Journal of The Korea Society of Computer and Information
Vol. 18, No. 4, April 2013
www.ksci.re.kr
http://dx.doi.org/10.9708/jksci.2013.18.4.123

제곱-나눗셈 모듈러 지수연산법

이 상 운*

Square-and-Divide Modular Exponentiation

Sang-Un, Lee *

요 약

암호학의 암호 생성과 해독, 소수판별법의 성능은 대부분 $a^b(\mathrm{mod}\, m)$의 모듈러 지수연산의 효율적 구현여부로 결정된다. 모듈러 지수연산법에는 제곱-곱셈 방식의 표준 이진법이 최선의 선택으로 알려져 있다. 그러나 큰 자리수의 b에 대해서는 사전처리를 하는 $n-ary, (n \geq 2)$이 보다 효율적으로 적용된다. 본 논문에서는 모듈러 지수 나눗셈 방법을 적용한 제곱-나눗셈법과 사전처리 없는 $n-ary$ 제곱-나눗셈법을 제안하였다. 제곱-나눗셈법은 b가 2^k+2^{k-1}에 근접한 값 또는 2^{k+1}에 근접한 경우 수행횟수 측면에서 가장 효율적임을 알 수 있었다. 나머지 값들에 대해서는 사전처리 없는 $n-ary$ 제곱-나눗셈법을 적용하는 것이 사전처리를 하는 일반적인 $n-ary$법에 비해 수행횟수 측면에서 효율적임을 보였다.

▸ Keywords : 모듈러 지수연산 법, 이진법, $n-$항법, 제곱-곱셈법, 제곱-나눗셈법

Abstract

The performance and practicality of cryptosystem for encryption, decryption, and primality test are primarily determined by the implementation efficiency of the modular exponentiation of $a^b(\mathrm{mod}\, m)$. To compute $a^b(\mathrm{mod}\, m)$, the standard binary squaring (square-and-multiply) still seems to be the best choice. However, in large b bits, the preprocessed $n-ary, (n \geq 2)$ method could be more efficient than binary squaring method. This paper proposes a square-and-divide and unpreprocessed $n-ary$ square-and-divide modular exponentiation method. Results confirmed that the square-and-divide method is the most efficient of trial number in a case where the value of b is adjacent to 2^k+2^{k-1} or to 2^{k+1}. It was also proved that for b out of the beforementioned range, the unpreprocessed $n-ary$ square-and-divide method yields higher efficiency of trial number than the general preprocessed $n-ary$ method.

•제1저자 : 이상운
•투고일 : 2013. 2. 5, 심사일 : 2013. 3. 18, 게재확정일 : 2013. 3. 25.
* 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 (Dept. of Multimedia Eng., Gangneung-Wonju National University)

▸ Keywords : modular exponentiation, binary method, $n-ary$ method, square-and-multiply, square-and-divide

I. 서 론

a^b 연산을 지수연산 (exponentiation)이라 하며, $a^b \pmod m$은 a^b의 값을 m으로 나눈 나머지를 구하는 것으로 모듈러 지수연산 (modular exponentiation)이라 한다. 모듈러 지수연산은 암호학 (cryptography) 분야의 암호 생성과 해독과 더불어 소수판별법 (primality test)에도 널리 사용되고 있다[1,2].

대표적인 모듈러 지수 연산법에는 $a^b \pmod m$의 $b = b_k b_{k-1} b_{k-2} \cdots b_1 b_{0_{(2)}}$에 대해 LSB (least significant bit)에서 MSB (most significant bit)로 n비트씩 분할 (n-진법으로 변환)한 $n_l n_{l-1} \cdots n_1 n_0$, $(l = \lceil k/n \rceil)$에 대해 n_l은 l비트의 값을 초기치 a^l로 설정하고, n_{l-1}부터 n_0까지 각 비트에 대해 d회 제곱과 각 비트 값에 대해 지수항 덧셈 (곱셈)을 수행하는 n항 법 ($n-ary$ method)이 있다. $n-ary$법은 각 비트 값이 가질 수 있는 가능한 경우수인 2^n개 중에서 0,1을 제외한 2^n-2개를 사전에 계산하여 저장한 후 비트 값을 곱할 때 사용한다[3,4]. 지수연산은 $(a^b)^c = a^{b \times c}, a^b \times a^c = a^{b+c}$로 계산된다. 이진법 (binary method)는 $1-ary$로 제곱-곱셈 (square-and-multiply) 방식이다. $2-ary$는 각 비트에 대해 $(a^2)^2 = a^{2 \times 2} = a^4$의 2회 제곱과 비트 값에 대한 곱셈을 수행한다. 따라서 $n-ary$법은 n회 제곱 (n승)을 수행하고 비트 값을 곱셈하는 방식이라 할 수 있다. 이외에도 추가 사슬 (addition chain)법[4]과 몽고메리 (Montgomery) 감소법[5] 등이 있다.

$n-ary$의 곱셈횟수는 $b = b_k b_{k-1} b_{k-2} \cdots b_1 b_{0_{(2)}}$에 대해 사전처리 (preprocessing) 곱셈 수행횟수 2^n-2와 $\lceil k/n \rceil - 1$개의 n-진법 비트 값에 대한 곱셈횟수로 결정된다.

일반적으로 암호와 복호에 사용되는 큰 자리수에 대해서는 $n-ary, (n>1)$법이 이진법보다 효율적인 것으로 알려져 있다[3,6-10].

본 논문은 $n-ary$의 제곱 횟수 k를 감소시키는 방법을 제안한다. 적용된 방법은 $k+1$ 또는 k회의 제곱을 수행하고, 곱셈 또는 나눗셈을 수행하는 방법으로 일반적으로 "제곱-나눗셈 법"이라 칭한다.

2장에서는 $n-ary$법을 고찰한다. 3장에서는 지수 나눗셈 방법을 제안하고 제곱-나눗셈법과 사전처리 없는 $n-ary$법에 곱셈 또는 나눗셈을 하는 방법을 접목시킨 알고리즘을 제안하고 적합성을 검증한다.

II. $n-ary$ 모듈러 지수연산법

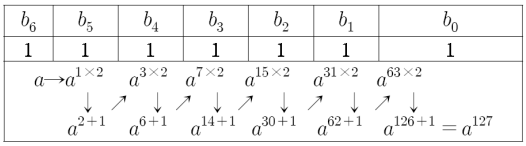
본 장에서는 적용이 복잡한 추가 사슬법[4]과 몽고메리 감소법은 제외하고, 일반적으로 적용되고 있는 $n-ary$법과 제안될 제곱-나눗셈법의 성능을 비교하기 위해 $n-ary$법에 대해 사례를 통해 수행횟수를 고찰해 본다.

모듈러 지수연산에 일반적으로 적용되고 있는 $n-ary$법은 그림 1과 같이 수행된다[4]. 여기서는 일반적으로 알려진 $n-ary$법을 간략히 표현하였다. 일반적으로 알려진 방법은 초기치를 $a_1 = 1$, $c = 1$로 하여 그림 1보다 수행횟수가 1회 추가된다.

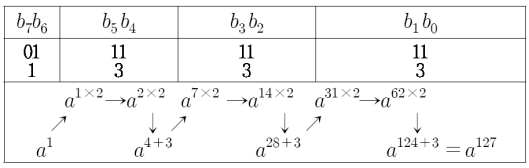
```
a^b (mod m), b = b_k b_{k-1} ··· b_1 b_{0_(2)}
Preprocessing (사전 처리)
    a_1 = a
    if    n ≥ 3 then /* 1-ary와 2-ary는 수행 않음 */
          for   i = 2 to (2^n - 1) do
                a_i = (a_{i-1} × a) mod m
          end
    end
Modular-Exponentiation (a, b, m)
    c = a_i  /*b_k값에 해당하는 a_i 값. 만약, b_k = 1이면 a */
    for   i = k-1 down to 0 do
          for   j = 1 to d do
                c = (c×c) mod m
          end
          c = (c×a_i) mod m  /* b_i값에 해당하는 a_i 값 */
    end
    return c
```

그림 1. 일반적인 $n-ary$ $(n \geq 1)$ 지수연산법
Fig. 1. General $n-ary$ $(n \geq 1)$ Modular Exponentiation

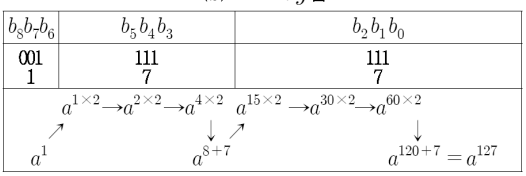
$b=127=1111111_{(2)}$인 경우, $n-ary$를 적용하는 방법은 그림 2에 제시하였다. 이진법은 $b_6=1$에서 초기치로 a를 설정하고 $b_5=1$에서 $a^1\rightarrow(a^1)^2$의 제곱과 비트 값 1 $(1=a^1)$에 대해 $(a^2)(a^1)=a^3$으로 a^3이 된다. 이를 $b_4=1$, $b_3=1,\cdots$, $b_0=1$에 계속 적용하면 총 곱셈횟수는 12회를 수행한다. $2-ary$법은 $b=127=01\ 11\ 11\ 11_{(2)}=1333_{(4)}$에 대해 사전에 $10=a\rightarrow a^2, 11=(a^2)a^1=a^3$의 2회 곱셈으로 값을 저장한다. 다음으로 $b_7b_6=01$ 비트 값에 대해 $(a)^1=a$로 곱셈을 수행하지 않고 초기치로 설정되며, $b_5b_4=11=3$에 대해 $(a)^2\rightarrow(a^2)^2=a^4$의 2회 제곱과 비트 값 $11=3$에 대해 $a^4\times a^3=a^{4+3}=a^7$의 1회 곱셈을 수행한다. 마찬가지로 $b_3b_2=11$와 $b_1b_0=11$에 대해서도 각각 3회의 곱셈을 수행하므로 총 곱셈 수행횟수는 2+3+3+3=11회이다. $3-ary$를 적용하면 $127=001\ 111\ 111=177_{(8)}$에 대해 $2^k-2=6$회의 곱셈으로 $a^2,a^3,\cdots,a^7$을 사전에 계산하며, $b_8b_7b_6=001=a$, $b_5b_4b_3=111$에 대해 $(a)^2\rightarrow(a^2)^2\rightarrow(a^4)^2$의 3회 제곱과 $111=7$에 대해 $a^8\times a^7=a^{8+7}=a^{15}$의 1회 곱셈을 수행한다. 이런 과정을 거치면 총 곱셈 수행횟수는 6+0+4+4=14회를 수행한다. 결국, $b=127$인 경우 $d-ary$중에서 $2-ary$의 11회가 가장 좋은 결과를 얻음을 알 수 있다.



(a) 이진법



(b) $2-ary$법



(c) $3-ary$법

그림 2. a^{127} 계산 $n-ary$법
Fig. 2. $n-ary$ Method for a^{127} Computation

$n-ary$는 2^n-2회의 사전처리, $(\frac{k}{n}-1)\cdot n=k-n$회 제곱과 $(\frac{k}{n}-1)\cdot(\frac{2^n-1}{2^n})$회 곱셈을 수행한다. $(\frac{2^n-1}{2^n})$은 2^n개의 가능한 비트 값 중에서 0을 제외한 2^n-1개에 대해서만 곱셈이 수행됨을 의미한다. 이 공식을 적용하면 이론적으로는 이진 자리수 $l(k)$에 대해 최적인 n를 결정할 수 있다. $2\le k\le 2048$에 대해 계산한 결과 최적의 $l(k)$ 범위는 표 1과 같이 얻었다. 따라서 $n-ary$를 적용할 경우 b의 2진 자리수 $l(k)$에 따라 표 1을 적용하면 곱셈 수행횟수를 감소시킬 수 있다. 그러나 실제로는 $b_i=1$의 개수에 영향을 받는다.

표 1. $l(k)$ 범위에 대해 최적인 $n-ary$
Table 1. Optimal $n-ary$ for Ranges

$l(k)$	$n-ary$
[2, 6]	$1-ary$
[7, 34]	$2-ary$
[35,121]	$3-ary$
[122,368]	$4-ary$
[369,1043]	$5-ary$
[1044,2048]	$6-ary$

III. 제곱-나눗셈 모듈러 지수연산법

지수 나눗셈은 $a^{b-c}=\frac{a^b}{a^c}$으로 계산된다. 그러나 모듈러 지수 나눗셈 $a^{(b-c)}(\mathrm{mod}\,m)=\frac{a^b(\mathrm{mod}\,m)}{a^c(\mathrm{mod}\,m)}$을 계산하는 방법은 제안되지 않고 있다. 만약, 모듈러 나눗셈 지수연산법을 적용할 수 있다면 $n-ary$법의 곱셈 수행횟수를 크게 감소시킬 수도 있을 것이다. 따라서 본 절에서는 모듈러 나눗셈 지수연산법을 제안하여 제곱-나눗셈으로 지수연산을 수행하는 방법을 제안한다. 모듈러 나눗셈은 그림 3의 방법을 적용한다. 왜냐하면 모듈러 나눗셈은 n이 일반적으로 십진수가 아니기 때문에 직접 나눗셈을 할 수 없으며, n의 임의의 배수를 더한 값을 나누어 정수가 되어야 되기 때문이다.

while $j=1$ to $e=$정수

$$e=\frac{a^{2^{k+1}}(\mathrm{mod}\,m)+(m\times j)}{a^{2^{k+1}-b}(\mathrm{mod}\,m)},\ e=\text{정수}$$

$j=j+1$

end

그림 3. 모듈러 나눗셈 방법
Fig. 3. Modular Division Method

그림 3의 모듈러 나눗셈 방법을 채택한 제곱-나눗셈 지수 연산법은 그림 4에 제시하였다. 그림 4는 $2^k < b < 2^{k+1}$에서 $2^k + 2^{k-1} < b$에 존재하는 경우 2^{k+1}을 기준으로 비트 값을 지수 뺄셈한 경우이며, $2^k < b < 2^k + 2^{k-1}$에 대해서는 2^k를 기준으로 곱셈 또는 나눗셈을 수행하는 방법을 적용하면 된다.

$a^b \pmod n, b = (b_k, b_{k-1}, \cdots, b_1, b_0)_2$
Modular-Exponentiation (a, b, m)
  $c = a$
  for $i = 1$ to $k+1$ do
    $c = (c \times c) \pmod m$
  end
  while $j = 1$ to e = 정수 do
    $e = \dfrac{a^{2^{b_{k+1}}} \pmod m + (m \times j)}{a^{2^{b_{k+1}} - b} \pmod m}$
    $j = j + 1$
  end
  return e

그림 4. 제곱-나눗셈법
Fig. 4. Square and Divide Method

〔7,1023〕의 $b = 2^{k+1} - 1$에 대해 곱셈 횟수를 계산한 결과는 표 2에 제시되어 있다. $b = 127 = 1111111_{(2)}$의 경우, 이진법은 12회, $2-ary$는 11회, $3-ary$는 14회의 곱셈을 수행한다. 반면에, 제곱-나눗셈법을 적용하면 $a^{127} = a^{128-1}$로 $a, a^2 \rightarrow a^4 \rightarrow a^8 \rightarrow a^{16} \rightarrow a^{32} \rightarrow a^{64} \rightarrow a^{128}$의 7회 제곱과 $a^{128} \rightarrow a^{127}$의 1회 나눗셈으로 8회로 단축시킬 수 있다. $a^{127} \pmod m = a^{128-1} \pmod m = \dfrac{a^{128} \pmod m}{a^1 \pmod m}$ 으로 계산된다.

표 2. $b = 2^k - 1$값에 따른 알고리즘의 곱셈 수행횟수 비교
Table 2. Compare of the Multiply Number of Algorithms in accordance with $b = 2^k - 1$

b		수행횟수			
		이진법	$2-ary$	$3-ary$	제곱-나눗셈법
7	111	**2* 2= 4**	2+3*1= 5	-	**3+1= 4**
15	1111	2* 3= 6	**2+3*1= 5**	6+4*1=10	**4+1= 5**
31	11111	**2* 4= 8**	**2+3*2= 8**	6+4*1=10	**5+1= 6**
63	111111	2* 5=10	**2+3*2= 8**	6+4*1=10	**6+1= 7**
127	**1111111**	2* 6=12	**2+3*3=11**	6+4*2=14	**7+1= 8**
255	11111111	2* 7=14	**2+3*3=11**	6+4*2=14	**8+1= 9**
511	111111111	2* 8=16	**2+3*4=14**	**6+4*2=14**	**9+1=10**
1023	1111111111	2* 9=18	**2+3*4=14**	6+4*3=18	**10+1=11**

$4^b \pmod{497}$에 대해 표 2의 b값인 $a^{2^k-1} \pmod m$을 계산한 결과는 표 3에 제시되어 있다.

또한, $32 \le b \le 64$의 범위에 대해 곱셈 수행횟수를 비교한 결과는 표 4에 제시되어 있다. 표에서 제곱-나눗셈법은 b가 2^{k+1}에 근접한 값 또는 $b < 2^k + 2^{k-1}$에 근접한 경우 사전처리를 하는 일반적인 $d-ary$법에 비해 곱셈 횟수를 감소시킬 수 있음을 보여주고 있다.

표 3. $a^{2^k-1} \pmod n$ 계산 결과
Table 3. The Result of $a^{2^k-1} \pmod n$

b	4^{2^k}와 $4^{2^k-1} \pmod m$	방법	j
7	$\dfrac{4^7 \pmod{497} = 480}{4^8 \pmod{497} = 429}$	$(429 + 497 \times 3)/4 = 480$	3
15	$\dfrac{4^{15} \pmod{497} = 162}{4^{16} \pmod{497} = 151}$	$(151 + 497 \times 1)/4 = 162$	1
31	$\dfrac{4^{31} \pmod{497} = 109}{4^{32} \pmod{497} = 436}$	$(436 + 497 \times 1)/4 = 109$	1
63	$\dfrac{4^{63} \pmod{497} = 309}{4^{64} \pmod{497} = 242}$	$(242 + 497 \times 2)/4 = 309$	2
127	$\dfrac{4^{127} \pmod{497} = 228}{4^{128} \pmod{497} = 415}$	$(415 + 497 \times 1)/4 = 228$	1
255	$\dfrac{4^{255} \pmod{497} = 190}{4^{256} \pmod{497} = 263}$	$(263 + 497 \times 1)/4 = 190$	1
511	$\dfrac{4^{511} \pmod{497} = 270}{4^{512} \pmod{497} = 86}$	$(86 + 497 \times 2)/4 = 270$	2
1023	$\dfrac{4^{1023} \pmod{497} = 358}{4^{1024} \pmod{497} = 438}$	$(438 + 497 \times 2)/4 = 358$	2

표 4. $32 \le b \le 64$ 곱셈 수행횟수
Table 4. Trial Number of Multiply for $32 \le b \le 64$

b	2진수	수행횟수	
		이진법 (제곱-곱셈법)	곱셈-나눗셈법
32	100000	$a \rightarrow a^2 \rightarrow a^4 \rightarrow a^8 \rightarrow a^{16} \rightarrow a^{32}$ (5회)	
33	100001	**32+1 (6회)**	
34	100010	**32+2 (6회)**	
35	100011	**32+2+1 (7회)**	
36	100100	**32+4 (6회)**	
37	100101	**32+4+1 (7회)**	
38	100110	**32+4+2 (7회)**	
39	100111	**32+4+2+1 (8회)**	**32+8-1 (7회)**
40	101000	**32+8 (6회)**	
41	101001	**32+8+1 (7회)**	
42	101010	**32+8+2 (7회)**	
43	101011	**32+8+2+1 (8회)**	
44	101100	**32+8+4 (7회)**	
45	101101	**32+8+4+1 (8회)**	
46	101110	32+8+4+2 (8회)	**32+16-2 (7회)**
47	101111	32+8+4+2+1 (9회)	**32+16-1 (7회)**

48	110000	32+16 (6회)	
49	110001	32+16+1 (7회)	
50	110010	32+16+2 (7회)	
51	110011	32+16+2+1 (8회)	
52	110100	32+16+4 (7회)	
53	110101	32+16+4+1 (8회)	
54	110110	32+16+4+2 (8회)	64-(8+2) (8회)
55	110111	32+16+4+2+1 (9회)	64-(8+1) (8회)
56	111000	32+16+8 (7회)	64-8 (7회)
57	111001	32+16+8+1 (8회)	64-(8-1) (8회)
58	111010	32+16+8+2 (8회)	64-(4+2) (8회)
59	111011	32+16+8+2+1 (9회)	64-(4+1) (8회)
60	111100	32+16+8+4 (8회)	64-4 (7회)
61	111101	32+16+8+4+1 (9회)	64-(2+1) (8회)
62	111110	32+16+8+4+2 (9회)	64-2 (7회)
63	111111	32+16+8+4+2+1 (10회)	64-1 (7회)
64	1000000	$a\rightarrow a^2\rightarrow a^4\rightarrow a^8\rightarrow a^{16}\rightarrow a^{32}\rightarrow a^{64}$ (6회)	

기존의 $n-ary, (n \geq 3)$은 2^n-2개의 비트 값을 사전에 구하는 방식이다. 반면에 사전처리를 하지 않고 알고리즘 수행 과정에서 얻어진 값들을 기준으로 $n-ary$에 곱셈 또는 나눗셈을 적용하는 방법을 고찰해 보자.

사전처리 없는 $3-ary$와 $4-ary$에 곱셈 또는 나눗셈 방법을 접목시켜 $32 \leq b \leq 64$의 수행횟수를 구한 결과는 표 5에 제시되어 있다. 사전처리 없는 $3-ary$와 $4-ary$는 51과 54에서는 제곱-나눗셈법보다 좋은 결과를 나타냈으며, 62와 63은 제곱-나눗셈법이 가장 좋은 결과를 나타내었다. 따라서 대체적으로 2^{k+1}에 근접한 값에 대해서는 제곱-나눗셈법을, 나머지 값들에 대해서는 사전처리 없는 $n-ary$법에 제곱-나눗셈법을 접목시킨 방법을 적용하는 것이 효율적임을 알 수 있다.

만약, $b=761=1011111001_{(2)}$인 경우, 이진법은 0+9+6=15회, $2-ary$는 2+3*4=14회, $3-ary$는 6+4*3=18회의 곱셈을 수행한다. $2-ary$로 $10-11-11-10-01$로 분할하고, 사전처리 없는 $4-ary$로 $10-1111-1001$에 대해 제곱-나눗셈을 처리한다고 가정하면 $a^2, a^4\rightarrow a^8\rightarrow a^{16}\rightarrow a^{32}\rightarrow(15=16-1)\rightarrow a^{47}\rightarrow a^{94}\rightarrow a^{188}\rightarrow a^{376}\rightarrow a^{752}\rightarrow(9=8+1)\rightarrow a^{761}$로 13회로 줄일 수 있다.

만약, $b=3243679=11000101111110100111111_{(2)}$인 경우, 이진법은 35회, $2-ary$는 31회, $3-ary$는 34회의 곱셈을 수행한다. $3-ary$로 $1-100-010-111-111010-011-111$로 분할하고, 사전처리 없는 $6-ary$로 좌에서 우로 처리한다면 $1-100010-111111-010011-111$은 $a^2\rightarrow a^4\rightarrow a^8\rightarrow a^{16}\rightarrow a^{32}\rightarrow a^{64}\rightarrow(34=32+2)\rightarrow a^{98}\rightarrow a^{196}\rightarrow a^{392}\rightarrow a^{784}\rightarrow a^{1586}\rightarrow a^{3136}\rightarrow a^{6272}\rightarrow(63=64-1)\rightarrow a^{6335}\rightarrow a^{12670}\rightarrow a^{25340}\rightarrow a^{50680}\rightarrow a^{101360}\rightarrow a^{202720}\rightarrow a^{405440}\rightarrow(19=16+2+1)\rightarrow a^{405459}\rightarrow a^{810918}\rightarrow a^{1621836}\rightarrow a^{3243672}\rightarrow(7=8-1)\rightarrow a^{3243679}$로 30회로 줄일 수 있다. 여기에는 비트 값을 처리할 때 곱셈 또는 나눗셈을 적용하였다.

표 5. $32 \leq b \leq 64$의 사전처리 없는 $n-ary$ 수행횟수
Table 5. $n-ary$ Trial Number for $32 \leq b \leq 64$ without Preprocessing

b	2진수	수행횟수 $(3-ary/4-ary)$
32	100-000	$2\rightarrow 4,8\rightarrow 16\rightarrow 32$ (5회)
	10-0000	$2,4\rightarrow 8\rightarrow 16\rightarrow 32$ (5회)
33	100-001	$2\rightarrow 4,8\rightarrow 16\rightarrow 32\rightarrow 33(+1)$ (6회)
	10-0001	$2,4\rightarrow 8\rightarrow 16\rightarrow 32\rightarrow 33(+1)$ (6회)
34	100-010	$2\rightarrow 4,8\rightarrow 16\rightarrow 32\rightarrow 34(+2)$ (6회)
	10-0010	$2,4\rightarrow 8\rightarrow 16\rightarrow 32\rightarrow 34(+2)$ (6회)
35	100-011	$2\rightarrow 4,8\rightarrow 16\rightarrow 32\rightarrow(3=2+1)\rightarrow 35$ (7회)
	10-0011	$2,4\rightarrow 8\rightarrow 16\rightarrow 32\rightarrow(3=2+1)\rightarrow 35$ (7회)
36	100-100	$2\rightarrow 4,8\rightarrow 16\rightarrow 32\rightarrow 36(+4)$ (6회)
	10-0100	$2,4\rightarrow 8\rightarrow 16\rightarrow 32\rightarrow 36(+4)$ (6회)
37	100-101	$2\rightarrow 4,8\rightarrow 16\rightarrow 32\rightarrow(5=4+1)\rightarrow 37$ (7회)
	10-0101	$2,4\rightarrow 8\rightarrow 16\rightarrow 32\rightarrow(5=4+1)\rightarrow 37$ (7회)
38	100-110	$2\rightarrow 4,8\rightarrow 16\rightarrow 32\rightarrow(6=4+2)\rightarrow 38$ (7회)
	10-0110	$2,4\rightarrow 8\rightarrow 16\rightarrow 32\rightarrow(6=4+2)\rightarrow 38$ (7회)
39	100-111	$2\rightarrow 4,8\rightarrow 16\rightarrow 32\rightarrow(7=8-1)\rightarrow 39$ (7회)
	10-0111	$2,4\rightarrow 8\rightarrow 16\rightarrow 32\rightarrow(7=8-1)\rightarrow 39$ (7회)
40	101-000	$2\rightarrow 4\rightarrow 5,10\rightarrow 20\rightarrow 40$ (6회)
	10-1000	$2,4\rightarrow 8\rightarrow 16\rightarrow 32\rightarrow 40(+8)$ (6회)
41	101-001	$2\rightarrow 4\rightarrow 5,10\rightarrow 20\rightarrow 40\rightarrow 41(+1)$ (7회)
	10-1001	$2,4\rightarrow 8\rightarrow 16\rightarrow 32\rightarrow(9=8+1)\rightarrow 41$ (7회)
42	101-010	$2\rightarrow 4\rightarrow 5,10\rightarrow 20\rightarrow 40\rightarrow 42(+2)$ (7회)
	10-1010	$2,4\rightarrow 8\rightarrow 16\rightarrow 32\rightarrow(10=8+2)\rightarrow 42$ (7회)
43	101-011	$2\rightarrow 4\rightarrow 5,10\rightarrow 20\rightarrow 40\rightarrow(3=2+1)\rightarrow 43$ (8회)
	10-1011	$2,4\rightarrow 8\rightarrow 16\rightarrow 32\rightarrow(3=2+1)\rightarrow(11=8+3)\rightarrow 43$ (8회)
44	101-100	$2\rightarrow 4\rightarrow 5,10\rightarrow 20\rightarrow 40\rightarrow 44(+4)$ (7회)
	10-1100	$2,4\rightarrow 8\rightarrow 16\rightarrow 32\rightarrow(12=8+4)\rightarrow 44$ (7회)
45	101-101	$2\rightarrow 4\rightarrow 5,10\rightarrow 20\rightarrow 40\rightarrow(5=4+1)\rightarrow 45$ (8회)
	10-1101	$2,4\rightarrow 8\rightarrow 16\rightarrow 32\rightarrow(5=4+1)\rightarrow(13=8+5)\rightarrow 45$ (8회)
46	101-110	$2\rightarrow 4\rightarrow 5,10\rightarrow 20\rightarrow 40\rightarrow(6=4+2)\rightarrow 46$ (8회)
	10-1110	$2,4\rightarrow 8\rightarrow 16\rightarrow 32\rightarrow(14=16-2)\rightarrow 46$ (7회)
47	101-111	$2\rightarrow 4\rightarrow 5,10\rightarrow 20\rightarrow 40\rightarrow(7=5+2)\rightarrow 47$ (8회)
	10-1111	$2,4\rightarrow 8\rightarrow 16\rightarrow 32\rightarrow(15=16-1)\rightarrow 47$ (7회)
48	110-000	$2\rightarrow 3\rightarrow 6,12\rightarrow 24\rightarrow 48$ (6회)
	11-0000	$2\rightarrow 3,6\rightarrow 12\rightarrow 24\rightarrow 48$ (6회)
49	110-001	$2\rightarrow 3\rightarrow 6,12\rightarrow 24\rightarrow 48\rightarrow 49(+1)$ (7회)
	11-0001	$2\rightarrow 3,6\rightarrow 12\rightarrow 24\rightarrow 48\rightarrow 49(+1)$ (7회)
50	110-010	$2\rightarrow 3\rightarrow 6,12\rightarrow 24\rightarrow 48\rightarrow 50(+2)$ (7회)
	11-0010	$2\rightarrow 3,6\rightarrow 12\rightarrow 24\rightarrow 48\rightarrow 50(+2)$ (7회)
51	110-011	$2\rightarrow 3\rightarrow 6,12\rightarrow 24\rightarrow 48\rightarrow 51(+3)$ (7회)
	11-0011	$2\rightarrow 3,6\rightarrow 12\rightarrow 24\rightarrow 48\rightarrow 51(+3)$ (7회)
52	110-100	$2\rightarrow 3\rightarrow 6,12\rightarrow 24\rightarrow 48\rightarrow(4=3+1)\rightarrow 52$ (8회) $2\rightarrow 4\rightarrow 6,12\rightarrow 24\rightarrow 48\rightarrow 52(+4)$ (7회)
	11-0100	$2\rightarrow 3,6\rightarrow 12\rightarrow 24\rightarrow 48\rightarrow(4=3+1)\rightarrow 52$ (8회)
53	110-101	$2\rightarrow 3\rightarrow 6,12\rightarrow 24\rightarrow 48\rightarrow(5=3+2)\rightarrow 53$ (8회)
	11-0101	$2\rightarrow 3,6\rightarrow 12\rightarrow 24\rightarrow 48\rightarrow(5=3+2)\rightarrow 53$ (8회)
54	110-110	$2\rightarrow 3\rightarrow 6\rightarrow 12\rightarrow 24\rightarrow 48\rightarrow 54(+6)$ (7회)
	11-0110	$2\rightarrow 3,6\rightarrow 12\rightarrow 24\rightarrow 48\rightarrow 54(+6)$ (7회)

55	110-111	2→3→6, 12→24→48→(7 = 6 + 1)→55 (8회)
	11-0111	2→3, 6→12→24→48→(7 = 6 + 1)→55 (8회)
56	111-000	2→3→6→7, 14→28→56 (7회)
	11-1000	2→3, 6→12→24→48→(8 = 6 + 2)→56 (8회)
57	111-001	2→3→6→7, 14→28→56→57(+1) (8회)
	11-1001	2→3, 6→12→24→48→(9 = 6 + 3)→57 (8회)
58	111-010	2→3→6→7, 14→28→56→58(+2) (8회)
	11-1010	2→3, 6→12→24→48→(10 = 12 − 2)→58 (8회)
59	111-011	2→3→6→7, 14→28→56→59(+3) (8회)
	11-1011	2→3, 6→12→24→48→(11 = 12 − 1)→59 (8회)
60	111-100	2→4→6→7, 14→28→56→60(+4) (8회)
	11-1100	2→3, 6→12→24→48→60(+12) (7회)
61	111-101	2→4→6→7, 14→28→56→(5 = 4 + 1)→61 (9회)
	11-1101	2→3, 6→12→24→48→(13 = 12 + 1)→61 (8회)
62	111-110	2→3→6→7, 14→28→56→62(+6) (8회)
	11-1110	2→3, 6→12→24→48→(14 = 12 + 2)→62 (8회)
63	111-111	2→3→6→7, 14→28→56→63(+7) (8회)
	11-1111	2→3, 6→12→24→48→(15 = 12 + 3)→63 (8회)
64	1-000-000	1, 2→4→8→16→32→64 (6회)
	100-0000	2→4, 8→16→32→64 (6회)

만약, $b = 18206927 = 1000101011101000011001111_{(2)}$인 경우, 이진법은 24+12=36회, $2-ary$는 2+12*2+8=34회, $3-ary$는 6+8*3+6=36회의 곱셈을 수행한다. 이를 사전 처리 없는 $6-ary$로 적용하되 제곱을 6회 수행하고 비트 값에 대해 곱셈하는 과정을 적용하면 1−000101−011101−000011−001111에 대해 6+6+6+6=24회의 제곱과 $000101 = 5(4+1)$의 2회 곱셈, $011101 = 29 = 16+5+8$의 3회, $000011 = 3(2+1)$의 2회, $001111 = 15(16-1)$의 2회로 총 31회로 줄일 수 있다.

실험 데이터들에 제안된 제곱-나눗셈법과 사전처리 없는 $n-ary$법을 이진법, $2-ary, 3-ary$법과 수행횟수를 비교한 결과는 표 6에 제시되어 있다. 제안된 제곱-나눗셈법과 사전처리 없는 $n-ary$법은 지수연산에 있어 가장 빠른 방법임을 알 수 있다.

표 6. 알고리즘 수행횟수 비교
Table 6. Compare of the Trial Number for Algorithms

b	이진법	$2-ary$	$3-ary$	제곱-나눗셈법	사전처리 없는 $n-ary$ 제곱-나눗셈법
7	4	5	-	4	-
15	6	5	10	5	-
31	8	8	10	6	-
63	10	8	10	7	-
127	12	11	14	8	-
255	14	11	14	9	-
511	16	14	14	10	-
761	15	14	18	-	13
1023	18	14	18	11	-
3243679	35	31	34	-	30
18206927	36	34	36	-	31

결론적으로, b가 2^{k+1}에 근접한 값인 경우 제곱-나눗셈법을 적용하는 것이 가장 효율적이며, 나머지 b에 대해서는 곱셈 또는 나눗셈법을 접목시킨 사전처리를 하지 않는 $n-ary$법이 보다 효율적임을 나타내고 있다.

IV. 결론

본 논문은 암호학의 암호 생성과 해독, 소수 판별법에 적용되는 모듈러 지수연산법을 제안하였다. 기존의 $n-ary$법은 2^n-2개의 가능한 비트 값에 대한 곱셈 사전처리 후 제곱-곱셈법 방법을 적용하였다. 반면에 제안된 방법은 사전처리를 수행하지 않는 제곱-나눗셈법을 적용하였다. 이를 위해 모듈러 나눗셈을 수행하는 방법을 제안하였다. 또한, 사전처리를 하지 않는 $n-ary$법에 대해 곱셈 또는 나눗셈을 적용한 방법도 제안하였다.

제곱-나눗셈법은 b가 2^{k+1}에 근접한 값인 경우 가장 효율적이며, 나머지 값들에 대해서는 사전처리를 하지 않는 $n-ary$법에 제곱-나눗셈을 적용하는 방법이 사전처리를 하는 일반적인 $n-ary$법에 비해 효율적임을 보였다.

참고문헌

[1] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein, "Introduction to Algorithms," 2nd Edition, McGrew-Hill Book Company, 2005.

[2] M. Alfred, P. C. Oorschot, and S. A. Vanstone, "Handbook of Applied Cryptography," CRC Press, 1996.

[3] S. T. Klein, "Should One Always Use Repeated Squaring for Modular Exponentiation?." Information Processing Letters, Vol. 106, Issue. 6, pp. 232-237, 2008.

[4] D. M. Gordon, "A Survey of Fast Exponentiation Methods," Journal of Algorithms, Vol. 27, No. 1, pp. 129-146, 1998.

[5] P. Montgomery, "Modular Multiplication Without Trial Division," Math. Computation, Vol. 44, pp. 519-521, 1985.

[6] G. Saldamli and C. K. Koc, "Spectral Modular Exponentiation," Proc. of the 18th IEEE Symposium on Computer Arithmetic, pp. 123-132, 2007.

[7] V. Gopal, J. Guilford, E. Ozturk, W. Feghali, G.

Wolrich, and M. Dixon, "Fast and Constant-Time Implementation of Modular Exponentiation," 28th International Symposium on Reliable Distributed Systems, Niagara Falls, New York, U.S.A., 2009.

[8] L. Zhong, "Modular Exponentiation Algorithm Analysis for Energy Consumption and Performance," Technical Report CE-01-ZJL, Dept. of Electrical Engineering, Princeton University, 2001.

[9] N. Nedjah and L. M. Mourelle, "Efficient Pre-Processing for Large Window-Based Modular Exponentiation Using Ant Colony," Informatica, Vol. 29, pp. 151-161, 2005.

[10] F. R. Henriquez, "Modular Exponentiation," Arithmética Computacional, http://delta.cs.cinvestav.mx/~francisco/arith/expo.pdf.

저 자 소 개

이 상 운(Sang-Un, Lee)

1983년 ~ 1987년 :
한국항공대학교 항공전자공학과 (학사)
1995년 ~ 1997년 :
경상대학교 컴퓨터과학과 (석사)
1998년 ~ 2001년 :
경상대학교 컴퓨터과학과 (박사)
2003.3 ~ 현 재 :
강릉원주대학교 멀티미디어공학과 부교수
관심분야 : 소프트웨어 프로젝트 관리,
소프트웨어 개발 방법론,
소프트웨어 신뢰성,
신경망, 뉴로-퍼지,
그래프 알고리즘
e-mail : sulee@gwnu.ac.kr