number of vertices  $n$ .

▶ Keywords : Minimum Vertex Cover (MVC), Maximum Independent Set (MIS), Minimum Degree ( $\delta(G)$ ), Vertex Coloring Problem, Chromatic Number ( $\chi(G)$ )

• 제1저자 : 이상운\*, 교신저자 : 최명복\*\*

• 투고일 : 2011.03.11, 심사일 : 2011.04.08, 게재확정일 : 2011.04.29.

\* \*\* 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 (Dept. of Multimedia Science, Gangneung-Wonju National University)

### I. 서론

정점 (Vertices, **v**) 수 **n**과 간선 (Edges, **e**) 수 **m**으로 구성된 무방향 그래프 (Undirected Graph)  $G=(V,E), u,v \in V, e=\{u,v\} \in E$ 에 대해, 정점 색칠 문제 (Vertex Coloring Problem, VCP)는 인접 (동일 간선 공유)한 정점들 간에는 서로 다른 색을 할당하여 그래프의 모든 정점들을 색칠하는데 소요되는 최소의 채색 수 (Chromatic Number,  $\chi(G)=k$ )를 찾는 문제이다[1]. 이는 기껏해야  $k$ 개의 색을 사용함을 의미하며,  $k$ -coloring이라 부르며, 정점 집합  $V$ 를 최대 독립집합 (Maximum Independent Set, MIS,  $\bar{C}$ )  $\bar{C} \leq k$ 로 분할하는 문제와 같다.  $V=\bar{C}+C$ 로  $C$ 는 최소 정점 피복 (Minimum Vertex Cover, MVC) 문제이다. 정점 색칠 문제는 일정 계획 (Scheduling), 컴파일러에서의 프로세서 레지스터 할당 문제, 무선 기지국 사이의 간섭을 제거하기 위한 주파수 할당, 지도의 색칠, 패턴인식 등 다양한 분야에 적용되고 있다.

$\chi(G)=k$ 를 찾는 방법은 NP-완전 (NP-complete, NPC)로 Karp의 21 NP-완전 문제들 중 하나이다.[2] NPC 문제는 빠른 해법이 알려져 있지 않다는 것이 가장 주목할 만한 특징으로 이들 문제를 빠르게 풀 수 있는지 여부를 결정하는 것이 오늘날 컴퓨터과학 분야에서 주요한 미해결 문제들 중 하나로 남아 있다[2].

사실, 지금까지 최적의 정점 색칠 문제를 찾기 위한 일반적인 해법은 정확한 알고리즘 (Exact Algorithm)인 전수탐색 (Exhaustive Search) 방법으로 채색수  $\chi(G)=k$ 를 알지 못한 상태에서 모든 정점들을 대상으로 한 정점에 특정한 색을 지정하고 인접한 정점들에 다른 색을 지정하는 경우의 수는 조합으로  $n$ 개의 정점에  $k$ 개의 색을 배정하는 방법으로

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ 의 가능한 경우수를 고려해야 한다. 이 방법은 일반적인 그래프에 대해서는 지수 (Exponential Time)  $O(2^n)$  시간이 소요되는 NP-완전 문제로 여겨져 왔다. 최적 해에 근사한 해를 얻는 근사 알고리즘 (Approximation Algorithm)은 채색수  $\chi(G)=k$ 가 주어진 상태에서  $\chi(G)=k$ 를 검증하는 방법으로 4-갈라 평면 그래프 (Planar Graph) 문제는  $O(n^2)$ , 보다 빠른 알고리즘이 제안되지 않고 있다 [3-5].

본 논문에서는 채색수  $\chi(G)=k$ 를 모르는 상태에서  $k$ 를  $O(n)$  수행 복잡도로 근사해 (sub-optimal solution)를 찾는

알고리즘을 제안하여 정점 색칠 문제가 P-문제로 풀 수 있는 방법을 보인다. 2장에서는 점점색칠에 관련된 기존의 알고리즘을 고찰하고 최소 채색수를 찾는 알고리즘을 제안한다. 3장에서는 제안된 알고리즘을 다양한 그래프에 적용하여 적용성을 검증한다.

### II. 정점 색칠 알고리즘

그래프  $G$ 에서 각 정점  $v$ 에 부속한 (Incident) 간선 수를 차수 또는 결합가 (Degree or Valency,  $\deg(v)$  or  $d_G(v)$ )라 한다. 최대 부속 간선 수를 갖는 정점 **v**의 차수를 최대 차수 (Maximum Degree)  $\Delta(G)$ 로, 최소 부속 간선 수를 갖는 정점 **v**의 차수를 최소 차수 (Minimum Degree)  $\delta(G)$ 로 표기한다[6].

$\chi(G)=k$ 를 찾기 위해 본 논문에서는 정점 집합  $V$ 를  $k$ 개의 MIS  $\bar{C}$ 로 정확히 분할하고 각 MIS에 다른 색을 배정하는 방법을 적용한다. 참고로, MIS 문제도 NP-완전 문제에 속하고 있다. 대부분의 MVCP 알고리즘들은  $k$  값을 사전에 알고 있다고 가정하고  $C$ 를 찾는 근사 방법을 적용하였다. MVC 문제를 해결하기 위한 다양한 알고리즘들 중에 그림 1의 욕심쟁이 알고리즘[7,8]이 가장 간단한 장점을 갖고 있는 반면 항상 최적해를 찾지 못하는 단점을 갖고 있다[9].

```

C{1}
while E |
    1. 각 정점 v의 차수 deg(v) 계산.
    2. 최대 차수  $\Delta(G)$ 인 정점 v  $V$  선택 (동일 차수
        정점들이 다수 존재시 임의로 하나 선택).
    C C{v}.
    E E{e  $E$ : v e}.
Return C.
MVC : C.
MIS :  $\bar{C} = V - C$ .
    
```

그림 1. MVC 욕심쟁이 알고리즘  
Fig. 1. MVC Greedy Algorithm

반면에, 제안 알고리즘은 MVC인  $C$ 의 원소 개수  $c$ 와 MIS인  $\bar{C}$ 의 원소개수  $k$ 를 사전에 알지 못한다는 가정에 기반하고  $|\bar{C}|$ 를 최소화 하는  $k$ 를 찾아  $\bar{C}_i, (i=2, \dots, k)$ 에서 다른 색을 배정하는 방법을 적용하였다.  $k$ 를 알고 찾을 경우 이 문제는 NP-완전 문제의 검증에 다항시간이 소요되는 경우로 NP-완전 문제에 대한 알고리즘이 될 수 없으며,  $k$ 를 알지 못한 상태에서  $k$ 를 구하는 문제는 NP-완전 문제의 해를 찾는 방법이다. 따라서 채색수 문제는 P-문제로 근사해를 구

하는 방법을 제시한다. 또한, 임의의 정점을 선택하는 기존의 MVCP 알고리즘과 달리  $\delta(G)$  인 정점  $v$ 를 선택하여 색을 배정한다. 왜냐하면 최대 차수  $\Delta(G)$  정점에 색을 배정하는 방법을 적용한 결과  $k$ 의 최소값을 찾지 못하는 경우가 있어 이를 역으로 적용하였다. 제안 알고리즘은 그림 2와 같이 최소 차수  $\delta(G)$ 인 정점  $v$ 를  $\bar{C}_k$ 에,  $v$  인접 정점들  $u$ 를  $C_k$ 에 배정하는 방법을 적용한다. 제안된 알고리즘은 두 정점 간에는 간선이 존재하지 않는 정점들의 집합인 독립집합에 대해 동일한 색을 배정할 수 있다는 개념을 적용하였으며, 이 때 최대 독립 집합을 찾을 수 있는 방법이다.

그래프  $G=(V,E)$ 에 대해, 첫 번째 단계에서 주어진 정점들  $C_0 = V$ 를  $C_1$ 와  $\bar{C}_1$ 로 정확히 양분 (Bipartite)하여  $\bar{C}_1$ 의 정점들을 동일한 색으로 설정한다.

```

k : 채색 수 (Chromatic Number,  $\chi(G)$ )
 $\bar{C}_k$  :  $k^{th}$  색의 최대독립집합 (MS),  $C_k$  :  $k^{th}$  색의 최소정점피복 (MVC)
 $C_0 = V, E_1 = E, C_1 \leftarrow \emptyset$ 
 $C_0$  각 정점  $v$ 에 대한  $\deg(v)$  계산
for  $k=1$  to  $E_k = \emptyset$ 
  while  $E_k \neq \emptyset$ 
     $E_k$  각 정점  $v$ 의  $\deg(v')$  계산.
    if  $\delta(G) = 0$  정점  $v$  존재 then  $\bar{C}_k \leftarrow \bar{C}_k \cup \{v\}$ .
      /* ( $\mathcal{G}$ ) = 0 정점은 독립집합으로 기존 색 배정 가능
    if
      (( $\mathcal{G}$ ) = 0) ( $\mathcal{G}$ ) = 1 then  $\bar{C}_k \leftarrow \bar{C}_k \cup \{v\}$ 
        /* 기존 색 배정 가능
    else if (( $\mathcal{G}$ ) = 0) ( $\mathcal{G}$ ) = 2 then
      /* ( $\mathcal{G}$ )의  $\deg(v)$ 가 동일한 정점이 2개 이상 존재
      if  $\deg(v)$  = 모두 동일 then 임의의 정점  $v$  선택
      else if  $\deg(v)$  = 모두 다름 then 최소  $\deg(v)$  정점  $v$  선택
      end if
       $\bar{C}_k, \bar{C}_k^* \leftarrow \{v\}$  /* MS 정점 집합.
    end if
    정점  $v$ 의 모든 인접 정점  $u$   $C_{k-1}$  선택.
     $C_{k-1} \leftarrow C_{k-1} \cup \{u\}$  /* MVC 정점 집합.
     $E_k \leftarrow E_k - \{u, v\}$  /*  $u$ 는  $v$ 와 다른 색을 배정해야하기 때문에 부속 간선 삭제.
  Return  $C_k$ 
   $\bar{C}_k \neq C_{k-1} \cap C_k$ .
   $E_{k+1} = e \in C_k$ .
   $C_k$  각 정점  $v$ 의 차수  $\deg(v)$  계산.
  if  $E_{k+1} = \{ \}$  then  $\bar{C}_{k+1} = C_k$ , 알고리즘 종료
Next k
 $\chi(G) = k$ .
    
```

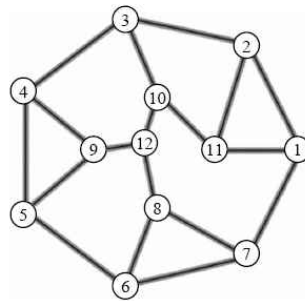
그림 2 정점 색칠 알고리즘  
Fig. 2. Vertex coloring algorithm.

첫 번째 단계를 수행하면 원래 그래프의 정점들  $C_0 = V$

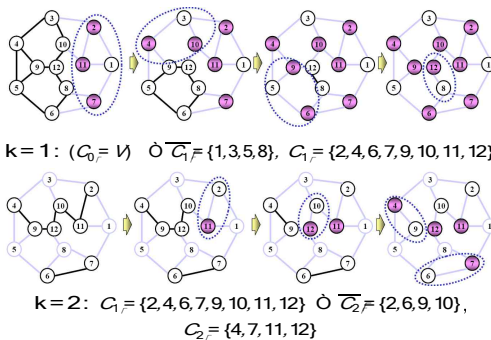
에서 이미 하나의 색이 배정된  $\bar{C}_1$ 을 빼면 나머지 정점들이 다른 색을 배정할 대상이 된다. 즉,  $C_1 = V \setminus \bar{C}_1$ 를 대상으로 두 번째 색을 배정한다. 이를 축소된 그래프라 한다. 축소된 그래프의 정점들  $C_1$ 의 간선들을 대상으로 다시  $C_2$ 와  $\bar{C}_2$ 로 정확히 양분하여  $\bar{C}_2$ 에 2번째 색을 지정한다. 이러한 과정을 축소된 그래프  $C_{k-1}$ 의 간선들이 없을 때까지  $k$ 회 수행된다. 결국, 제안 알고리즘은  $O(kc) \leq O(n)$  회의 수행 복잡도로  $\chi(G) = k$ 를 얻을 수 있다. 여기서  $c$ 는  $\delta(G)$  정점을 선택하는 횟수이다.

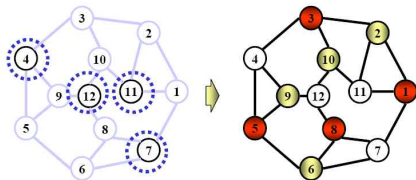
그림 3의  $G_1$  그래프를 대상으로 제안 알고리즘을 적용하여 보자.  $G_1$  그래프는 Dharwadler[10]와 Mathworld[11]에서 인용되었다.

그림 3의  $G_1$  그래프에 정점 색칠 알고리즘을 적용한 결과는 그림 4에 제시되어 있다. 제안 알고리즘은  $n = 12$ 인  $G_1$  그래프에 대해  $n$  보다 적은 7회 (4회+3회)를 수행하여 정확히  $\chi(G) = 3$ 인 3-컬러로 색을 배정하였다.



( $n = 12, \chi(G) = 3$ )  
그림 3  $G_1$  그래프  
Fig. 3.  $G_1$  graph





$k=3: C_2 = \{4, 7, 11, 12\} \circ \overline{C_3} = \{4, 7, 11, 12\} \circ {}^2(G) = 3$

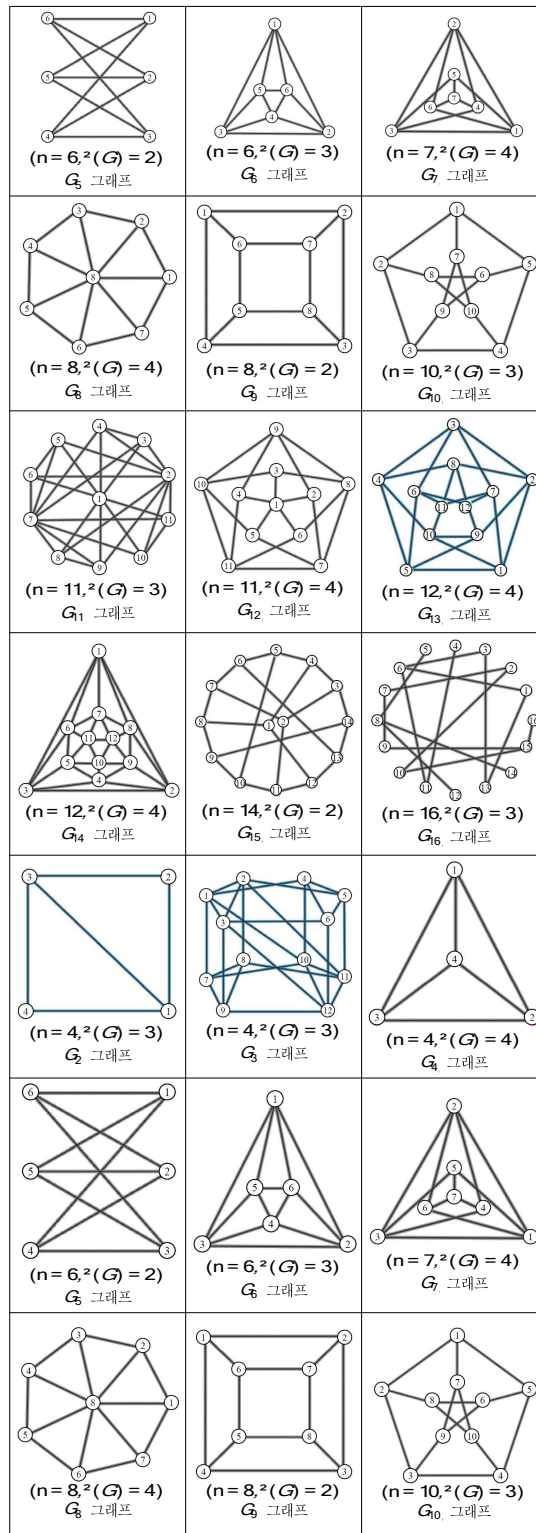
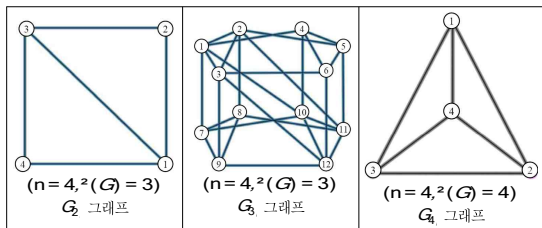
k	(G)	deg(v)	deg(v')	MS(v)	MWC(u)	$\overline{C_k}$	$C_k$
1	{1, 2, 7, 12}	3	3	{1}	{2, 7, 1}	{1}	{2, 7, 11}
	{3, 6, 8, 10}	3	2	{3}	{4, 10}	{1, 3}	{2, 4, 7, 10, 11}
	{5, 6, 8, 9, 12}	3	2	{5}	{6, 9}	{1, 3, 5}	{2, 4, 6, 7, 9, 10, 11}
	{8, 12}	3	1	{8}	{12}	{1, 3, 5, 8}	{2, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12}
2	{2, 4, 6, 7}	1	1	{2}	{11}	{2}	{11}
	{4, 6, 7}	1	1	{10}	{12}	{2, 10}	{11, 12}
	{4, 6, 7}	2	1	{9}	{4}	{2, 9, 10}	{4, 11, 12}
	{6, 7}	1	1	{6}	{7}	{2, 6, 9, 10}	{4, 7, 11, 12}
3	{4, 7, 11, 12}	0	0		{1}	{4, 7, 11, 12}	-

그림 4.  $G_1$  그래프의 정점 색칠 알고리즘  
Fig. 4. Vertex coloring algorithm for  $G_1$  graph

### III. 실험 및 결과 분석

#### 1. 실험 데이터

본 절에서는 가능한 다양한 형태의 그래프들을 대상으로 제안된 정점 색칠 알고리즘이 얼마나 빠르고 정확히 최적해를 구하는지 고찰해 본다. 이를 위해 실험 데이터는 그림 5와 같이 다양한 형태의 일반 그래프를 대상으로 선정되었다.  $G_2 \sim G_4, G_6, G_7, G_{11} \sim G_{17}$ 은 Dharwadkar[10]에서,  $G_5, G_8$ 은 Dharwadkar[10]와 Mathworld[11]에서,  $G_{10}, G_{18}$ 은 Wikipedia[1]와 Mathworld[11]에서,  $G_{19}$ 는 Hermann과 Hertz[12]에서,  $G_{20}$ 은 Naserasr와 Tarchif[13]에서,  $G_{21}$ 은 Wikipedia[14]에서,  $G_{22}, G_{23}$ 은 Thomas[15]에서,  $G_{24}$ 는 Wikipedia[16]에서 인용되었다. 실험 방법은 제안된 알고리즘을 구현한 프로그램을 적용하지 않고, 선정된 다양한 그래프에 대해 제안된 알고리즘을 적용하여 수기식으로 검증하였다.



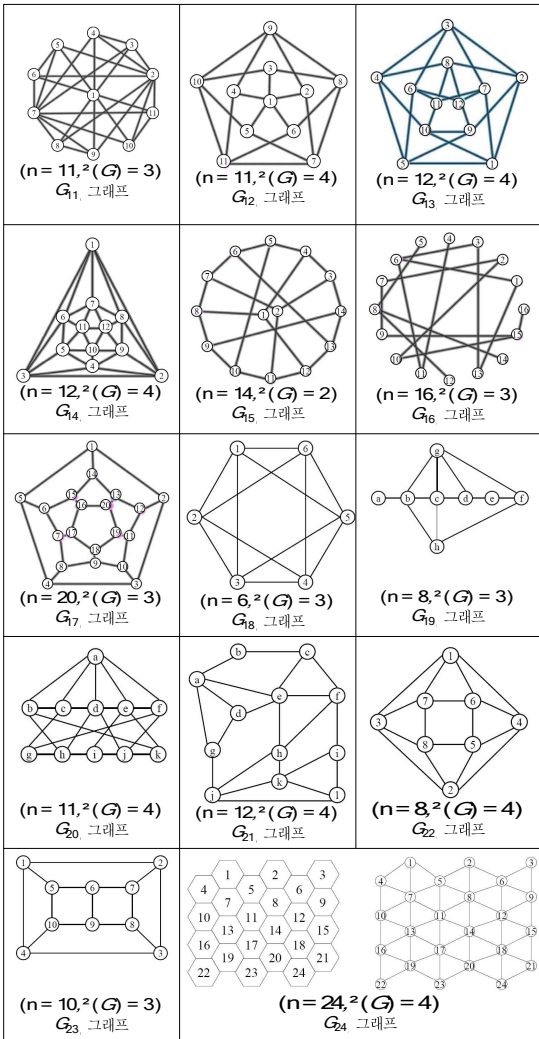


그림 5. 일반 그래프  
Fig. 5. General graphs

## 2. 알고리즘 적용

그림 5의 23개 일반 그래프에 대해 정점 색칠 알고리즘을 적용한 결과는 표 1에 제시되어 있다.

표 1. 일반 그래프의 정점 색칠 알고리즘  
Table 1. Vertex coloring algorithm for general graphs  
(a)  $G_1$  그래프

$k$	$\delta(G)$	$v$	$u$	$\overline{C}_k$	$C_k$
1	{2,4}	{2}	{1,3}	{2,4}	{1,3}
2	{1,3}	{1}	{3}	{1}	{3}
3	{3}	{3}	-	{3}	-
$\chi(G)=3$		$\overline{C}_1 = \{2,4\}, \overline{C}_2 = \{1\}, \overline{C}_3 = \{3\}$			

(b)  $G_8$  그래프

$k$	$\delta(G)$	$v$	$u$	$\overline{C}_k$	$C_k$
1	{4,5,6,7,8,9}	{4}	{1,5,6,10}	{4}	{1,5,6,10}
	{7}	{7}	{8,9}	{4,7}	{1,5,6,8,9,10}
	{2,3,11,12}	{2}	{3,11}	{2,4,7,12}	{1,3,5,6,8,9,10,11}
2	{1,5,6,8,9,10}	{1}	{3,10}	{1}	{3,10}
	{6,9}	{6}	{5}	{1,6}	{3,5,10}
	{9,11}	{11}	{8}	{1,6,9,11}	{3,5,8,10}
3	{3,5,8,10}	{3,5,8,10}	-	{3,5,8,10}	-
$\chi(G)=3$		$\overline{C}_1 = \{2,4,7,12\}, \overline{C}_2 = \{1,6,9,11\}, \overline{C}_3 = \{3,5,8,10\}$			

(c)  $G_4$  그래프

$k$	$\delta(G)$	$v$	$u$	$\overline{C}_k$	$C_k$
1	{1,2,3,4}	{1}	{2,3,4}	{1}	{2,3,4}
2	{2,3,4}	{2}	{3,4}	{2}	{3,4}
3	{3,4}	{3}	{4}	{3}	{4}
4	{4}	{4}	-	{4}	-
$\chi(G)=4$		$\overline{C}_1 = \{1\}, \overline{C}_2 = \{2\}, \overline{C}_3 = \{3\}, \overline{C}_4 = \{4\}$			

(d)  $G_8$  그래프

$k$	$\delta(G)$	$v$	$u$	$\overline{C}_k$	$C_k$
1	{1,2,...,6}	{1}	{4,5,6}	{1,2,3}	{4,5,6}
2	{4,5,6}	{4,5,6}	-	{4,5,6}	-
$\chi(G)=2$		$\overline{C}_1 = \{1,2,3\}, \overline{C}_2 = \{4,5,6\}$			

(e)  $G_8$  그래프

$k$	$\delta(G)$	$v$	$u$	$\overline{C}_k$	$C_k$
1	{1,2,...,6}	{1}	{2,3,5,6}	{1,4}	{2,3,5,6}
2	{2,3,5,6}	{2}	{3,6}	{2,5}	{3,6}
3	{3,6}	{3,6}	-	{3,6}	-
$\chi(G)=3$		$\overline{C}_1 = \{1,4\}, \overline{C}_2 = \{2,5\}, \overline{C}_3 = \{3,6\}$			

(f)  $G_7$  그래프

$k$	$\delta(G)$	$v$	$u$	$\overline{C}_k$	$C_k$
1	{4,5,6,7}	{4}	{2,3,7}	{4}	{2,3,7}
	{5,6}	{5}	{1}	{4,5,6}	{1,2,3,7}
2	{7}	{7}	-	{7}	-
	{1,2,3}	{1}	{2,3}	{1,7}	{2,3}
3	{2,3}	{2}	{3}	{2}	{3}
4	{3}	{3}	-	{3}	-
$\chi(G)=4$		$\overline{C}_1 = \{4,5,6\}, \overline{C}_2 = \{1,7\}, \overline{C}_3 = \{2\}, \overline{C}_4 = \{3\}$			

(g)  $G_8$  그래프

$k$	$\delta(G)$	$v$	$u$	$\overline{C}_k$	$C_k$
1	{1,2,...,7}	{1}	{2,7,8}	{1}	{2,7,8}
	{3,6}	{3}	{4}	{1,3}	{2,4,7,8}
	{5,6}	{5}	{6}	{1,3,5}	{2,4,6,7,8}
2	{2,4}	{2}	{8}	{2,4}	{8}
	{6,7}	{6}	{7}	{2,4,6}	{7,8}
3	{7,8}	{7}	{8}	{7}	{8}
4	{8}	{8}	-	{8}	-
$\chi(G)=4$		$\overline{C}_1 = \{1,3,5\}, \overline{C}_2 = \{2,4,6\}, \overline{C}_3 = \{7\}, \overline{C}_4 = \{8\}$			

(h)  $G_3$  그래프

$k$	$\delta(G)$	$v$	$u$	$\bar{C}_k$	$C_k$
1	$\{1,2,\dots,8\}$ $\{3,5,7\}$	$\{1\}$ $\{3\}$	$\{2,4,6\}$ $\{8\}$	$\{1\}$ $\{1,3,5,7\}$	$\{2,4,6\}$ $\{2,4,6,8\}$
2	$\{2,4,6,8\}$	$\{2,4,6,8\}$	-	$\{2,4,6,8\}$	-
$\chi(G) = 2$		$\bar{C}_1 = \{1,3,5,7\}, \bar{C}_2 = \{2,4,6,8\}$			

(i)  $G_6$  그래프

$k$	$\delta(G)$	$v$	$u$	$\bar{C}_k$	$C_k$
1	$\{1,2,\dots,10\}$ $\{3,4,6,8,9,10\}$ $\{6,10\}$	$\{1\}$ $\{3\}$ $\{6\}$	$\{2,5,7\}$ $\{4,9\}$ $\{8\}$	$\{1\}$ $\{1,3\}$ $\{1,3,6,10\}$	$\{2,5,7\}$ $\{2,4,5,7,9\}$ $\{2,4,5,7,8,9\}$
2	$\{2,4,5,7,8,9\}$ $\{4,5,7,9\}$ $\{7,9\}$	$\{2\}$ $\{4\}$ $\{7\}$	$\{8\}$ $\{5\}$ $\{9\}$	$\{2\}$ $\{2,4\}$ $\{2,4,7\}$	$\{8\}$ $\{5,8\}$ $\{5,8,9\}$
3	$\{5,8,9\}$	$\{5,8,9\}$	-	$\{5,8,9\}$	-
$\chi(G) = 3$		$\bar{C}_1 = \{1,3,6,10\}, \bar{C}_2 = \{2,4,7\}, \bar{C}_3 = \{5,8,9\}$			

(j)  $G_1$  그래프

$k$	$\delta(G)$	$v$	$u$	$\bar{C}_k$	$C_k$
1	$\{3,\dots,6,8,\dots,11\}$ $\{5,6,8,9,10,11\}$ $\{8,9,10,11\}$ $\{10,11\}$	$\{3\}$ $\{5\}$ $\{8\}$ $\{10\}$	$\{1,2,4,7\}$ $\{6\}$ $\{9\}$ $\{11\}$	$\{3\}$ $\{3,5\}$ $\{3,5,8\}$ $\{3,5,8,10\}$	$\{1,2,4,7\}$ $\{1,2,4,6,7\}$ $\{1,2,4,6,7,9\}$ $\{1,2,4,6,7,9,11\}$
2	$\{4,6,9,11\}$	$\{4\}$	$\{1,2,7\}$	$\{4,6,9,11\}$	$\{1,2,7\}$
3	$\{1,2,7\}$	$\{1,2,7\}$	-	$\{1,2,7\}$	-
$\chi(G) = 3$		$\bar{C}_1 = \{3,5,8,10\}, \bar{C}_2 = \{4,6,9,11\}, \bar{C}_3 = \{1,2,7\}$			

(k)  $G_2$  그래프

$k$	$\delta(G)$	$v$	$u$	$\bar{C}_k$	$C_k$
1	$\{2,3,4,5,6\}$ $\{4,5\}$ $\{5,6\}$ $\{3,6\}$	$\{2\}$ $\{4\}$ $\{5\}$ $\{3\}$	$\{1,7,9\}$ $\{11\}$ $\{10\}$ $\{8\}$	$\{2\}$ $\{2,4\}$ $\{2,4,5\}$ $\{2,3,4,5,6\}$	$\{1,7,9\}$ $\{1,7,9,11\}$ $\{1,7,9,10,11\}$ $\{1,7,8,9,10,11\}$
2	$\{7,8,9,10,11\}$ $\{9,10\}$	$\{7\}$ $\{9\}$	$\{8,11\}$ $\{10\}$	$\{1,7\}$ $\{1,7,9\}$	$\{8,11\}$ $\{8,10,11\}$
3	$\{8\}$ $\{10,11\}$	$\{8\}$ $\{10\}$	$\{11\}$	$\{8\}$ $\{8,10\}$	$\{11\}$
4	$\{11\}$	$\{11\}$	-	$\{11\}$	-
$\chi(G) = 4$		$\bar{C}_1 = \{2,3,4,5,6\}, \bar{C}_2 = \{1,7,9\}, \bar{C}_3 = \{8,10\}, \bar{C}_4 = \{11\}$			

(l)  $G_3$  그래프

$k$	$\delta(G)$	$v$	$u$	$\bar{C}_k$	$C_k$
1	$\{1,2,\dots,12\}$ $\{9\}$ $\{3,4,6,8,11\}$ $\{8,11\}$	$\{1\}$ $\{9\}$ $\{3\}$ $\{8\}$	$\{2,5,7,10\}$ $\{12\}$ $\{4,6\}$ $\{11\}$	$\{1\}$ $\{1,9\}$ $\{1,3,9\}$ $\{1,3,8,9\}$	$\{2,5,7,10\}$ $\{2,5,7,10,12\}$ $\{2,4,5,6,7,10,12\}$ $\{2,4,5,6,7,10,11,12\}$
2	$\{2\}$ $\{4,5,7,10\}$ $\{6,7,11,12\}$	$\{2\}$ $\{4\}$ $\{6\}$	$\{5,10\}$ $\{11,12\}$	$\{2\}$ $\{2,4\}$ $\{2,4,6,7\}$	$\{5,10\}$ $\{5,10,11,12\}$
3	$\{5,12\}$ $\{10,11\}$	$\{5,12\}$ $\{10\}$	$\{11\}$	$\{5,12\}$ $\{5,10,12\}$	$\{11\}$
4	$\{11\}$	$\{11\}$	-	$\{11\}$	-
$\chi(G) = 4$		$\bar{C}_1 = \{1,3,8,9\}, \bar{C}_2 = \{2,4,6,7\}, \bar{C}_3 = \{5,10,12\}, \bar{C}_4 = \{11\}$			

(m)  $G_4$  그래프

$k$	$\delta(G)$	$v$	$u$	$\bar{C}_k$	$C_k$
1	$\{1,2,\dots,12\}$ $\{4,5,9,11,12\}$ $\{11,12\}$	$\{1\}$ $\{4\}$ $\{11\}$	$\{2,3,6,7,8\}$ $\{5,9,10\}$	$\{1\}$ $\{1,4\}$ $\{1,4,11\}$	$\{2,3,6,7,8\}$ $\{2,3,5,6,7,8,9,10\}$ $\{2,3,5,6,7,8,9,10,12\}$
2	$\{2,3,5,6,7,8,10\}$ $\{5,6,7,10,12\}$ $\{5,6\}$	$\{2\}$ $\{12\}$ $\{5\}$	$\{3,8,9\}$ $\{7,10\}$ $\{6\}$	$\{2\}$ $\{2,12\}$ $\{2,5,12\}$	$\{3,8,9\}$ $\{3,7,8,9,10\}$ $\{3,6,7,8,9,10\}$
3	$\{3,10\}$ $\{7,10\}$ $\{9,10\}$	$\{3\}$ $\{7\}$ $\{9\}$	$\{6\}$ $\{7\}$ $\{10\}$	$\{3\}$ $\{3,7\}$ $\{3,7,9\}$	$\{6\}$ $\{3,7\}$ $\{6,8,10\}$
4	$\{6,8,10\}$	$\{6,8,10\}$	-	$\{6,8,10\}$	-
$\chi(G) = 4$		$\bar{C}_1 = \{1,4,11\}, \bar{C}_2 = \{2,5,12\}, \bar{C}_3 = \{3,7,9\}, \bar{C}_4 = \{6,8,10\}$			

(n)  $G_5$  그래프

$k$	$\delta(G)$	$v$	$u$	$\bar{C}_k$	$C_k$
1	$\{1,2,\dots,14\}$ $\{3,5,7,9,11,13\}$ $\{7,9,11,13\}$ $\{5,9,10,11\}$	$\{1\}$ $\{3\}$ $\{7\}$ $\{5\}$	$\{4,8,12\}$ $\{2,14\}$ $\{6\}$ $\{10\}$	$\{1\}$ $\{1,3\}$ $\{1,3,7,13\}$ $\{1,3,5,7,9,11,13\}$	$\{4,8,12\}$ $\{2,4,8,12,14\}$ $\{2,4,6,8,12,14\}$ $\{2,4,6,8,10,12,14\}$
2	$\{2,4,6,8,10,12,14\}$	$\{2,4,6,8,10,12,14\}$	-	$\{2,4,6,8,10,12,14\}$	-
$\chi(G) = 2$		$\bar{C}_1 = \{1,3,5,7,13\}, \bar{C}_2 = \{2,4,6,8,10,12,14\}$			

(o)  $G_6$  그래프

$k$	$\delta(G)$	$v$	$u$	$\bar{C}_k$	$C_k$
1	$\{4,5,12,14,16\}$ $\{5,12,14,16\}$ $\{16\}$ $\{9,10\}$ $\{10\}$ $\{1,3,6,13\}$	$\{4\}$ $\{5\}$ $\{16\}$ $\{9\}$ $\{10\}$ $\{1\}$	$\{11\}$ $\{8\}$ $\{15\}$ $\{7\}$ $\{10\}$ $\{6,13\}$	$\{4\}$ $\{4,5,12,14\}$ $\{4,5,12,14,16\}$ $\{4,5,9,12,14,16\}$ $\{4,5,9,10,12,14,16\}$ $\{1,3,4,5,9,10,12,14,16\}$	$\{11\}$ $\{8,11\}$ $\{8,11,15\}$ $\{7,8,11,15\}$ $\{2,7,8,11,15\}$ $\{2,6,7,8,11,13,15\}$
2	$\{8,13,15\}$ $\{2,6,7,11\}$ $\{6,11\}$	$\{8,13,15\}$ $\{2\}$ $\{6\}$	$\{7\}$ $\{11\}$	$\{8,13,15\}$ $\{2,8,13,15\}$ $\{2,6,8,13,15\}$	$\{7,11\}$
3	$\{7,11\}$	$\{7,11\}$	-	$\{7,11\}$	-
$\chi(G) = 3$		$\bar{C}_1 = \{1,3,4,5,9,10,12,14,16\}, \bar{C}_2 = \{2,6,8,13,15\}, \bar{C}_3 = \{7,11\}$			

(p)  $G_7$  그래프

$k$	$\delta(G)$	$v$	$u$	$\bar{C}_k$	$C_k$
1	$\{1,2,\dots,20\}$ $\{3,4,6,12,13,15\}$ $\{6,8,9,11,12,13,15\}$ $\{8\}$ $\{11,12,13,16,17,18\}$ $\{13,15\}$ $\{16,18\}$	$\{1\}$ $\{3\}$ $\{6\}$ $\{8\}$ $\{11\}$ $\{13\}$ $\{16\}$	$\{2,5,14\}$ $\{4,10\}$ $\{7,15\}$ $\{9\}$ $\{12,19\}$ $\{13,6,8,11\}$ $\{17\}$	$\{1\}$ $\{1,3\}$ $\{1,3,6\}$ $\{1,3,6,8\}$ $\{1,3,6,8,11\}$ $\{1,3,6,8,11,13,16,18\}$	$\{2,5,14\}$ $\{2,4,5,10,14,15\}$ $\{2,4,5,7,10,14,15\}$ $\{2,4,5,7,9,10,12,14,15,19\}$ $\{2,4,5,7,9,10,12,14,15,19,20\}$ $\{2,4,5,7,9,10,12,14,15,17,19,20\}$
2	$\{2,4,5,7,9,10,12,14,15,17,19,20\}$ $\{4,5,7,9,10,14,15,17,19,20\}$ $\{7,9,10,14,15,17,19,20\}$ $\{9,10,14,15,19,20\}$ $\{14,15,19,20\}$ $\{19,20\}$	$\{2\}$ $\{4\}$ $\{7\}$ $\{9\}$ $\{14\}$ $\{19\}$	$\{12\}$ $\{5\}$ $\{17\}$ $\{10\}$ $\{15\}$ $\{20\}$	$\{2\}$ $\{2,4\}$ $\{2,4,7\}$ $\{2,4,7,9\}$ $\{2,4,7,9,14\}$ $\{2,4,7,9,14,19\}$	$\{12\}$ $\{5,12\}$ $\{5,12,17\}$ $\{5,10,12,17\}$ $\{5,10,12,15,17\}$ $\{5,10,12,15,17,20\}$
3	$\{5,10,12,15,17,20\}$	$\{5,10,12,15,17,20\}$	-	$\{5,10,12,15,17,20\}$	-
$\chi(G) = 3$		$\bar{C}_1 = \{1,3,6,8,11,13,16,18\}, \bar{C}_2 = \{2,4,7,9,14,19\}, \bar{C}_3 = \{5,10,12,15,17,20\}$			

(q)  $G_8$  그래프

$k$	$\delta(G)$	$v$	$u$	$\bar{C}_k$	$C_k$
1	$\{1,2,3,4,5,6\}$	$\{1\}$	$\{2,3,5,6\}$	$\{1,4\}$	$\{2,3,5,6\}$
2	$\{2,3,5,6\}$	$\{2\}$	$\{3,6\}$	$\{2,5\}$	$\{3,6\}$
3	$\{3,6\}$	$\{3,6\}$	-	$\{3,6\}$	-
$\chi(G) = 3$		$\bar{C}_1 = \{1,4\}, \bar{C}_2 = \{2,5\}, \bar{C}_3 = \{3,6\}$			

(r)  $G_9$  그래프

$k$	$\delta(G)$	$v$	$u$	$\overline{C}_k$	$C_k$
1	$\{a\}$ $\{e\}$ $\{g,h\}$	$\{a\}$ $\{e\}$ $\{g\}$	$\{b\}$ $\{d,f\}$ $\{c\}$	$\{a\}$ $\{a,e\}$ $\{a,e,g,h\}$	$\{b\}$ $\{b,d,f\}$ $\{b,c,d,f\}$
2	$\{f\}$ $\{b,d\}$	$\{f\}$ $\{b\}$	- $\{c\}$	$\{f\}$ $\{f,b,d\}$	- $\{c\}$
3	$\{c\}$	$\{c\}$	-	$\{c\}$	-
$\chi(G) = 3$ $\overline{C}_1 = \{a,e,g,h\}, \overline{C}_2 = \{f,b,d\}, \overline{C}_3 = \{c\}$					

(s)  $G_{20}$  그래프

$k$	$\delta(G)$	$v$	$u$	$\overline{C}_k$	$C_k$
1	$\{g,k\}$ $\{b,i\}$ $\{d,e,i,j\}$	$\{g\}$ $\{b\}$ $\{d\}$	$\{c,f,h\}$ $\{a,k\}$ $\{e,j\}$	$\{g\}$ $\{b,g\}$ $\{b,d,g,i\}$	$\{c,f,h\}$ $\{a,c,f,h,k\}$ $\{a,c,e,f,h,j,k\}$
2	$\{h\}$ $\{c\}$ $\{e,f,j,k\}$	$\{h\}$ $\{c\}$ $\{e\}$	- $\{a\}$ $\{f,k\}$	$\{h\}$ $\{c,h\}$ $\{c,e,h,j\}$	- $\{a\}$ $\{a,f,k\}$
3	$\{k\}$ $\{a,f\}$	$\{k\}$ $\{a\}$	$\{f\}$	$\{k\}$ $\{a,k\}$	$\{f\}$
4	$\{f\}$	$\{f\}$	-	$\{f\}$	-
$\chi(G) = 4$ $\overline{C}_1 = \{b,d,g,i\}, \overline{C}_2 = \{c,e,h,j\}, \overline{C}_3 = \{a,k\}, \overline{C}_4 = \{f\}$					

(t)  $G_1$  그래프

$k$	$\delta(G)$	$v$	$u$	$\overline{C}_k$	$C_k$
1	$\{b\}$ $\{d,g\}$ $\{f\}$ $\{j,k,l\}$	$\{b\}$ $\{d\}$ $\{f\}$ $\{j\}$	$\{a,c\}$ $\{e,g\}$ $\{h,i\}$ $\{k,l\}$	$\{b\}$ $\{b,d\}$ $\{b,d,f,j\}$	$\{a,c\}$ $\{a,c,e,g\}$ $\{a,c,e,g,h,i,k,l\}$
2	$\{c,g\}$ $\{a,g,h\}$ $\{h\}$ $\{i,l\}$	$\{c\}$ $\{a\}$ $\{h\}$ $\{i\}$	$\{e\}$ $\{g\}$ $\{k\}$ $\{a,c,h,i\}$	$\{c\}$ $\{a,c,h\}$ $\{a,c,h,i\}$	$\{e\}$ $\{e,g\}$ $\{e,g,k\}$ $\{e,g,k,l\}$
3	$\{e,g\}$ $\{k,l\}$	$\{e,g\}$ $\{k\}$	$\{l\}$	$\{e,g\}$ $\{e,g,k\}$	$\{l\}$
4	$\{l\}$	$\{l\}$	-	$\{l\}$	-
$\chi(G) = 4$ $\overline{C}_1 = \{b,d,f,j\}, \overline{C}_2 = \{a,c,h,i\}, \overline{C}_3 = \{e,g,k\}, \overline{C}_4 = \{l\}$					

(u)  $G_{22}$  그래프

$k$	$\delta(G)$	$v$	$u$	$\overline{C}_k$	$C_k$
1	$\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ $\{2,5,8\}$	$\{1\}$ $\{2\}$	$\{3,4,6,7\}$ $\{5,8\}$	$\{1\}$ $\{1,2\}$	$\{3,4,6,7\}$ $\{3,4,5,6,7,8\}$
2	$\{3,4\}$ $\{4,5,6\}$	$\{3\}$ $\{5\}$	$\{7,8\}$ $\{4,6\}$	$\{3\}$ $\{3,5\}$	$\{7,8\}$ $\{4,6,7,8\}$
3	$\{4,8\}$ $\{7,8\}$	$\{4\}$ $\{7\}$	$\{6\}$ $\{8\}$	$\{4\}$ $\{4,7\}$	$\{6\}$ $\{6,8\}$
4	$\{6,8\}$	$\{6,8\}$	-	$\{6,8\}$	-
$\chi(G) = 4$ $\overline{C}_1 = \{1,2\}, \overline{C}_2 = \{3,5\}, \overline{C}_3 = \{4,7\}, \overline{C}_4 = \{6,8\}$					

(v)  $G_{23}$  그래프

$k$	$\delta(G)$	$v$	$u$	$\overline{C}_k$	$C_k$
1	$\{1,2,\dots,10\}$ $\{3,10\}$ $\{7,10\}$ $\{9,10\}$	$\{1\}$ $\{3\}$ $\{7\}$ $\{9\}$	$\{2,4,5\}$ $\{8\}$ $\{6\}$ $\{10\}$	$\{1\}$ $\{3\}$ $\{1,3,7\}$ $\{1,3,7,9\}$	$\{2,4,5\}$ $\{2,4,5,8\}$ $\{2,4,5,6,8\}$ $\{2,4,5,6,8,10\}$
2	$\{2,8\}$ $\{4,6\}$ $\{5,6\}$	$\{2,8\}$ $\{4\}$ $\{5\}$	- $\{10\}$ $\{6\}$	$\{2,8\}$ $\{2,4,8\}$ $\{2,4,5,8\}$	- $\{10\}$ $\{6,10\}$
3	$\{6,10\}$	$\{6,10\}$	-	$\{6,10\}$	-
$\chi(G) = 3$ $\overline{C}_1 = \{1,3,7,9\}, \overline{C}_2 = \{2,4,5,8\}, \overline{C}_3 = \{4,7\}, \overline{C}_4 = \{6,10\}$					

(w)  $G_{24}$  그래프

$k$	$\delta(G)$	$v$	$u$	$\overline{C}_k$	$C_k$
1	$\{3,22\}$ $\{2,22\}$ $\{1,22\}$ $\{10,22\}$ $\{22\}$ $\{11,23\}$ $\{23\}$ $\{12,24\}$ $\{21,24\}$	$\{3\}$ $\{2\}$ $\{1\}$ $\{10\}$ $\{22\}$ $\{11\}$ $\{23\}$ $\{12\}$ $\{21\}$	$\{6,9\}$ $\{5,5\}$ $\{4,7\}$ $\{13,16\}$ $\{19\}$ $\{14,17\}$ $\{20\}$ $\{15,18\}$ $\{24\}$	$\{3\}$ $\{2,3\}$ $\{1,2,3\}$ $\{1,2,3,10\}$ $\{1,2,3,10,22\}$ $\{1,2,3,10,11,22\}$ $\{1,2,3,10,11,22,23\}$ $\{1,2,3,10,11,12,22,23\}$	$\{6,9\}$ $\{5,6,8,9\}$ $\{4,5,6,7,8,9\}$ $\{4,5,6,7,8,9,13,16\}$ $\{4,5,6,7,8,9,13,16,19\}$ $\{4,5,6,7,8,9,13,14,16,17,19,20\}$ $\{4,5,6,7,8,9,13,14,15,16,17,18,19,20\}$ $\{4,5,6,7,8,9,13,14,15,16,17,18,19,20,24\}$
2	$\{4\}$ $\{5\}$ $\{6\}$ $\{15\}$ $\{24\}$ $\{14\}$ $\{13,16,19\}$	$\{4\}$ $\{5\}$ $\{6\}$ $\{15\}$ $\{24\}$ $\{14\}$ $\{13,16,19\}$	$\{7\}$ $\{8\}$ $\{9\}$ $\{4,5,6\}$ $\{4,5,6,15\}$ $\{4,5,6,15,24\}$ $\{4,5,6,13,14,15,24\}$	$\{4\}$ $\{4,5\}$ $\{4,5,6,15\}$ $\{4,5,6,15,24\}$ $\{4,5,6,13,14,15,24\}$	$\{7\}$ $\{7,8\}$ $\{7,8,9,18\}$ $\{7,8,9,18,20\}$ $\{7,8,9,17,18,20\}$ $\{7,8,9,16,17,18,19,20\}$
3	$\{7,8,9\}$ $\{16,18\}$ $\{17,18\}$	$\{7,8,9\}$ $\{16\}$ $\{17\}$	$\{19\}$	$\{7,8,9\}$ $\{7,8,9,16\}$ $\{7,8,9,16,17,18\}$	$\{19\}$ $\{19,20\}$
4	$\{19,20\}$	$\{19,20\}$	-	$\{19,20\}$	-
$\chi(G) = 4$ $\overline{C}_1 = \{1,2,3,10,11,12,21,22,23\}, \overline{C}_2 = \{4,5,6,13,14,15,24\}, \overline{C}_3 = \{7,8,9,16,17,18\}, \overline{C}_4 = \{19,20\}$					

### 3. 알고리즘 적용 결과 분석

본 논문에서 적용된 24개 그래프에 대해 정점 색칠 알고리즘의 성능을 분석하여 본다. 알고리즘 성능 분석 결과는 표 2에 제시되어 있다. 제안된 알고리즘은 24개 데이터 모두에서 최적해를 찾는데 성공하였다. 또한,  $v$  정점을 선택하는 알고리즘 수행 횟수는  $n$ 보다 작거나 같아  $O(kc) \leq O(n)$ 의 복잡도임을 알 수 있다. 15개의 평면 그래프에서는 De Morgan의  ${}^2(G) d4$ 의 법칙[1]이 성립함을 알 수 있다.

표 2. 알고리즘 성능 분석  
Table 2. Analysis of algorithm performance

그래프	$n$	평면 그래프	$\chi(G)$	정점 색칠 알고리즘	
				수행횟수	최적해
$G_1$	12	☐	3	11	Success
$G_2$	4	☐	3	3	Success
$G_3$	4	×	4	7	Success
$G_4$	4	☐	2	4	Success
$G_5$	6	×	3	2	Success
$G_6$	6	☐	4	3	Success
$G_7$	7	×	4	6	Success
$G_8$	8	☐	2	7	Success
$G_9$	8	☐	3	3	Success
$G_{10}$	10	×	3	7	Success
$G_{11}$	11	×	4	6	Success
$G_{12}$	11	×	4	10	Success
$G_{13}$	12	×	4	10	Success
$G_{14}$	12	☐	2	10	Success
$G_{15}$	14	×	3	5	Success
$G_{16}$	16	×	3	10	Success
$G_{17}$	20	☐	3	14	Success
$G_{18}$	6	×	3	3	Success
$G_{19}$	8	☐	4	6	Success
$G_{20}$	11	×	4	9	Success
$G_{21}$	12	☐	4	11	Success
$G_{22}$	8	☐	3	7	Success
$G_{23}$	10	☐	4	8	Success
$G_{24}$	24	☐	4	20	Success

#### IV. 결론

본 논문은 정점 색칠 문제를 선형시간 복잡도로 해결하는 알고리즘을 제안하였다. 제안된 알고리즘은 그래프의 최소 정점 채색수  $\chi(G) = k$ 를 결정하기 위해 최대 독립집합  $\bar{C}$ 의 개수  $k$ 를 사전에 알지 못한다는 가정에 기반한다. 주어진 그래프의  $\delta(G)$  정점  $v$ 를  $\bar{C}$ 에,  $v$ 에 인접한 정점들  $u$ 를 정점 피복 집합  $C$ 에 포함시켜 그래프를 정확히 양분한다. 양분된 그래프의  $\bar{C}$ 에 색을 배정한다. 축소된 그래프  $C$ 에 대해 다시 독립집합과 정점피복 집합으로 양분하여 색을 배정한다. 이 과정을 축소된 그래프  $C$ 의 모든 정점들을 연결하는 간선이 없을 때까지 수행한다.

제안된 알고리즘을 24개의 일반 그래프와 인도와 미국 지도를 대상으로 적용 결과 수행 횟수는 정점 수  $n$ 보다 작은 결과를 얻었으며, 채색수  $\chi(G) = k$ 를 얻는데 성공하였다.

본 논문에서 제안된 정점 색칠 알고리즘은 지금까지 NP-완전인 난제로 여겨졌던 정점 색칠 문제를 선형 시간으로 근사해를 구하는 방법이 존재함을 보였다. 결국, 본 알고리즘은 정점 색칠 문제의 근사해를 도출하는 빠른 알고리즘으로 적용할 수 있을 것이다.

제안된 알고리즘은  $n$ 이 큰 경우에도  $k$ 를 구할 수 있는지는 증명되지 않았다. 이 경우는 실제 지도에 4가지 색을 칠할 수 있는지에 대한 4색 정리 (Four Color Theorem) 문제에 대해 추후 연구할 계획이다.

#### 참고문헌

- [1] Wikipedia, "Graph Coloring," [http://en.wikipedia.org/wiki/Graph\\_Coloring](http://en.wikipedia.org/wiki/Graph_Coloring), Wikimedia Foundation Inc., 2008.
- [2] Wikipedia, "NP-Complete," <http://en.wikipedia.org/wiki/NP-Complete>, Wikimedia Foundation Inc., 2008.
- [3] Wikipedia, "Four Color Theorem," [http://en.wikipedia.org/wiki/Four\\_Color\\_Theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Four_Color_Theorem), Wikimedia Foundation Inc., 2008.
- [4] J. M. Byskov, "Chromatic Number in Time  $O(2.4023^n)$  Using Maximal Independent Sets," BRICS RS-02-45, 2002.
- [5] Wikipedia, "Independent Set Problem," [http://en.wikipedia.org/wiki/Independent\\_Set\\_Problem](http://en.wikipedia.org/wiki/Independent_Set_Problem), Wikimedia Foundation Inc., 2008.
- [6] Wikipedia, "Degree (Graph Theory)," [http://en.wikipedia.org/wiki/Degree\\_\(graph\\_theory\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Degree_(graph_theory)), Wikimedia Foundation Inc., 2008.
- [7] R. V. Stee, "Approximations-und Online-Algorithme n: Vertex Cover und Scheduling Unrelated Machines," <http://algo2.iti.uni-karlsruhe.de/~vanstee/courses/>, 2007.
- [8] M. A. A. Zito, "COMP309: Efficient Sequential Algorithms- Vertex Cover," University of Liverpool, <http://www.csc.liv.ac.uk/~michele/TEACHING/COMP309/2005/Lec10.4.4.pdf>, 2005.
- [9] Y. W. Chang, "Algorithms: Greedy Algorithms," <http://cc.ee.ntu.edu.tw/~ywchang/Courses/Alg/unit1.pdf>, 2007.
- [10] A. Dharwadker, "The Vertex Coloring Algorithm," [http://www.geocities.com/dharwadker/vertex\\_coloring/](http://www.geocities.com/dharwadker/vertex_coloring/), 2006.
- [11] E. W. Weisstein, "Maximal Independent Vertex Set," <http://mathworld.wolfram.com/MaximalIndependentVertexSet.html>, Wolfram Research Inc., Mathworld, 2008.
- [12] F. Hermann and A. Hertz, "Finding The Chromatic Number By Means Of Critical Graphs," ACM Journal of Experimental Algorithms, pp. 1-9, 2002.
- [13] R. Naserasr and C. Tardif, "The Chromatic Covering Number of a Graph," <http://www.math.uwaterloo.ca/~naserasr/pdfs/cen4.pdf>, 2005.
- [14] Wikipedia, "Hadwiger Conjecture (Graph Theory)," [http://en.wikipedia.org/wiki/Hadwiger\\_Conjecture\\_\(graph\\_theory\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Hadwiger_Conjecture_(graph_theory)), Wikimedia Foundation Inc., 2008.
- [15] R. Thomas, "An Update on the Four-Color Theorem," Notices of the American Mathematical Society, Vol. 45, No. 7, 1998.
- [16] Wikipedia, "Hadwiger-Nelson Problem," [http://en.wikipedia.org/wiki/Hadwiger-Nelson\\_Problem](http://en.wikipedia.org/wiki/Hadwiger-Nelson_Problem), Wikimedia Foundation Inc. 2008.

저 자 소 개



이 상 운

1983년~1987년: 한국항공대학교  
항공전자공학과 (학사)  
1995년 ~ 1997년: 경상대학교  
컴퓨터과학과 (석사)  
1998년 ~ 2001년 : 경상대학교  
컴퓨터과학과 (박사)  
2003년 : 강원도립대학 컴퓨터응용과  
전임강사  
2004년 ~ 2007.2 : 국립 원주대학  
여성교양과 조교수  
2007.3 ~ 현재 : 강릉원주대학교  
과학기술대학 멀티미디어공학과 부교수  
관심분야 : 소프트웨어 프로젝트 관  
리, 소프트웨어 개발 방법론, 소프트웨  
어 척도 (소프트웨어 규모, 개발노력, 개  
발기간, 팀 규모), 분석과 설계 방법론,  
소프트웨어 시험 및 품질보증, 소프트웨  
어 신뢰성, 신경망, 뉴로-퍼지, 그래프  
알고리즘

e-mail : [sulee@gwnu.ac.kr](mailto:sulee@gwnu.ac.kr)



최 명 복

1992년 : 호서대학교 전자계산학과(학사)  
1994년 : 아주대학교 컴퓨터공학과(석사)  
2001년 : 아주대학교 컴퓨터공학과(박사)  
1997~현재 : 강릉원주대학교 멀티  
미디어공학과(교수)  
2004. 1~현재 : 한국인터넷방송  
통신학회 이사  
관심분야 : 지능형 정보검색, 퍼지응용,  
지식표현, 신경망, 지능형  
교통제어, 소프트웨어 공학,  
알고리즘

e-mail : [cmb5859@gmail.com](mailto:cmb5859@gmail.com),  
[cmb1@gwnu.ac.kr](mailto:cmb1@gwnu.ac.kr)

