Journal of The Korea Society of Computer and Information
Vol. 18, No. 5, May 2013
www.ksci.re.kr
http://dx.doi.org/10.9708/jksci.2013.18.5.113

4-색 알고리즘

이 상 운*

The Four Color Algorithm

Sang-Un, Lee *

요 약

본 논문은 지금까지 NP-완전인 난제로 알려진 4-색 정리를 $O(n)$인 선형시간 복잡도로 수기식과 컴퓨터를 활용하여 증명하는 알고리즘을 제안하였다. 제안된 알고리즘은 그래프 $G=(V_1,E_1)$의 정점 집합 V를 최대 독립집합 $\overline{C_1}$와 최소 정점 피복 집합 C_1으로 정확히 양분하는 기법을 적용하여 $\overline{C_1}$에 첫 번째 색을 배정하고, C_1 집합의 정점들로 축소된 연결 그래프 $G=(V_2,E_2)$를 대상으로 $\overline{C_2}$와 C_2로 양분하여 $\overline{C_2}$에 두 번째 색을 지정하였다. C_2 집합의 정점들로 축소된 연결 그래프 $G=(V_3,E_3)$를 대상으로 $\overline{C_3}$와 C_3로 양분하여 $\overline{C_3}$에 세 번째 색을 지정하였다. 마지막으로 C_3를 $\overline{C_4}$로 하여 4번째 색을 배정하였다. 2개의 실제 지도 그래프와 2개의 평면 그래프를 대상으로 제안된 알고리즘을 적용한 결과 모든 그래프에서 채색수 $\chi(G)=4$를 찾는데 성공하였다. 결국, 제안된 "4-색 알고리즘"은 평면 그래프의 4-색을 결정하는 일반적인 알고리즘으로 적용할 수 있을 것이다.

▸ Keywords : 최소 정점 피복, 최대 독립 집합, 최소 차수, 채색수

Abstract

This paper proposes an algorithm that proves an NP-complete 4-color theorem by employing a linear time complexity where $O(n)$. The proposed algorithm accurately halves the vertex set V of the graph $G=(V_1,E_1)$ into the Maximum Independent Set (MIS) $\overline{C_1}$ and the Minimum Vertex Cover Set C_1. It then assigns the first color to $\overline{C_1}$ and the second to $\overline{C_2}$, which, along with C_2, is halved from the connected graph $G=(V_2,E_2)$, a reduced set of the remaining vertices. Subsequently, the third color is assigned to $\overline{C_3}$, which, along with C_3, is halved from the connected graph $G=(V_3,E_3)$, a further reduced set of the remaining vertices. Lastly, denoting C_3 as $\overline{C_4}$, the algorithm assigns the forth color to $\overline{C_4}$. The algorithm has successfully obtained the chromatic

---

•제1저자 : 이상운
•투고일 : 2013. 1. 7, 심사일 : 2013. 2. 5, 게재확정일 : 2013. 3. 26.
* 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 (Dept. of Multimedia Eng., Gangneung-Wonju National University)

number $\chi(G)=4$ with 100% probability, when applied to two actual map and two planar graphs. The proposed "four color algorithm", therefore, could be employed as a general algorithm to determine four-color for planar graphs.

▸ Keywords : Minimum Vertex Cover (MVC), Maximum Independent Set (MIS), Minimum Degree, Chromatic Number

I. 서 론

간선들이 서로 교차되지 않는 평면 그래프 (Planar Graph) $G=(V,E), u,v \in V, e=\{u,v\} \in E$에 대해, 4-색 정리 (Four Color Theorem)는 인접 정점들 간에는 다른 색을 배정하여 모든 정점들을 색칠하는데 소요되는 채색 수 (Chromatic Number, $\chi(G)$)는$\chi(G) \le 4$이다.[1-7] 이 정리는 1852년 Francis Guthric이 영국의 지도를 대상으로 4가지 색만으로 주들을 구분하여 칠할 수 있음을 발견하였고, 100년이 지난 1977년 Appel과 Harken[8]이 4-색 정리 증명에 성공하였다. 그러나 이는 수천 라인의 프로그램을 작성하여 증명하였으며, 아직까지는 이 문제를 수기식으로 증명할 수 있는 휴리스틱 알고리즘이 제안되지 않고 있다.

본 논문은 모든 지도는 4-색 으로 칠할 수 있다는 4-색 정리를 수기식으로 증명할 수 있는 휴리스틱 알고리즘을 제안한다. 본 알고리즘은 그래프 정리에서 적용되고 있는 최대 독립 집합 (Maximum Independent Set, MIS)과 최소 정점 피복 (Minimum Vertex Cover, MVC) 개념을 적용한다. 먼저, 지도에서 주 (도)를 정점으로, 서로 인접한 주 (도)간에는 간선으로 연결하면 이를 그래프로 표현할 수 있다. 평면 그래프 $G=(V,E)$에서 인접하지 않은 정점들을 선택하여 하나의 색을 배정하는 방법은 정점 집합 V를 MIS인 $\overline{C_k}, k=1,2,3,4$로 분할하는 문제와 같다. 즉 정점 집합 $V_k=\overline{C_k}+C_k$로 C_k는 MVC 집합이 된다.

2장에서는 4-색 정리에 대한 관련연구와 문제점을 고찰한다. 3장에서는 실제 지도 그래프와 일반적인 평면 그래프를 대상으로 4-색 알고리즘을 제안한다. 4장에서는 인도와 미국의 실제 지도, Gardner[9]와 Wagon[10,11]이 논쟁을 벌인 110개의 영역으로 구성된 만우절 조작 (April Fool's Hoax) 그래프와 Errena 그래프[11]를 대상으로 $\chi(G)=4$임을 제안된 알고리즘으로 증명한다.

II. 관련연구와 연구 배경

4-색 정리는 1852년 Francis Guthric이 영국의 지도를 대상으로 4가지 색만으로 주들을 구분하여 칠할 수 있음을 발견하였다. 4-색 문제를 처음 학문적으로 논의된 것은 1878년 Cayley 논문이었으며, 1878년 Kempe[12]가 처음으로 실제의 해법을 제시하여 4-색 정리를 증명하였고, Heawood[13]는 첫 번째로 정확한 해법을 제시하였다. 이후 여러 번의 증명 과 증명 오류 발견 및 반증이 제시되었다.[4] 이후 100년이 지난 1977년 Appel과 Harken[8]이 4-색 정리를 증명하였다. Appel과 Harken[8]은 수천 라인의 컴퓨터 프로그램을 작성하여 1,200 시간 동안 수행한 결과 4-색 정리를 증명하였다. 이 방법에 대해 많은 논쟁이 있었지만 결국은 수기식으로 증명할 방법이 없어 모든 수학자들이 이를 받아들였다.[4] 이후에도 Robertson[14]과 Dharwadker [15]가 수학적으로 계속 증명을 시도하였다.

비록 지도 제작자들은 이 문제에 대해 연구를 하지 않지만 4-색 문제는 150년 이상 존재하여 왔다. 수학자들은 해법을 찾으려고 많은 애를 쓰고 있지만 완전한 증명을 하지 못하고 있다. 결국, 컴퓨터의 등장으로 해법이 제시되었지만 컴퓨터 해법은 논쟁의 대상이 되고 있다. 4-색 정리에 대한 증명을 종결하기 위해서는 수기식으로 증명할 수 있는 알고리즘 제안이 필수적이라 할 수 있다. 본 연구의 목적은 4-색 정리에 대해 수기식으로 증명할 수 있는 알고리즘을 제시함으로서 4-색 정리에 대한 논쟁을 종식시키고자 한다.

4-색 알고리즘에 적용되는 그래프의 기본 개념은 다음과 같다. 그래프 G에서 각 정점 v에 부속한 (Incident) 간선 수를 차수 또는 결합가 (Degree or Valency, $\deg(v)$)라 한다. 최대 부속 간선 수를 갖는 정점 v의 차수를 최대 차수 (Maximum Degree) $\Delta(G)$ 로, 최소 부속 간선 수를 갖는 정점 v의 차수를 최소 차수 (Minimum Degree) $\delta(G)$로 표기한다.[16]

그래프 G에서 최대 독립집합 MIS를 구하는 방법은 $\delta(G)$

인 v 정점을 선택하여 MIS 집합에 포함시키고 $\delta(G)$ 정점에 인접한 u 정점들을 MVC 집합에 포함시킨다. MVC 집합에 포함된 정점들에 부속된 간선들을 모두 삭제한다. 남아 있는 정점들 (연결된 그래프)을 대상으로 정점들이 없을 때까지 반복적으로 수행하면 모든 정점들은 MIS와 MVC 집합으로 정확히 양분 (Bipartite) 할 수 있다. 그림 1의 G_1 그래프를 대상으로 이 개념을 적용하면 그림 2와 같이 $MIS=\{c,d\}$, $MVC=\{a,b,e,f\}$로 양분된다. G_1 그래프는 Brown[6]에서 인용되었다.

G_1 그래프에서 각 정점의 차수를 구하면 $\deg(c)=\deg(d)=3$, $\deg(e)=\deg(f)=4$, $\deg(a)=\deg(b)=5$이다. 결국, 첫 번째로 MIS에 포함되는 정점은 $\delta(G)$인 ⓒ 또는 ⓓ 중 하나가 된다. 여기서 ⓒ를 선택하여 MIS에 포함시키면 ⓒ 정점에 인접한 정점 ⓐ,ⓑ,ⓕ는 MVC에 포함된다. MVC에 포함된 정점 ⓐ,ⓑ,ⓕ의 부속 간선들을 모두 삭제하면 $\{d,e\}$ 간선만 남는다. $\deg(d)=\deg(e)=1$이므로 ⓓ를 MIS에, ⓔ를 MVC에 포함시키면 $MIS=\{c,d\}$, $MVC=\{a,b,e,f\}$를 최종적으로 얻는다. 결국 G_1 그래프의 MIS는 ⓒ와 ⓓ로 상호 간에는 인접하지 않음을 알 수 있다.

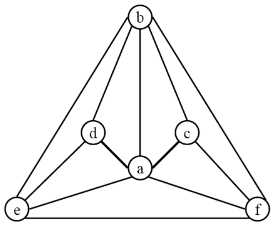


그림 1. G_1 그래프
Fig. 1. G_1 Graph

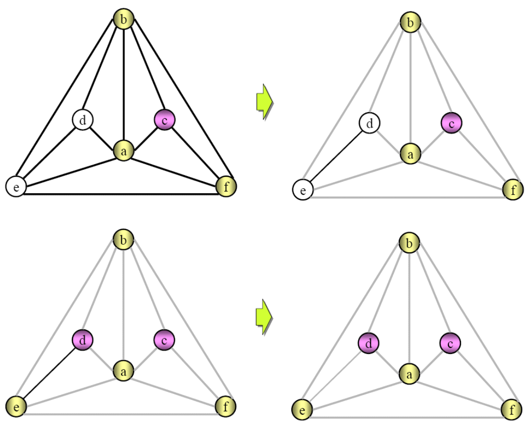


그림 2. G_1 그래프의 MIS와 MVC
Fig. 2. MIS and MVC for G_1 Graph

III. 4-색 알고리즘

평면 그래프의 채색수 $\chi(G)=4$를 찾기 위해 본 장에서는 정점 집합 V를 단계적으로 4개의 MIS $\overline{C_k}, k=1,2,3,4$로 정확히 분할하는 방법을 제안한다. 이 알고리즘은 2장에서 제시한 "MIS 집합을 얻는 방법"을 적용한다. 먼저 주어진 그래프 $G_1=(V_1,E_1)$의 정점 집합 V_1과 간선 집합 E_1에서 $\delta(G)$인 정점 v를 선택하여 MIS 집합을 얻는 과정을 반복하여 수행한다. 최종적으로 얻은 MIS 집합의 원소들에 한 가지 색을 배정한다. 이는 $\overline{C_1}$ 이 된다. $G_1=(V_1,E_1)$에서 $\overline{C_1}$ 원소 정점들의 간선을 모두 삭제하여 축소된 연결 그래프 $G_2=(V_2,E_2)$를 얻는다. $G_2=(V_2,E_2)$에 대해 "MIS 집합을 얻는 방법"을 적용하여 $\overline{C_2}$를 얻는다. $G_2=(V_2,E_2)$에서 $\overline{C_2}$ 원소 정점들의 간선을 모두 삭제하여 축소된 연결 그래프 $G_3=(V_3,E_3)$를 얻는다. $G_3=(V_3,E_3)$에 대해 "MIS 집합을 얻는 방법"을 적용하여 $\overline{C_3}$를 얻는다. $G_3=(V_3,E_3)$ 그래프에서 MVC 집합 원소들이 $\overline{C_4}$가 된다. 결국, 지도의 채색수 $\chi(G)=4$를 얻는다. 이 개념의 4-색 알고리즘은 그림 3에 제시되어 있다.

$G=(V,E)$
$k=1,2,3,4$: 채색 수 (Chromatic Number, $\chi(G)$)
$\overline{C_k}$: k^{th} 색 최대독립집합 (MIS), C_k : k^{th} 색의 최소정점피복 (MVC)
$V_1=V, E_1=E, C_k \leftarrow \{\phi\}, \overline{C_k} \leftarrow \{\phi\}$
E_1을 대상으로 V_1의 각 정점 v에 대한 $\deg(v)$ 계산.
for $k=1$ to 3
    while $E_k \neq \phi$
        E_k를 대상으로 V_k의 각 정점 v의 $\deg(v')$ 계산.
        if $\delta(G)=0$ 정점 v 존재 then $\overline{C_k} \leftarrow \overline{C_k} \cup \{v\}$.
        if $(\delta(G)\neq 0)\cap(|\delta(G)|=1)$ then $\overline{C_k} \leftarrow \overline{C_k} \cup \{v\}$
        else if $(\delta(G)\neq 0)\cap(|\delta(G)|\geq 2)$ then
            /* $\delta(G)$의 $\deg(v')$가 동일 정점 2개 이상 존재
            if $\deg(v)=$ 동일 then 임의 정점 v 선택
            else if $\deg(v)=$ 상이 then 최대 $\deg(v)$ 정점 v 선택.
            end if
            $\overline{C_k} \leftarrow \overline{C_k} \cup \{v\}$./ * MIS 정점 집합
        end if
        $C_k \leftarrow C_k \cup \{u\}$. /* MVC 정점 집합, v의 인접 정점 u.
        $E_k \leftarrow E_k \setminus \{u \in E_k\}$. /* u 부속 간선 삭제.
    Return $\overline{C_k}$
    $E_{k+1}=e \in C_k$.
    E_{k+1}을 대상으로 C_k 각 정점 v의 차수 $\deg(v)$ 계산.
Next k
$\overline{C_4}=C_3$.

그림 3. 4-색 알고리즘
Fig. 3. 4-Color Algorithm

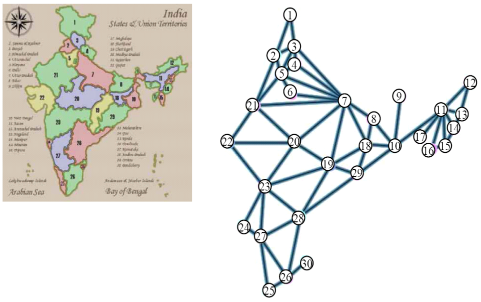
첫 번째 단계에서 주어진 정점들 $C_0=V$를 C_1과 $\overline{C_1}$로 정확히 양분하여 $\overline{C_1}$의 정점들을 동일한 색으로 설정한다. 축소된 그래프의 정점들 C_1 간선들을 대상으로 다시 C_2와 $\overline{C_2}$

로 정확히 양분하여 $\overline{C_2}$에 2번째 색을 지정한다. 다시 축소된 그래프의 정점들 C_2 간선들을 대상으로 C_3와 $\overline{C_3}$로 정확히 양분하여 $\overline{C_3}$에 3번째 색을 지정한다. C_3가 $\overline{C_4}$로 되어 4번째 색이 지정된다. 결국, 제안 알고리즘은 $O(n)$회의 수행 복잡도로 $\chi(G)=4$를 정확히 얻을 수 있다.

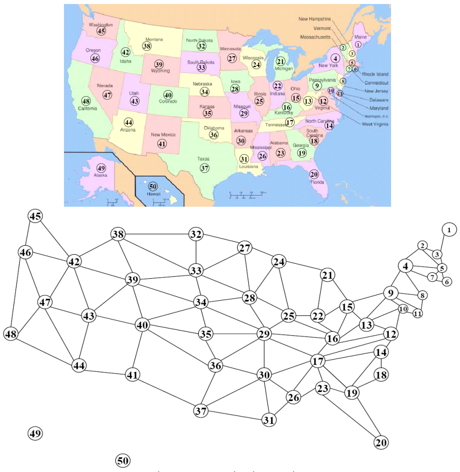
IV. 실험 및 결과 분석

본 장에서는 그림 4의 그래프를 대상으로 4-색 알고리즘의 성능을 고찰해 본다. G_2는 Dharwadker[16]에서, G_3는 Moore[4]와 Wikipedia[17]에서, G_4는 Wagon[11]에서, G_5는 Weisstein[7]와 Wagon[11]에서 인용되었다.

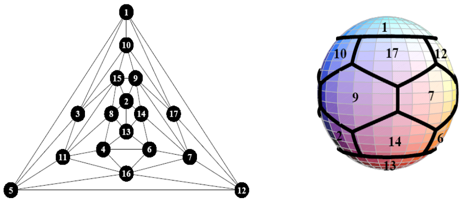
G_2, G_3, G_4 3개 그래프에 대해 4-색 알고리즘을 적용한 결과는 표 1에, G_5 그래프는 표 2에 제시되어 있다.



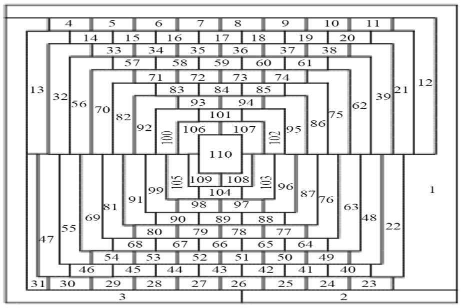
$(n=30, \chi(G)=4)$
G_2 그래프



$(n=50, \chi(G)=4)$
G_3 그래프



$(n=17, \chi(G)=4)$
G_4 그래프



$(n=110, \chi(G)=4)$
G_5 그래프

그림 4. 실험에 적용된 평면 그래프
Fig. 4. Planner Graph for Experimental Data

G_2, G_3, G_4 그래프는 정점의 차수가 거의 연속적으로 분포하고 있으나 G_5 그래프는 각 정점의 차수 $\deg(v)$는 3,4,5,6,10,14로 이상점 (Outliners)이 2개 존재한다. 따라서 이 경우 제안된 알고리즘을 약간 변형시켜 적용하였다. 즉, $\deg(1)=14$, $\deg(3)=10$으로 정점 ①과 ③을 제외시킨 그래프를 대상으로 첫 번째와 두 번째 색을 배정한다. 정점 ①과 ③은 추후 3번째 또는 4번째 색에 배정한다. 첫 번째 색 집합 $\overline{C_1}$은 그림 3의 4-색 알고리즘을 적용한다. 이 결과 31개의 정점이 $\overline{C_1}$ 집합에 배정되었다. 두 번째 색 집합 $\overline{C_2}$은 그림 3의 4-색 알고리즘을 적용하되 MVC (C_k) 집합에 존재하는 정점들과 새로 추가되는 정점들 간에 클릭 (Clique)이 존재하지 않아야 한다. 이 경우가 발생하면 5-색 칼라가 소요되기 때문이다. 이러한 경우가 발생할 경우, $\delta(G)$인 정점 v 대신 인접 정점 u들 중 하나를 교환하여 MIS에 포함시킨다. 이는 28번째 수행된 $\delta(G)=2,95(4)$의 인접 정점 $v=\{85,86\}$에서 $\{76,86\},\{86,87\},\{87,86\}$의 클릭이 존재하여 MIS에 86을 MVC에 $\{74,85,95\}$를 포함시켰다. 세 번째 색 집합 $\overline{C_3}$은 그림 3의 알고리즘을 수행하되, 동일한 $\delta(G)$ 정점들 중 MVC (C_k)에 인접한 정점이 없을 경우 다음의 $\delta(G)$ 정점들 중 C_k에 인접한 정점을 선택한다. 만약, 남아 있는 정점들 모두 C_k에 인접한 정점이 없으면 $\delta(G)$ 정점을 선택한다. 정점

①과 ③의 인접 정점들을 분석하여 보면 정점 ①은 $\overline{C_3}$와 인접하고, $\overline{C_4}$와는 인접하지 않는다. 또한, 정점 ③은 $\overline{C_3}$, $\overline{C_4}$ 모두와 인접하지 않는다. 결국, 정점 ①은 $\overline{C_4}$에, 정점 ③은 $\overline{C_3}$에 배정된다.

제안된 알고리즘은 4개 그래프 데이터 모두에서 4-색 칼라를 배정하는데 100% 성공하였다. 비록 G_2의 $\Delta(G)=9$ (⑦), G_3의 $\Delta(G)=8$ (⑰과 29), G_5의 $\Delta(G)=14$ (①)로 최대 인접 정점이 8,9 또는 14개가 존재하더라도 "모든 평면 그래프는 4-색으로 가능하다."는 4-색 정리가 성립함을 보였다.

V. 결론

본 논문은 150년 이상 증명되지 못한 4-색 정리를 수기식으로 증명할 수 있는 휴리스틱 알고리즘을 제안하였다. 제안

표 1. 지도 그래프의 4-색 알고리즘
Table 1. 4-Color Algorithm for Map Graph
(a) G_2 그래프

k	$Vertex(deg(v))$	v	u	$MIS(\overline{C_k})$	$MVC(C_k)$
1	$\delta(G)=1\rightarrow 9(1),17(1),30(1)$	$\{9\}$	$\{10\}$	$\{9\}$	$\{10\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 17(1),30(1)$	$\{17\}$	$\{11\}$	$\{9,17\}$	$\{10,11\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 12(2),16(2),30(1)$	$\{12\}$	$\{13\}$	$\{9,12,17\}$	$\{10,11,13\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 14(3),16(2),30(1)$	$\{14\}$	$\{15\}$	$\{9,12,14,17\}$	$\{10,11,13,15\}$
	$\delta(G)=0\rightarrow 16(2)$	$\{16\}$	$\{\varnothing\}$	$\{9,12,14,16,17\}$	$\{10,11,13,15\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 30(1)$	$\{30\}$	$\{26\}$	$\{9,12,14,16,17,30\}$	$\{10,11,13,15,26\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 25(2)$	$\{25\}$	$\{27\}$	$\{9,12,14,16,17,25,30\}$	$\{10,11,13,15,26,27\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 24(2)$	$\{24\}$	$\{23\}$	$\{9,12,14,16,17,24,25,30\}$	$\{10,11,13,15,23,26,27\}$
	$\delta(G)=2\rightarrow 1(2),6(2),8(3),22(3),28(5)$	$\{28\}$	$\{19,29\}$	$\{9,12,14,16,17,24,25,28,30\}$	$\{10,11,13,15,19,23,26,27,29\}$
	$\delta(G)=2\rightarrow 1(2),6(2),8(3),18(5),22(3)$	$\{18\}$	$\{7,8\}$	$\{9,12,14,16,17,18,24,25,28,30\}$	$\{7,8,10,11,13,15,19,23,26,27,29\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 6(2)$	$\{6\}$	$\{5\}$	$\{6,9,12,14,16,17,18,24,25,28,30\}$	$\{5,7,8,10,11,13,15,19,23,26,27,29\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 4(3)$	$\{4\}$	$\{3\}$	$\{4,6,9,12,14,16,17,18,24,25,28,30\}$	$\{3,5,7,8,10,11,13,15,19,23,26,27,29\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 1(2)$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,4,6,9,12,14,16,17,18,24,25,28,30\}$	$\{2,3,5,7,8,10,11,13,15,19,23,26,27,29\}$
	$\delta(G)=2\rightarrow 20(5),21(5),22(3)$	$\{20\}$	$\{21,22\}$	$\{1,4,6,9,12,14,16,17,18,20,24,25,28,30\}$	$\{2,3,5,7,8,10,11,13,15,19,21,22,23,26,27,29\}$
2	$\delta(G)=1\rightarrow 13(1),15(1),26(1)$	$\{13\}$	$\{11\}$	$\{13\}$	$\{11\}$
	$\delta(G)=0\rightarrow 15(1)$	$\{15\}$	$\{\varnothing\}$	$\{13,15\}$	$\{11\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 26(1)$	$\{26\}$	$\{27\}$	$\{13,15,26\}$	$\{11,27\}$
	$\delta(G)=2\rightarrow 8(2),10(3),22(2),23(3),29(2)$	$\{10\}$	$\{8,29\}$	$\{10,13,15,26\}$	$\{8,11,27,29\}$
	$\delta(G)=2\rightarrow 19(3),22(2),23(3)$	$\{19\}$	$\{7,23\}$	$\{10,13,15,19,26\}$	$\{7,8,11,23,27,29\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 22(2)$	$\{22\}$	$\{21\}$	$\{10,13,15,19,22,26\}$	$\{7,8,11,21,23,27,29\}$
	$\delta(G)=2\rightarrow 2(3),3(3),5(4)$	$\{5\}$	$\{2,3\}$	$\{5,10,13,15,19,22,26\}$	$\{2,3,7,8,11,21,23,27,29\}$
3	$\delta(G)=0\rightarrow 11(0),29(0)$	$\{11,29\}$	$\{\varnothing\}$	$\{11,29\}$	$\{\varnothing\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 8(1),23(1),27(1)$	$\{8\}$	$\{7\}$	$\{8,11,29\}$	$\{7\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 3(2),21(2),23(1),27(1)$	$\{3\}$	$\{2\}$	$\{3,8,11,29\}$	$\{2,7\}$
	$\delta(G)=0\rightarrow 21(2)$	$\{21\}$	$\{\varnothing\}$	$\{3,8,11,21,29\}$	$\{2,7\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 23(1),27(1)$	$\{23\}$	$\{27\}$	$\{3,8,11,21,23,29\}$	$\{2,7,27\}$
4	–	–	–	$\{2,7,27\}$	–

(b) G_3 그래프

k	$Vertex(deg(v))$	v	u	$MIS(\overline{C_k})$	$MVC(C_k)$
1	$\delta(G)=0\rightarrow 49(0),50(0)$	$\{49,50\}$	$\{\varnothing\}$	$\{49,50\}$	$\{\varnothing\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 1(1)$	$\{1\}$	$\{3\}$	$\{1,49,50\}$	$\{3\}$
	$\delta(G)=2\rightarrow 2(3),6(2),18(2),20(2),45(2)$	$\{2\}$	$\{4,5\}$	$\{1,2,49,50\}$	$\{3,4,5\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 6(2),7(3)$	$\{7\}$	$\{6\}$	$\{1,2,7,49,50\}$	$\{3,4,5,6\}$
	$\delta(G)=2\rightarrow 8(3),18(2),20(2),45(2)$	$\{8\}$	$\{9,11\}$	$\{1,2,7,8,49,50\}$	$\{3,4,5,6,9,11\}$
	$\delta(G)=2\rightarrow 10(4),18(2),20(2),45(2)$	$\{10\}$	$\{12,13\}$	$\{1,2,7,8,10,49,50\}$	$\{3,4,5,6,9,11,12,13\}$
	$\delta(G)=2\rightarrow 18(2),20(2),45(2)$	$\{18\}$	$\{14,19\}$	$\{1,2,7,8,10,18,49,50\}$	$\{3,4,5,6,9,11,12,13,14,19\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 20(2)$	$\{20\}$	$\{23\}$	$\{1,2,7,8,10,18,20,49,50\}$	$\{3,4,5,6,9,11,12,13,14,19,23\}$
	$\delta(G)=2\rightarrow 45(2)$	$\{45\}$	$\{42,46\}$	$\{1,2,7,8,10,18,20,45,49,50\}$	$\{3,4,5,6,9,11,12,13,14,19,23,42,46\}$
	$\delta(G)=2\rightarrow 48(3)$	$\{48\}$	$\{44,47\}$	$\{1,2,7,8,10,18,20,45,48,49,50\}$	$\{3,4,5,6,9,11,12,13,14,19,23,42,44,46,47\}$
	$\delta(G)=2\rightarrow 41(3),43(5)$	$\{43\}$	$\{39,40\}$	$\{1,2,7,8,10,18,20,43,45,48,49,50\}$	$\{3,4,5,6,9,11,12,13,14,19,23,39,40,42,44,46,47\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 41(3)$	$\{41\}$	$\{37\}$	$\{1,2,7,8,10,18,20,41,43,45,48,49,50\}$	$\{3,4,5,6,9,11,12,13,14,19,23,37,39,40,42,44,46,47\}$
	$\delta(G)=2\rightarrow 31(3),38(4)$	$\{38\}$	$\{32,33\}$	$\{1,2,7,8,10,18,20,38,41,43,45,48,49,50\}$	$\{3,4,5,6,9,11,12,13,14,19,23,32,33,37,39,40,42,44,46,47\}$
	$\delta(G)=2\rightarrow 27(4),31(3)$	$\{27\}$	$\{24,28\}$	$\{1,2,7,8,10,18,20,27,38,41,43,45,48,49,50\}$	$\{3,4,5,6,9,11,12,13,14,19,23,24,28,32,33,37,39,40,42,44,46,47\}$
	$\delta(G)=2\rightarrow 21(3),31(3),34(6)$	$\{34\}$	$\{29,35\}$	$\{1,2,7,8,10,18,20,27,34,38,41,43,45,48,49,50\}$	$\{3,4,5,6,9,11,12,13,14,19,23,24,28,29,32,33,35,37,39,40,42,44,46,47\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 36(5)$	$\{36\}$	$\{30\}$	$\{1,2,7,8,10,18,20,27,34,36,38,41,43,45,48,49,50\}$	$\{3,4,5,6,9,11,12,13,14,19,23,24,28,29,30,32,33,35,37,39,40,42,44,46,47\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 31(3)$	$\{31\}$	$\{26\}$	$\{1,2,7,8,10,18,20,27,31,34,36,38,41,43,45,48,49,50\}$	$\{3,4,5,6,9,11,12,13,14,19,23,24,26,28,29,30,32,33,35,37,39,40,42,44,46,47\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 17(8)$	$\{17\}$	$\{16\}$	$\{1,2,7,8,10,17,18,20,27,31,34,36,38,41,43,45,48,49,50\}$	$\{3,4,5,6,9,11,12,13,14,16,19,23,24,26,28,29,30,32,33,35,37,39,40,42,44,46,47\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 25(5)$	$\{25\}$	$\{22\}$	$\{1,2,7,8,10,17,18,20,25,27,31,34,36,38,41,43,45,48,49,50\}$	$\{3,4,5,6,9,11,12,13,14,16,19,22,23,24,26,28,29,30,32,33,35,37,39,40,42,44,46,47\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 15(5),21(3)$	$\{15\}$	$\{21\}$	$\{1,2,7,8,10,15,17,18,20,25,27,31,34,36,38,41,43,45,48,49,50\}$	$\{3,4,5,6,9,11,12,13,14,16,19,21,22,23,24,26,28,29,30,32,33,35,37,39,40,42,44,46,47\}$
2	$\delta(G)=1\rightarrow 3(1),6(1),11(1),32(1),37(1),44(1)$	$\{3\}$	$\{5\}$	$\{3\}$	$\{5\}$
	$\delta(G)=0\rightarrow 6(1)$	$\{6\}$	$\{\varnothing\}$	$\{3,6\}$	$\{5\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 4(2),11(1),32(1),37(1),44(1)$	$\{4\}$	$\{9\}$	$\{3,4,6\}$	$\{5,9\}$
	$\delta(G)=0\rightarrow 11(1)$	$\{11\}$	$\{\varnothing\}$	$\{3,4,6,11\}$	$\{5,9\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 32(1),37(1),44(1)$	$\{32\}$	$\{33\}$	$\{3,4,6,11,32\}$	$\{5,9,33\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 37(1),44(1)$	$\{37\}$	$\{30\}$	$\{3,4,6,11,32,37\}$	$\{5,9,30,33\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 26(2),44(1)$	$\{26\}$	$\{23\}$	$\{3,4,6,11,26,32,37\}$	$\{5,9,23,30,33\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 19(2),44(1)$	$\{19\}$	$\{14\}$	$\{3,4,6,11,19,26,32,37\}$	$\{5,9,14,23,30,33\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 44(1)$	$\{44\}$	$\{47\}$	$\{3,4,6,11,19,26,32,37,44\}$	$\{5,9,14,23,30,33,47\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 46(2)$	$\{46\}$	$\{42\}$	$\{3,4,6,11,19,26,32,37,44,46\}$	$\{5,9,14,23,30,33,42,47\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 39(3)$	$\{39\}$	$\{40\}$	$\{3,4,6,11,19,26,32,37,39,44,46\}$	$\{5,9,14,23,30,33,40,42,47\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 35(2)$	$\{35\}$	$\{29\}$	$\{3,4,6,11,19,26,32,35,37,39,44,46\}$	$\{5,9,14,23,29,30,33,40,42,47\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 28(3)$	$\{28\}$	$\{24\}$	$\{3,4,6,11,19,26,28,32,35,37,39,44,46\}$	$\{5,9,14,23,24,29,30,33,40,42,47\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 21(2)$	$\{21\}$	$\{22\}$	$\{3,4,6,11,19,21,26,28,32,35,37,39,44,46\}$	$\{5,9,14,22,23,24,29,30,33,40,42,47\}$
	$\delta(G)=2\rightarrow 12(3),13(3),16(4)$	$\{16\}$	$\{12,13\}$	$\{3,4,6,11,16,19,21,26,28,32,35,37,39,44,46\}$	$\{5,9,12,13,14,22,23,24,29,30,33,40,42,47\}$
3	$\delta(G)=0\rightarrow 5(0),22(0),23(0),24(0),33(0),40(0)$	–	$\{\varnothing\}$	$\{5,22,23,24,33,40\}$	$\{\varnothing\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 9(1),14(1),29(1),30(1),42(1),47(1)$	$\{9\}$	$\{13\}$	$\{5,9,22,23,24,33,40\}$	$\{13\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 12(2),14(1),29(1),30(1),42(1),47(1)$	$\{12\}$	$\{14\}$	$\{5,9,12,22,23,24,33,40\}$	$\{13,14\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 29(1),30(1),42(1),47(1)$	$\{29\}$	$\{30\}$	$\{5,9,12,22,23,24,29,33,40\}$	$\{13,14,30\}$
	$\delta(G)=1\rightarrow 42(1),47(1)$	$\{42\}$	$\{47\}$	$\{5,9,12,22,23,24,29,33,40,42\}$	$\{13,14,30,47\}$
4	–	–	–	$\{13,14,30,47\}$	–

(c) G_4 그래프

k	$Vertex(deg(v))$	v	u	$MIS(\overline{C_k})$	$MVC(C_k)$
1	$\delta(G)=5\to1(5),2(5),3(5),4(5),5(5),6(5),8(5),10(5),12(5),13(5),14(5),17(5)$	$\{1\}$	$\{3,5,10,12,17\}$	$\{1\}$	$\{3,5,10,12,17\}$
	$\delta(G)=4\to7(6),9(6),11(6),15(6),16(6)$	$\{7\}$	$\{6,9,14,16\}$	$\{1,7\}$	$\{1,3,5,7,10,12,17\}$
	$\delta(G)=3\to2(5),4(5),11(6),13(5),15(6)$	$\{11\}$	$\{4,8,15\}$	$\{1,7,11\}$	$\{1,3,4,5,7,8,10,11,12,17\}$
	$\delta(G)=1\to2(5),13(5)$	$\{2\}$	$\{13\}$	$\{1,2,7,11\}$	$\{1,3,4,5,7,8,10,11,12,13,17\}$
2	$\delta(G)=3\to3(3),5(3),8(3),12(3),14(3),17(3)$	$\{3\}$	$\{5,10,15\}$	$\{3\}$	$\{5,10,15\}$
	$\delta(G)=2\to8(3),9(4),12(3),17(3)$	$\{9\}$	$\{14,17\}$	$\{3,9\}$	$\{5,10,14,15,17\}$
	$\delta(G)=1\to12(3)$	$\{12\}$	$\{16\}$	$\{3,9,12\}$	$\{5,10,14,15,16,17\}$
	$\delta(G)=2\to6(4),8(3)$	$\{6\}$	$\{4,13\}$	$\{3,6,9,12\}$	$\{4,5,10,13,14,15,16,17\}$
	$\delta(G)=0\to8(3)$	$\{8\}$	$\{\varnothing\}$	$\{3,6,8,9,12\}$	$\{4,5,10,13,14,15,16,17\}$
3	$\delta(G)=1\to5(1),14(1),15(1),17(1)$	$\{5\}$	$\{16\}$	$\{5\}$	$\{16\}$
	$\delta(G)=1\to4(2),14(1),15(1),17(1)$	$\{4\}$	$\{13\}$	$\{4,5\}$	$\{13,16\}$
	$\delta(G)=0\to14(1)$	$\{14\}$	$\{\varnothing\}$	$\{4,5,14\}$	$\{13,16\}$
	$\delta(G)=1\to15(1),17(1)$	$\{15\}$	$\{10\}$	$\{4,5,14,15\}$	$\{10,13,16\}$
	$\delta(G)=0\to17(1)$	$\{17\}$	$\{\varnothing\}$	$\{4,5,14,15,17\}$	$\{10,13,16\}$
4	–	–	–	$\{10,13,16\}$	–

표 2. 만우절 조작 그래프의 4-색 알고리즘
Table 2. 4-Color Algorithm for April Fool's Joke Graph

k	$Vertex(deg(v))$	v	u	$MIS(\overline{C_k})$	$MVC(C_k)$
1	$G=(V,E),V=V\setminus\{1,3\}$, /* $1(14),3(10)$이 없는 그래프				
	$\delta(G)=2\to12(2)$	$\{12\}$	$\{11,21\}$	$\{12\}$	$\{11,21\}$
	$\delta(G)=3\to4(3),10(4),31(3)$	$\{10\}$	$\{9,19,20\}$	$\{10,12\}$	$\{9,11,19,20,21\}$
	$\delta(G)=3\to4(3),8(4),31(3)$	$\{8\}$	$\{7,17,18\}$	$\{8,10,12\}$	$\{7,9,11,17,18,19,20,21\}$
	$\delta(G)=3\to4(3),6(4),31(3)$	$\{6\}$	$\{5,15,16\}$	$\{6,8,10,12\}$	$\{5,7,9,11,15,16,17,18,19,20,21\}$
	$\delta(G)=2\to4(3)$	$\{4\}$	$\{13,14\}$	$\{4,6,8,10,12\}$	$\{5,7,9,11,13,14,15,16,17,18,19,20,21\}$
	$\delta(G)=2\to31(3)$	$\{31\}$	$\{30,47\}$	$\{4,6,8,10,12,31\}$	$\{5,7,9,11,13,14,15,16,17,18,19,20,21,30,47\}$
	$\delta(G)=3\to29(4),32(6)$	$\{32\}$	$\{33,55,56\}$	$\{4,6,8,10,12,31,32\}$	$\{5,7,9,11,13,14,15,16,17,18,19,20,21,30,33,47,55,56\}$
	$\delta(G)=3\to29(4),34(6),46(6)$	$\{34\}$	$\{35,57,58\}$	$\{4,6,8,10,12,31,32,34\}$	$\{5,7,9,11,13,14,15,16,17,18,19,20,21,30,33,35,47,55,56,57,58\}$
	$\delta(G)=3\to29(4),36(6),46(6)$	$\{36\}$	$\{37,59,60\}$	$\{4,6,8,10,12,31,32,34,36\}$	
	$\delta(G)=3\to29(4),38(6),46(6)$	$\{38\}$	$\{39,61,62\}$	$\{4,6,8,10,12,31,32,34,36,38\}$	⋮
	$\delta(G)=3\to22(5),29(4),46(6)$	$\{46\}$	$\{29,45,54\}$	$\{4,6,8,10,12,31,32,34,36,38,46\}$	
	$\delta(G)=2\to28(4)$	$\{28\}$	$\{27,44\}$	$\{4,6,8,10,12,28,31,32,34,36,38,46\}$	$C_k=C_k\cup\{u\}$
	$\delta(G)=3\to22(5),53(6),69(6)$	$\{53\}$	$\{52,67,68\}$	$\{4,6,8,10,12,28,31,32,34,36,38,46,53\}$	
	$\delta(G)=2\to69(6)$	$\{69\}$	$\{70,81\}$	$\{4,6,8,10,12,28,31,32,34,36,38,46,53,69\}$	
	$\delta(G)=3\to22(5),43(6),71(6),80(6)$	$\{43\}$	$\{26,42,51\}$	$\{4,6,8,10,12,28,31,32,34,36,38,43,46,53,69\}$	
	$\delta(G)=3\to2(4),22(5),25(5),66(6),71(6),80(6)$	$\{66\}$	$\{65,78,79\}$	$\{4,6,8,10,12,28,31,32,34,36,38,43,46,53,66,69\}$	
	$\delta(G)=2\to80(6)$	$\{80\}$	$\{90,91\}$	$\{4,6,8,10,12,28,31,32,34,36,38,43,46,53,66,69,80\}$	
	$\delta(G)=3\to2(4),22(5),25(5),50(6),71(6),82(6),89(6)$	$\{50\}$	$\{41,49,64\}$	$\{4,6,8,10,12,28,31,32,34,36,38,43,46,50,53,66,69,80\}$	
	$\delta(G)=2\to25(5)$	$\{25\}$	$\{2,24\}$	$\{4,6,8,10,12,25,28,31,32,34,36,38,43,46,50,53,66,69,80\}$	
	$\delta(G)=2\to23(4)$	$\{23\}$	$\{22,40\}$	$\{4,6,8,10,12,23,25,28,31,32,34,36,38,43,46,50,53,66,69,80\}$	
	$\delta(G)=1\to48(6)$	$\{48\}$	$\{63\}$	$\{4,6,8,10,12,23,25,28,31,32,34,36,38,43,46,48,50,53,66,69,80\}$	
	$\delta(G)=3\to71(6),75(6),77(6),82(6),89(6)$	$\{71\}$	$\{72,82,83\}$	$\{4,6,8,10,12,23,25,28,31,32,34,36,38,43,46,48,50,53,66,69,71,80\}$	
	$\delta(G)=3\to73(6),75(6),77(6),89(6),92(6)$	$\{73\}$	$\{74,84,85\}$	$\{4,6,8,10,12,23,25,28,31,32,34,36,38,43,46,48,50,53,66,69,71,73,80\}$	
	$\delta(G)=2\to75(6)$	$\{75\}$	$\{76,86\}$	$\{4,6,8,10,12,23,25,28,31,32,34,36,38,43,46,48,50,53,66,69,71,73,75,80\}$	
	$\delta(G)=2\to77(6)$	$\{77\}$	$\{87,88\}$	$\{4,6,8,10,12,23,25,28,31,32,34,36,38,43,46,48,50,53,66,69,71,73,75,77,80\}$	
	$\delta(G)=2\to89(6)$	$\{89\}$	$\{97,98\}$	$\{4,6,8,10,12,23,25,28,31,32,34,36,38,43,46,48,50,53,66,69,71,73,75,77,80,89\}$	
	$\delta(G)=3\to92(6),95(6),96(6),99(6)$	$\{92\}$	$\{93,99,100\}$	$\{4,6,8,10,12,23,25,28,31,32,34,36,38,43,46,48,50,53,66,69,71,73,75,77,80,89,92\}$	
	$\delta(G)=3\to94(6),95(6),96(6),105(6)$	$\{94\}$	$\{95,101,102\}$	$\{4,6,8,10,12,23,25,28,31,32,34,36,38,43,46,48,50,53,66,69,71,73,75,77,80,89,92,94\}$	
	$\delta(G)=1\to96(6)$	$\{96\}$	$\{103\}$	$\{4,6,8,10,12,23,25,28,31,32,34,36,38,43,46,48,50,53,66,69,71,73,75,77,80,89,92,94,96\}$	
	$\delta(G)=3\to104(6),105(6),107(6)$	$\{104\}$	$\{105,108,109\}$	$\{4,6,8,10,12,23,25,28,31,32,34,36,38,43,46,48,50,53,66,69,71,73,75,77,80,89,92,94,96,104\}$	
	$\delta(G)=2\to106(6),107(6),110(6)$	$\{106\}$	$\{107,110\}$	$\{4,6,8,10,12,23,25,28,31,32,34,36,38,43,46,48,50,53,66,69,71,73,75,77,80,89,92,94,96,104,106\}$	

k	$Vertex(deg(v))$	v	u	$MIS(\overline{C_k})$	$MVC(C_k)$
2	$\delta(G)=2\to2(2),5(2),7(2),9(2),11(2),13(2),27(2),29(2),30(2)$	$\{2\}$	$\{24,26\}$	$\{2\}$	$\{24,26\}$
	$\delta(G)=1\to27(2)$	$\{27\}$	$\{44\}$	$\{2,27\}$	$\{24,26,44\}$
	$\delta(G)=2\to5(2),7(2),9(2),11(2),13(2),29(2),30(2),42(3),45(3),52(3)$	$\{42\}$	$\{41,51\}$	$\{2,27,42\}$	$\{24,26,41,44,51\}$
	$\delta(G)=1\to52(3)$	$\{52\}$	$\{67\}$	$\{2,27,42,52\}$	$\{24,26,41,44,51,67\}$
	$\delta(G)=2\to5(2),7(2),9(2),11(2),13(2),29(2),30(2),40(4),45(3),65(3),68(3),79(3)$	$\{40\}$	$\{22,49\}$	$\{2,27,40,42,52\}$	$\{22,24,26,41,44,49,51,67\}$
	$\delta(G)=2\to5(2),7(2),9(2),11(2),13(2),29(2),30(2),45(3),65(3),68(3),79(3)$	$\{45\}$	$\{29,54\}$	$\{2,27,40,42,45,52\}$	$\{22,24,26,29,41,44,49,51,54,67\}$
	$\delta(G)=1\to30(2),68(3)$	$\{68\}$	$\{81\}$	$\{2,27,40,42,45,52,68\}$	$\{22,24,26,29,41,44,49,51,54,67,81\}$
	$\delta(G)=1\to30(2)$	$\{30\}$	$\{47\}$	$\{2,27,30,40,42,45,52,68\}$	$\{22,24,26,29,41,44,47,49,51,54,67,81\}$
	$\delta(G)=1\to13(2),55(3)$	$\{55\}$	$\{56\}$	$\{2,27,30,40,42,45,52,55,68\}$	$\{22,24,26,29,41,44,47,49,51,54,56,67,81\}$
	$\delta(G)=1\to13(2)$	$\{13\}$	$\{14\}$	$\{2,13,27,30,40,42,45,52,55,68\}$	
	$\delta(G)=1\to5(2)$	$\{5\}$	$\{15\}$	$\{2,5,13,27,30,40,42,45,52,55,68\}$	⋮
	$\delta(G)=1\to33(4)$	$\{33\}$	$\{57\}$	$\{2,5,13,27,30,33,40,42,45,52,55,68\}$	
	$\delta(G)=1\to70(4)$	$\{70\}$	$\{82\}$	$\{2,5,13,27,30,33,40,42,45,52,55,68,70\}$	$C_k=C_k\cup\{u\}$
	$\delta(G)=2\to7(2),9(2),11(2),65(3),79(3),91(4)$	$\{91\}$	$\{90,99\}$	$\{2,5,13,27,30,33,40,42,45,52,55,68,70,91\}$	
	$\delta(G)=1\to79(3)$	$\{79\}$	$\{78\}$	$\{2,5,13,27,30,33,40,42,45,52,55,68,70,79,91\}$	
	$\delta(G)=1\to65(3)$	$\{65\}$	$\{64\}$	$\{2,5,13,27,30,33,40,42,45,52,55,65,68,70,79,91\}$	
	$\delta(G)=2\to7(2),9(2),11(2),63(4),88(3),98(4)$	$\{63\}$	$\{62,76\}$	$\{2,5,13,27,30,33,40,42,45,52,55,63,65,68,70,79,91\}$	
	$\delta(G)=2\to7(2),9(2),11(2),39(4),88(3),98(4)$	$\{39\}$	$\{20,21\}$	$\{2,5,13,27,30,33,39,40,42,45,52,55,63,65,68,70,79,91\}$	
	$\delta(G)=0\to11(2)$	$\{11\}$	$\{\varnothing\}$	$\{2,5,11,13,27,30,33,39,40,42,45,52,55,63,65,68,70,79,91\}$	
	$\delta(G)=2\to7(2),9(2),88(3),98(4)$	$\{98\}$	$\{97,105\}$	$\{2,5,11,13,27,30,33,39,40,42,45,52,55,63,65,68,70,79,91,98\}$	
	$\delta(G)=1\to88(3)$	$\{88\}$	$\{87\}$	$\{2,5,11,13,27,30,33,39,40,42,45,52,55,63,65,68,70,79,88,91,98\}$	
	$\delta(G)=2\to7(2),9(2),100(4),109(3)$	$\{100\}$	$\{93,101\}$	$\{2,5,11,13,27,30,33,39,40,42,45,52,55,63,65,68,70,79,88,91,98,100\}$	
	$\delta(G)=2\to7(2),9(2),83(4),109(3)$	$\{83\}$	$\{72,84\}$	$\{2,5,11,13,27,30,33,39,40,42,45,52,55,63,65,68,70,79,83,88,91,98,100\}$	
	$\delta(G)=2\to7(2),9(2),58(4),109(3)$	$\{58\}$	$\{35,59\}$	$\{2,5,11,13,27,30,33,39,40,42,45,52,55,58,63,65,68,70,79,83,88,91,98,100\}$	
	$\delta(G)=2\to7(2),9(2),16(4),109(3)$	$\{16\}$	$\{7,17\}$	$\{2,5,11,13,16,27,30,33,39,40,42,45,52,55,58,63,65,68,70,79,83,88,91,98,100\}$	
	$\delta(G)=2\to9(2),109(3)$	$\{109\}$	$\{108,110\}$	$\{2,5,11,13,16,27,30,33,39,40,42,45,52,55,58,63,65,68,70,79,83,88,91,98,100,109\}$	
	$\delta(G)=2\to9(2),103(4),107(5)$	$\{107\}$	$\{102,103\}$	$\{2,5,11,13,16,27,30,33,39,40,42,45,52,55,58,63,65,68,70,79,83,88,91,98,100,107,109\}$	
	$\delta(G)=2\to9(2),95(4)$	$\{95\}$ $\{86\}$	$\{85,86\}$ $\{74,85,95\}$	$\{2,5,11,13,16,27,30,33,39,40,42,45,52,55,58,63,65,68,70,79,83,86,88,91,98,100,107,109\}$	$\{86,87\}$, $\{86,76\}$, $\{76,87\}$
	$\delta(G)=2\to9(2),60(4),61(4)$	$\{60\}$	$\{37,61\}$	$\{2,5,11,13,16,27,30,33,39,40,42,45,52,55,58,60,63,65,68,70,79,83,86,88,91,98,100,107,109\}$	
	$\delta(G)=2\to9(2),18(4),19(4)$	$\{18\}$	$\{9,19\}$	$\{2,5,11,13,16,18,27,30,33,39,40,42,45,52,55,58,60,63,65,68,70,79,83,86,88,91,98,100,107,109\}$	

k	$Vertex(deg(v))$	v	u	$MIS(\overline{C_k})$	$MVC(C_k)$
3	$\delta(G)=0\rightarrow 26,29,44,47,51,54,67,78$	-	-	{26,29,44,47,51,54,67,78}	{∅}
	$\delta(G)=1\rightarrow 7(1),9(1),14(1),15(1),22(1),24(1),56(1),57(1),62(1),81(1),82(1),90(1),97(1),105(1),110(1)$	{7}	{17}	{7,26,29,44,47,51,54,67,78}	{17}
	$\delta(G)=1\rightarrow 9(1),14(1),15(1),22(1),24(1),35(2),56(1),57(1),62(1),81(1),82(1),90(1),97(1),105(1),110(1)$	{35}	{59}	{7,26,29,35,44,47,51,54,67,78}	{17,59}
	$\delta(G)=1\rightarrow 9(1),14(1),15(1),22(1),24(1),56(1),57(1),62(1),72(2),81(1),82(1),90(1),97(1),105(1),110(1)$	{72}	{84}	{7,26,29,35,44,47,51,54,67,72,78}	{17,59,84}
	$\delta(G)=1\rightarrow 9(1),14(1),15(1),22(1),24(1),56(1),57(1),62(1),81(1),82(1),90(1),93(2),97(1),105(1),110(1)$	{93}	{101}	{7,26,29,35,44,47,51,54,67,72,78,93}	{17,59,84,101}
	$\delta(G)=1\rightarrow 9(1),14(1),15(1),22(1),24(1),56(1),57(1),62(1),81(1),82(1),90(1),97(1),105(1),110(1)$ ↳ $\delta(G)=2\rightarrow 85(3),102(3)$	{85}	{74,95}	{7,26,29,35,44,47,51,54,67,72,78,85,93}	**MVC 인접 정점 없음** {17,59,74,84,95,101}
	$\delta(G)=1\rightarrow 9(1),14(1),15(1),22(1),24(1),56(1),57(1),62(1),81(1),82(1),87(2),90(1),97(1),102(3),105(1),110(1)$	{102}	{103}	{7,26,29,35,44,47,51,54,67,72,78,85,93,102}	{17,59,74,84,95,101,103}
	$\delta(G)=0\rightarrow 97(1)$	{97}	{∅}	{7,26,29,35,44,47,51,54,67,72,78,85,93,97,102}	{17,59,74,84,95,101,103}
	$\delta(G)=1\rightarrow 9(1),14(1),15(1),22(1),24(1),56(1),57(1),62(1),81(1),82(1),87(2),90(1),105(1),108(2),110(1)$	{87}	{76}	{7,26,29,35,44,47,51,54,67,72,78,85,87,93,97,102}	{17,59,74,76,84,95,101,103}
	$\delta(G)=1\rightarrow 9(1),14(1),15(1),22(1),24(1),56(1),57(1),62(1),64(2),81(1),82(1),90(1),105(1),108(2),110(1)$	{64}	{49}	{7,26,29,35,44,47,51,54,64,67,72,78,85,87,93,97,102}	{17,49,59,74,76,84,95,101,103}
	$\delta(G)=1\rightarrow 9(1),14(1),15(1),22(1),24(1),41(2),56(1),57(1),62(1),81(1),82(1),90(1),105(1),108(2),110(1)$	{41}	{24}	{7,26,29,35,41,44,47,51,54,64,67,72,78,85,87,93,97,102}	{17,24,49,59,74,76,84,95,101,103}
	$\delta(G)=1\rightarrow 9(1),14(1),15(1),22(1),56(1),57(1),62(1),81(1),82(1),90(1),105(1),108(2),110(1)$	{108}	{110}	{7,26,29,35,41,44,47,51,54,64,67,72,78,85,87,93,97,102,108}	{17,24,49,59,74,76,84,95,101,103,110}
	$\delta(G)=1\rightarrow 9(1),14(1),15(1),22(1),56(1),57(1),62(1),81(1),82(1),90(1),105(1)$ ↳ $\delta(G)=2\rightarrow 19(3),20(2),21(2),37(2),61(3),99(2),19(3)$ /* **MVC와** {61,74} 존재	{61}	{37,62}	{7,26,29,35,41,44,47,51,54,61,64,67,72,78,85,87,93,97,102,108}	**MVC 인접 정점 없음** {17,24,37,49,59,62,74,76,84,95,101,103,110}
	$\delta(G)=1\rightarrow 9(1),14(1),15(1),22(1),56(1),57(1),81(1),82(1),90(1),105(1)$ ↳ $\delta(G)=2\rightarrow 19(3),20(2),21(2),99(2)$ /* **MVC와** {19,37} 존재	{19}	{9,20}	{7,19,26,29,35,41,44,47,51,54,61,64,67,72,78,85,87,93,97,102,108}	**MVC 인접 정점 없음** {9,17,20,24,37,49,59,62,74,76,84,95,101,103,110}
	$\delta(G)=1\rightarrow 14(1),15(1),21(2),22(1),56(1),57(1),81(1),82(1),90(1),105(1)$	{21}	{22}	{7,19,21,26,29,35,41,44,47,51,54,61,64,67,72,78,85,87,93,97,102,108}	{9,17,20,22,24,37,49,59,62,74,76,84,95,101,103,110}
	$\delta(G)=1\rightarrow 14(1),15(1),56(1),57(1),81(1),82(1),90(1),105(1)$ ↳ $\delta(G)=2\rightarrow 99(2)$ /* **MVC와 인접 정점 없음**	{14}	{15}	{7,14,19,21,26,29,35,41,44,47,51,54,61,64,67,72,78,85,87,93,97,102,108}	**MVC 인접 정점 없음** {9,15,17,20,22,24,37,49,59,62,74,76,84,95,101,103,110}
	$\delta(G)=1\rightarrow 56(1),57(1),81(1),82(1),90(1),105(1)$	{56}	{57}	{7,14,19,21,26,29,35,41,44,47,51,54,56,61,64,67,72,78,85,87,93,97,102,108}	{9,15,17,20,22,24,37,49,57,59,62,74,76,84,95,101,103,110}
	$\delta(G)=1\rightarrow 81(1),82(1),90(1),105(1)$	{81}	{82}	{7,14,19,21,26,29,35,41,44,47,51,54,56,61,64,67,72,78,81,85,87,93,97,102,108}	{9,15,17,20,22,24,37,49,57,59,62,74,76,82,84,95,101,103,110}
	$\delta(G)=1\rightarrow 90(1),105(1)$	{90}	{99}	{7,14,19,21,26,29,35,41,44,47,51,54,56,61,64,67,72,78,81,85,87,90,93,97,102,108}	{9,15,17,20,22,24,37,49,57,59,62,74,76,82,84,95,99,101,103,110}
	$\delta(G)=0\rightarrow 105(1)$	{105}	{∅}	{7,14,19,21,26,29,35,41,44,47,51,54,56,61,64,67,72,78,81,85,87,90,93,97,102,105,108}	{9,15,17,20,22,24,37,49,57,59,62,74,76,82,84,95,99,101,103,110}
	$\overline{C_3}\leftarrow\overline{C_3}\cup\{3\}$	{3}	{∅}	{3,7,14,19,21,26,29,35,41,44,47,51,54,56,61,64,67,72,78,81,85,87,90,93,97,102,105,108}	{9,15,17,20,22,24,37,49,57,59,62,74,76,82,84,95,99,101,103,110}
4	$\overline{C_4}\leftarrow C_3\cup\{1\}$	{1}	{∅}	{1,9,15,17,20,22,24,37,49,57,59,62,74,76,82,84,95,99,101,103,110}	

된 알고리즘은 수행 복잡도 $O(n)$으로 컴퓨터를 활용하거나 수기식으로도 쉽게 증명할 수 있다. 제안된 알고리즘은 그래프 이론에서 주어진 그래프 $G=(V,E)$의 정점 집합 V를 MIS $\overline{C}$와 MVC C 집합으로 정확히 양분하는 방법을 적용하여 채색수 $\chi(G)=4$를 구하였다. 제안된 알고리즘을 2개의 실제 지도 그래프와 2개의 평면 그래프에 적용한 결과 $\chi(G)=4$를 얻을 수 있었다.

본 논문에서 제안된 4-색 알고리즘은 지금까지 NP-완전(non-deterministic polynomial-complete)인 난제로 여겨졌던 채색수 문제를 선형 시간으로 푸는 다항시간 (polynomial) 알고리즘이 존재함을 보였다. 따라서, 4-색 알고리즘은 NP-문제가 아닌 P-문제임을 증명하였다.

본 알고리즘은 채색수 문제를 풀 수 있는 일반적인 휴리스틱 알고리즘으로 적용할 수 있을 것이다.

참고문헌

〔1〕 Wikipedia, "Graph Coloring," http://en.wikipedia.org/wiki/Graph_Coloring, Wikimedia Foundation Inc., 2013.

〔2〕 Wikipedia, "Four Color Theorem," http://en.wikipedia.org/wiki/Four_Color_Theorem, Wikimedia Foundation Inc., 2008.

〔3〕 R. Thomas, "The Four Color Theorem," School of Mathematics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia, http://www.math.gatech.edu/~thomas/FC/ fourcolor.html, 2007.

〔4〕 M. Moore, "Four Color Theorem," Department of Mathematical Sciences, University of Arkansas, 2006.

〔5〕 I. Cahit, "The Four Color Theorem and Three Proofs," http://www.emu.edu.tr/~cahit/The Four Color Theorem - Three Proofs.html, 2005.

〔6〕 K. Brown, "The Four Color Theorem," http://www.mathpages.com/home/kmath266/kmath266. htm, 2008.

〔7〕 E. W. Weisstein, "The Four-Color Theorem," Wolfram MathWorld, http://mathworld.wolfram.com /Four-ColorTheorem.html, 2013.

〔8〕 K. Appel and W. Haken, "Every Planar Map is Four-Colorable, II: Reducibility," Illinois Journal of Math., Vol. 21, pp. 491-567, 1977.

〔9〕 M. Gardner, "Mathmatical Games: On Tessellatings the Plane with Convex Polygons," Science American, Vol. 232, pp. 112-117, 1975.

〔10〕 S. Wagon, "Mathematica in Action, 2nd Ed.," New York: Springer-Verlag, pp. 535-536, 1999.

〔11〕 S. Wagon, "A Machine Resolution of a Four-Color Hoax," Proceedings of the 14th Canadian Conference on Computational Geometry, pp. 174-185, 2002.

〔12〕 A. B. Kempe, "On the Geographical Problem of the Four Colors," American Journal of Math., Vol. 2, pp. 193-200, 1879.

[13] P. J. Heawood, "On the Four-Color Map Theorem," Quart. Journal Pure Math, Vol. 29, pp. 270-285, 1898.
[14] N. Robertson, D. P. Sanders, P. Seymour, and R. Thomas, "A New Proof of the Four-Colour Theorem," Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society, Vol. 2, No. 1, 1996.
[15] A. Dharwadker, "A New Proof of the Four Colour Theorem," http://www.geocities.com/dharwadker/, 2000.
[16] A. Dharwadker, "The Vertex Coloring Algorithm,"http://www.geocities.com/dharwadker/vertex_coloring/, 2006.
[17] Wikipedia, "Degree (Graph Theory)," http://en.wikipedia.org/wiki/Degree_(graph-theory), Wikimedia Foundation Inc., 2013.
[18] Wikipedia, "Hadwiger-Nelson Problem," http://en.wikipedia.org/wiki/Hadwiger_Nelson_Problem, Wikimedia Foundation Inc., 2013.

저 자 소 개

이 상 운(Sang-Un, Lee)
1983년~1987년:
한국항공대학교 항공전자공학과 (학사)
1995년~1997년:
경상대학교 컴퓨터과학과 (석사)
1998년~2001년 :
경상대학교 컴퓨터과학과 (박사)
2003.3~현 재 :
강릉원주대학교 멀티미디어공학과 부교수
관심분야: 소프트웨어 프로젝트 관리, 소프트웨어 개발 방법론, 소프트웨어 신뢰성, 그래프 알고리즘
e-mail: sulee@gwnu.ac.kr