Journal of The Korea Society of Computer and Information
Vol. 18, No. 9, September 2013
www.ksci.re.kr
http://dx.doi.org/10.9708/jksci.2013.18.9.121

지배집합 알고리즘

이 상 운*

A Dominating Set Algorithm

Sang-Un, Lee *

요 약

본 논문은 아직까지 정확한 해를 다항시간으로 구하는 알고리즘이 존재하지 않아 NP-완전 문제로 알려진 지배집합 (DS) 문제의 정확한 해를 선형시간으로 구하는 알고리즘을 제안하였다. 제안된 알고리즘은 그래프의 간선이 존재하지 않을 때까지 최소차수 $\delta(G)$를 가진 정점 u의 인접정점들 중 최대차수 $\Delta(G)$를 가진 정점 v를 최소 독립 지배집합 (MIDS)의 원소로 포함시키고 v의 부속 간선을 삭제하는 방법을 반복적으로 수행하여 구하였다. MIDS로부터 최소 지배집합 (MDS)으로 변환시키고, MDS로부터 최소 연결 DS (MCDS)로 변환시키는 방법으로 DS 관련 모든 문제의 정확한 해를 구할 수 있었다. 제안된 알고리즘을 10개의 다양한 그래프에 적용한 결과 정확한 해를 선형시간 복잡도 $O(n)$으로 구하는데 성공하였다. 결국, 제안된 지배집합 알고리즘은 지배집합 문제가 P-문제임을 증명하였다.

▸ Keywords : 지배집합, 연결 지배집합, 독립 지배집합, 차수

Abstract

This paper proposes a linear-time algorithm that has been designed to obtain an accurate solution for Dominating Set (DS) problem, which is known to be NP-complete due to the deficiency of polynomial-time algorithms that successfully derive an accurate solution to it. The proposed algorithm does so by repeatedly assigning vertex v with maximum degree $\Delta(G)$ among vertices adjacent to the vertex u with minimum degree $\delta(G)$ to Minimum Independent DS (MIDS) as its element and removing all the incident edges until no edges remain in the graph. This algorithm finally transforms MIDS into Minimum DS (MDS) and again into Minimum Connected DS (MCDS) so as to obtain the accurate solution to all DS-related problems. When applied to ten different graphs, it has successfully obtained accurate solutions with linear time complexity $O(n)$. It has therefore proven that Dominating Set problem is rather a P-problem.

▸ Keywords : Dominating Set, Connected DS, Independent DS, Degree

---

•제1저자 : 이상운
•투고일 : 2013. 7.30, 심사일 : 2013. 8.19, 게재확정일 : 2013. 8.27.
* 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 (Dept. of Multimedia Eng., Gangneung-Wonju National University)

I. 서 론

그래프 $G=(V,E), v \in V, e=\{u,v\} \in E$에서 간선 $\{u,v\}$가 존재하면 정점 u는 정점 v를 지배한다 (dominate)고 한다. D에 존재하지 않는 모든 정점 $V \setminus D$이 D에 속한 정점들에 적어도 하나의 간선으로 연결되어 있는 V의 부분집합 $D \subseteq V$를 지배집합 (dominating set, DS)이라 한다 [1-3].

지배집합 문제는 최소 DS를 찾는 MDS (minimum DS) 문제, 공통 원소를 갖지 않는 최소 독립 (independent) DS를 찾는 MIDS 또는 MDDS (Disjoint DS) 문제, 최소 연결 (connected) DS를 찾는 MCDS 문제, 최소 빈약 연결 (weakly connected) DS를 찾는 MWCDS 문제가 있다 [1,3-5]. MCDS는 무선통신망, VLSI 설계분야에 많이 적용되고 있으며, MCDS에서 전파 가능범위 내에 중복된 정점을 제거하면 MWCDS를 구할 수 있다. DS 문제는 1979년 Garey와 Johnson[6]이 NP-완전 문제로 제기한 이후 아직까지 정확한 해 (exact solution)를 다항시간으로 찾는 알고리즘이 존재하지 않고 있다[1,2,4,7,8].

주어진 그래프를 대상으로 IDS, DS 또는 CDS의 해를 찾는 알고리즘들은 다양하게 연구되고 있으며 최근에는 무선 통신망 분야에서 MCDS와 MWCDS 문제에 많은 연구가 진행되고 있다[7-22]. 일예로 Li[9]는 MCDS의 근사 해를 찾는 다양한 알고리즘들을 제시하고 있다. 기존 알고리즘들의 특징은 DS에 필요한 모든 IDS, DS, CDS를 찾고자 하는 것이 아니라 어느 특정한 하나의 해만을 찾을 수 있으며, 정확한 해를 찾는 수행 복잡도가 다항시간인 알고리즘이 존재하지 않는다. 따라서 주어진 그래프를 대상으로 필요한 MIDS, MDS와 MCDS의 정확한 해를 선형시간 복잡도로 일관되게 모두 찾을 수 있는 유일한 알고리즘이 요구된다.

본 논문은 DS 문제들에 대해 MIDS, MDS와 MCDS의 정확한 해를 다항시간으로 구할 수 있는 알고리즘을 제안한다. 2장에서는 주어진 그래프에 대해 MIDS, MDS와 MCDS 해를 다항시간으로 정확히 구하는 알고리즘을 제안한다. 3장에서는 다양한 그래프를 대상으로 제안된 알고리즘의 적용성을 평가해 본다.

II. DS 알고리즘

제안된 알고리즘은 그래프의 최대차수 (maximum degree) $\Delta(G)$와 최소차수 (minimum degree) $\delta(G)$를 가진 정점을 기준으로 MIDS를 구하고, MIDS로부터 MDS로, MDS로부터 MCDS로 변환하는 방법을 적용하며, 알고리즘 수행 복잡도는 선형인 $O(n)$으로 다항시간 알고리즘이다. Desrochers[4]에서 인용된 그림 1의 DS_1 문제를 대상으로 제안된 알고리즘으로 해를 구하는 방법을 고찰해 본다.

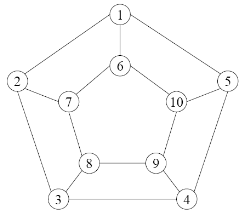


그림 1. DS_1 문제
Fig. 1. DS_1 problem

2.1 MIDS 알고리즘

MIDS는 최대 독립집합 (maximum independent set, MIS)을 구하는 방법을 적용한다. MIS는 각 정점들 차수 (degree)들 중에서 최소차수 $\delta(G)$를 가진 정점 u의 인접정점 (adjacent vertices) v들 중에서 최대차수 $\Delta(G)$정점 v를 선택하여 MIDS로 포함시키고, 정점 v의 인접정점들 w의 부속간선 (incident edges)을 제거하여 축소된 연결 그래프를 얻는다. 축소된 연결 그래프에 대해 간선이 존재하지 않을 때까지 반복적으로 수행하면 MIDS를 쉽게 얻는다. MIDS 알고리즘은 그림 2에 제시되어 있다.

$G=(V,E)$
각 정점 v의 차수 deg(v) 계산
[MIDS 알고리즘]
While $E \neq \{\phi\}$ Do
  각 정점 v의 차수 deg(v') 계산.
  if 모든 정점의 deg(v') 가 동일 then 첫 번째 정점 v 선택
  else 최소차수 $\delta(G)$ 정점 u의 인접정점 중 최대차수 $\Delta(G)$ 정점 v 선택 ($\Delta(G)$ 차수가 동일하면 deg(v) 가 최대인 정점 v 선택)
  endif
  $MIDS \leftarrow MDS \cup \{v\}$, v 인접정점 w의 부속간선 삭제, $V \leftarrow V \setminus \{v,w\}$.
Next
$D \leftarrow V$. /* deg(v') = 0 인 V에 남은 정점을 D에 추가 */

그림 2. MIDS 알고리즘
Fig. 2. MIDS algorithm

DS_1 문제에 대해 MIDS 알고리즘 수행 결과는 그림 3에 제시하였다. 10개의 모든 정점 차수가 3으로 동일하여 첫 번째 정점 ①을 선택하고 ① 정점의 인접정점 ②,⑤,⑥의 부속

간선을 삭제하면 ③,④,⑦,⑧,⑨,⑩만으로 연결된 축소 그래프가 남는다. 이 축소된 연결 그래프에서 최소차수 $\delta(G)=1$인 ⑦과 ⑩중 ⑦의 인접정점 중 최대차수 정점 ⑧을 선택하고 ⑧의 인접 ③,⑦,⑨의 부속 간선을 삭제하면 차수가 0인 정점 ④와 ⑩만 남게 된다. 따라서 정점 ④와 ⑩을 MIDS로 포함시키면, 단 3회만으로 MIDS={1,8,4,10}을 쉽게 얻을 수 있다. $\delta(G)=1$인 ⑦과 ⑩중 정점 ⑩의 인접정점 중 최대차수 정점 ⑨를 MIDS에 포함시키면 MIDS={1,3,7,9}를 얻을 수 있다.

$\delta(G)$	$\delta(G)$			$MIDS$	V
	u	v	$\Delta(G)$		
3={1,2,⋯,10}	–	{1}	{1}	{1}	{3,7,8,9,10}
1={7,10}	{7}	{8}	{8}	{1,8}	{4,10}, $E=\{\phi\}$
0={4,10}	{4,10}	$\{\phi\}$	–	{1,4,8,10}	$\{\phi\}$

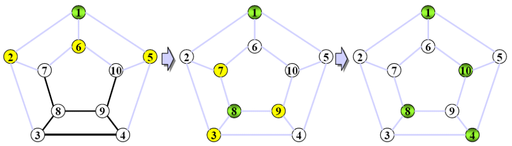


그림 3. DS_1 문제의 MIDS 해
Fig. 3. MIDS solution for DS_1 problem

2.2 MDS 알고리즘

본 절에서는 주어진 그래프에서 MDS를 직접 얻는 방법 대신 MIDS를 MDS로 변환시키는 방법을 제안한다. MIDS 집합 내의 정점들은 상호 독립적으로 존재하는데 반해 MDS는 상호 간선들로 연결이 되는 정점 수를 최소로 유지하는 특징을 갖고 있다. 이를 위해 모든 정점들을 커버하는 조건을 만족시키면서 분산되어 있는 정점들을 보다 집중된 정점들로 대체시키는 알고리즘이 요구된다. 따라서 MDS는 MIDS와 동일하거나 작은 규모를 가진다.

MIDS 집합의 정점 u에 대한 인접정점들 v를 대상으로 중복된 정점 (공통으로 커버하는 정점, v_c)들을 삭제하면 각 u 정점이 유일하게 커버하는 독립정점 v_i을 얻을 수 있다. 만약, 원소 개수 (cardinality) $|v_i|\geq 1$인 정점 u가 존재하면 해당 v 정점은 유일하게 u 정점만이 커버 가능하므로 MDS에서 삭제될 수 없다. $|v_i|=0$인 정점들 u가 존재하면 u를 인접정점 집합 v에 중복으로 포함된 정점 w로 대체시키면 MDS 정점 수를 축소시킬 수 있다. 제안된 MDS 알고리즘은 그림 4에 제시되어 있다.

DS_1 문제에 대해 MDS 알고리즘 수행 결과는 그림 5에 제시하였다.

```
MIDS의 정점 u에 대해 인접정점 집합 v 나열
if    |v|=1 인 정점 u 존재 then u를 v로 대체
else  v를 공통정점 v_c와 독립정점 v_i로 분류
      if       모든 정점 |v_c|=0 존재 then MDS=MIDS
      else if  |v_c|=0 인 정점 u 존재 then u에 대해 Skip
      else if  |v_c|≥1 인 정점 u 존재 then v_c 발생 빈도 f_c 계산
               if       f_c=동일 then
                        if       |v_i|=1  then u를 v_i로 대체
                        else if  |v_c|=1∩|v_i|=0  then u를 v_c로 대체
                        else if  |v_c|>1∩|v_i|=0  then u를 v_c중 최대
                                 차수 정점으로 대체 (v_c가 모두 동일
                                 차수이면 생략)
                        else     MDS=MIDS
                        endif
               else if  f_c=상이 then 최대 f_c 정점 w의 인접정점 x
                        나열
                        if       |v_i|=0 인 u 존재, u∈x then u를 w
                                 로 대체
                        else if  {u,v_i}⊆x 존재 then u를 w로 대체
                        else if  ({u,v_i}⊈x)∩|v_i|=1) then u를 v_i로
                                 대체
                        endif
               endif
      endif
endif
```

그림 4. MDS 알고리즘
Fig. 4. MDS algorithm

MIDS (u)	v			MDS		
	v	중복 정점 (v_c)	독립 정점 (v_i)	삭제	추가	MDS
1 4 8 10	{2,5,6} {3,5,9}] {3,7,9} {5,6,9}	{5,6} {3,5,9} {3,9} {5,6,9}	{2} – {7} –	– 4 – 10	– 5 또는 9 – 5 또는 9	{1,5,8} 또는 {1,8,9}
5 9	{1,4,10} {4,8,10}	{4,10} ⊆ 5, {4,10} ⊆ 9				

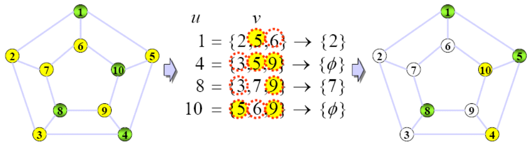


그림 5. DS_1 문제의 MDS 해
Fig. 5. MDS solution for DS_1 problem

MIDS={1,4,8,10} 정점들의 인접정점 v를 나열하고, 중복된 정점들을 제거하면 ① 정점은 ④, ⑧ 정점은 ⑦을 커버할 수 있으며, 정점④와 ⑩은 유일하게 커버할 수 있는 정점이 없게 된다. 즉, ① 또는 ⑧ 정점을 제거하면 ④ 또는 ⑦ 정점을 커버하지 못하므로 MDS에서 제거할 수 없어 반드시 MDS에 포함되어야만 한다. 반면에 정점④와 ⑩은 유일하게 커버하는 정점이 없으므로 다른 정점으로 대체시켜도 된다. 정점④와 ⑩을 대체시킬 수 있는 정점은 ④와 ⑩의 인접정점 v에 중복된 ⑤ 또는 ⑨ 정점이다. 따라서 ⑤ 또는 ⑨ 중 하나를 선택하면 ④와 ⑩을 커버하게 되어 MDS의 원소 개수를 3개로 축소시킬 수 있다. 결국, MDS={1,5,8} 또는 {1,8,9}를 얻는다.

2.3 MCDS 알고리즘

MCDS는 MDS로부터 변환시키는 방법을 적용한다. MDS 정점들 u로부터 최소로 연결된 DS인 MCDS 정점들을 구하기 위해서는 그림 6과 같이 MDS의 두 정점 u_1과 u_2의 인접정점 v중에서 중복된 정점을 선택하여 1차 근방(neighbourhood) 정점으로 찾을 수 있는 방법과 v중에서 중복된 정점들이 없어 다시 v의 인접정점 w들 중에서 중복된 정점을 선택하는 2차 근방 방법을 적용한다.

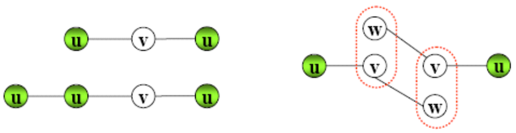


그림 6. MDS 정점 연결 방법
Fig. 6. Vertex connecting method for MDS

MDS 집합의 정점 u의 인접정점들 v를 대상으로 최대차수 $\Delta(G)$인 정점 v를 나열한다. 2개 정점 u_1과 u_2에 공통으로 포함된 정점 v를 선택한다. 2개 이상이 존재할 경우 최대차수 $\Delta(G)$ 정점 1개만 선택하며, 차수가 모두 동일하면 임의로 1개 정점을 선택한다. 단, MDS의 연결된 정점 간에는 중복 정점을 선택하지 않는다. 만약, $\Delta(G)$인 v에서 중복된 정점이 존재하지 않으면 v의 인접정점들 w를 나열하여 중복 정점 w를 선택한다. 제안된 MCDS 알고리즘은 그림 7에 제시되어 있다.

[MDS → MCDS 변환]
if MDS 정점들이 모두 연결인 그래프 then $MCDS \leftarrow MDS$, 알고리즘 종료
else MDS의 정점 u에 대해 인접정점 집합 v 나열, $v \setminus u$ 중 공통정점 v_c 파악
    if $v_c \neq \{\phi\}$ 인 정점 u 존재 then v_c중 최대차수 $\Delta(G)$인 정점 w 선택, $MCDS \leftarrow MCDS \cup \{w\}$
    else if $v_c = \{\phi\}$ 인 정점 u 존재 then $v \setminus u$ 중 최대차수 $\Delta(G)$ 인 정점 w 인접정점 x 나열, $x \setminus \{u,v\}$ 파악
        if $x \in w$ 인 정점 y 존재 then
            $\{w,y\}$ 선택, $MCDS \leftarrow MCDS \cup \{w,y\}$
        else $x \notin w$ then
            $\{w,x\}$ 선택, $MCDS \leftarrow MCDS \cup \{w,x\}$
        endif
    endif
endif

그림 7. MCDS 알고리즘
Fig. 7. MCDS algorithm

DS_1 문제에 대해 MCDS 알고리즘 수행 결과는 그림 8에 제시하였다. ①,⑤,⑧ 각 정점의 인접정점 중 $\Delta(G)$인 ②,④,③을 선택하면, u_1의 v_1인 ②는 v_2, v_3에 포함되지 않으며, ④와 ③도 포함된 상대 v가 존재하지 않는다. 결국, 1차 근방의 1개 정점만으로는 ①,⑤,⑧을 연결시킬 수 없다. 따라서 ②,④,③의 인접정점 (2차 근방) w를 대상으로 연결시키면 된다. ① 정점에 대해 2차 근방 {3,7}중 $x \in w$인 ③을 선택하여 $\{w,x\}$는 {2,3}을, ⑤ 정점에 대해 {4,3}을, ⑧ 정점에 대해 {3,2}와 {3,4}를 얻는다. ⑧ 정점의 {3,2}와 {3,4}는 ⑤ 정점과 중복되어 제거하고 ①과 ⑤ 정점에서 각각 1개씩 선택하면 MCDS={1,2,3,5,8},{1,3,4,5,8}를 얻는다. $\Delta(G)$정점을 변경하면 추가로 {1,2,5,7,8},{1,4,5,8,9},{1,5,6,7,8},{1,5,8,9,10}를 얻을 수 있다. MDS={1,8,9}에 대해서도 MCDS={1,2,3,8,9},{1,2,7,8,9},{1,4,5,8,9},{1,5,8,9,10},{1,6,7,8,9},{1,6,8,9,10}을 얻을 수 있다.

MDS (u)	u 인접정점 (v)		최대차수 w 인접정점 (x)				
	v	$v \setminus u$	w	x	$x \setminus \{u,v\}$	$x \in w$	선택
1	{2,5,6}	{2,6}	2	{1,3,7}	{3,7}	3	{2,3}
5	{1,4,10}	{4,10}	4	{3,5,9}	{3,9}	3	{4,3}
8	{3,7,9}	{3,7,9}	3	{2,4,8}	{2,4}	2,4	{3,2} or {3,4}
MCDS	{1,2,3,5,8}, {1,3,4,5,8}						

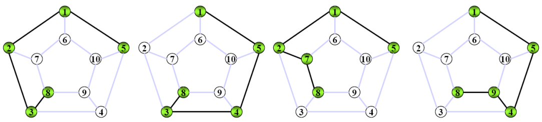
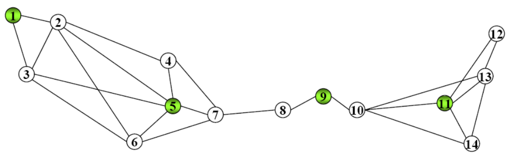


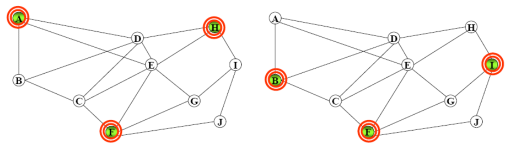
그림 8. DS_1 문제의 MCDS 해
Fig. 8. MCDS solution for DS_1 problem

III. 실험 및 결과 분석

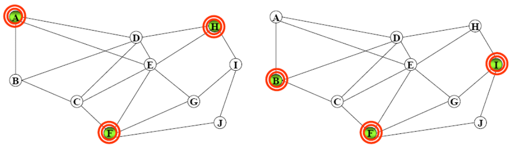
본 장에서는 그림 9의 9개 망에 대해 지배집합을 구하는 DS 알고리즘의 적용성을 평가해 본다. DS_2, DS_3는 Desrochers[4]에서, DS_4는 Schumacher[10]에서, DS_5는 Dejter와 Serra[12]에서, DS_6는 Yen[11]에서, DS_7은 Raghavan et al.[13]와 Wu와 Li[17]에서, DS_8은 Pathan과 Hong[5]에서, DS_9는 Chen과 Liestman [13,14]에서, DS_{10}은 Wu et al.[16]에서 인용되었다. 인용 논문의 해는 MIDS (또는 IDS)는 ●로, MDS (또는 DS)는 ◎로, MCDS (또는 CDS)는 □로 표기하였다.



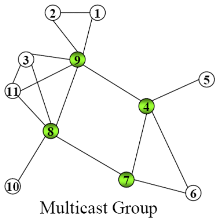
(a) DS_2



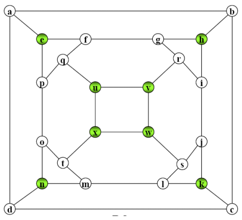
(b) DS_3



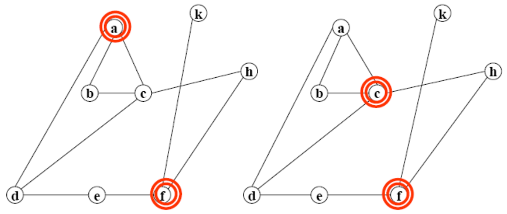
(b) DS_3



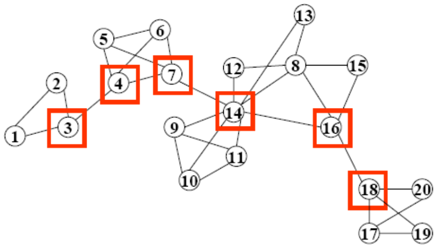
(c) DS_4



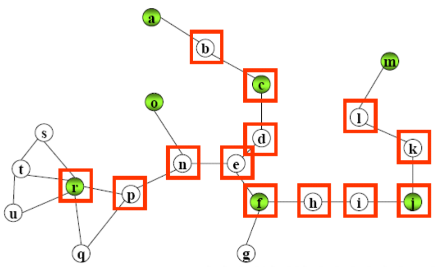
(e) DS_5



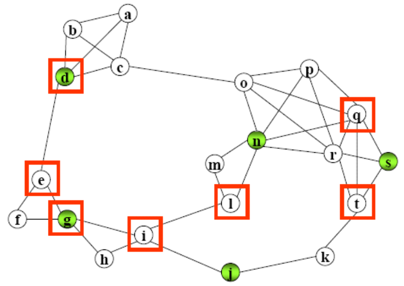
(d) DS_6



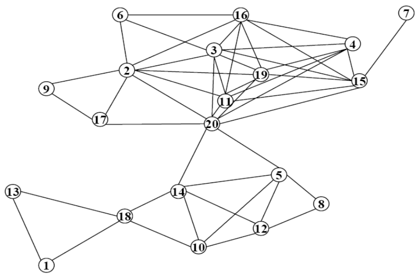
(f) DS_7



(g) DS_8



(h) DS_9



(i) DS_{10}

그림 9. 실험 데이터
Fig. 9. Experimental Data

그림 9의 9개 데이터에 대해 MIDS→MDS→MCDS 변환 과정을 수행한 결과는 각각 그림 10~그림 19에 제시하였다. 9개 그래프 모두에서 제안된 알고리즘은 MIDS, MDS와 MCDS의 해를 정확히 구하는데 성공하여 지배집합 문제가 NP-완전으로 근사 알고리즘만이 존재하는 것이 아니라 P-문제로 선형시간 알고리즘이 존재함을 알 수 있다.

$\delta(G)$	u	v	$\Delta(G)$	$MIDS$	V
2={1,8,9,12}	1	2(5),3(4)	2	{2}	{7,8,9,⋯,14}
1={7}	7	8(2)	8	{2,8}	{10,11,12,13,14}
2={12}	12	11(4),13(4),14(3)	11	{2,8,11}	{ϕ}

MIDS (u)	v			MDS		
	v	v_c	v_i	삭제	추가	MDS
2 8 11	{1,3,4,5,6} {7,9} {10,12,13,14}	{ϕ} {ϕ} {ϕ}	{1,3,4,5,6} {7,9} {10,12,13,14}	–	–	{2,8,11}

MDS (u)	u 인접정점 (v)		최대차수 w 인접정점 (x)			선택
	v	$v \setminus u$	w	x	$x \setminus \{u,v\}$	
2	{1,3,4,5,6}	{1,3,4,5,6}	5(5)	{2,3,4,6,7}	{7}	{5,7}
8	{7,9}	{7,9}	7(4)	{4,5,6}	{4,5,6}	{7,5}
11	{10,12,13,14}	{10,12,13,14}	10(4) 13(4)	{9,13,14} {10,12,14}	{9} {ϕ}	{10,9} –
MCDS	{2,5,7,8,9,10,11}					

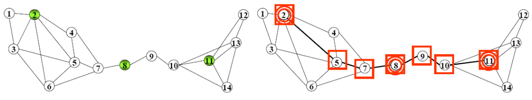


그림 10. DS_2 문제의 해
Fig. 10. Solution of DS_2 problem

$\delta(G)$	u	v	$\Delta(G)$	$MIDS$	V
2={J}	J	I(3),F(4)	F	{F}	{A,B,D,H,I}
1={I}	I	E(2)	H	{F,H}	{A,B}
1={A,B}	B A	A(1) B(1)	A B	{A,F,H} {B,F,H}	{ϕ}

MIDS (u)	v			MDS		
	v	v_c	v_i	삭제	추가	MDS
A F H	{B,D,E} {C,E,G,J} {D,E,G,I}	{D,E} {E,G} {D,E,G}	{E} {C,J} {I}	A – E	B – I	{A,F,H} {B,F,I}
E	$\{A,C,F,G,H\}$	$A \not\subseteq E, B \not\subseteq E, H \not\subseteq E$				

MDS (u)	u 인접정점 (v)			최대차수 w 인접정점 (x)			선택
	v	$v \setminus u$	v_c	w	x	$x \setminus \{u,v\}$	
A	{B,C,D,E}	{B,C,D,E}	E	–	–	–	E
F	{C,E,G,J}	{C,E,G,J}	E	–	–	–	
H	{D,E,G,I}	{D,E,G,I}	E	–	–	–	
MCDS	{A,E,F,H}						

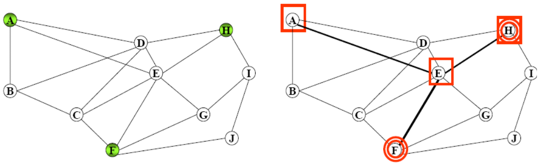


그림 11. DS_3 문제의 해

Fig. 11. Solution of DS_3 problem

$\delta(G)$	u	v	$\Delta(G)$	$MIDS$	V
1={5,10}	5	4(4)	4	{4}	{1,2,3,8,10,11}
1={1,2,10}	1	2(1)	2	{2,4}	{3,8,10,11}
1={10}	8	8(3)	8	{2,4,8}	{ϕ}

MIDS (u)	v				MDS		
	v	v_c	v_i	$\Delta(G)$	삭제	추가	MDS
2 4 8	{1,9} {5,6,7,9} {3,7,9,10,11}	{9} {7,9} {7,9}	{1} {5,6} {3,10,11}	9 9 9	2 – –	9 – –	{4,8,9}
9	{1,2,3,4,8,11}	$2 \subseteq 9, 4 \not\subseteq 9, 8 \not\subseteq 9$					

MDS (u)	u 인접정점 (v)			최대차수 w 인접정점 (x)			선택
	v	$v \setminus u$	v_c	w	x	$x \setminus \{u,v\}$	
{4,8,9}	4,8,9가 모두 연결된 그래프로 알고리즘 생략						–
MCDS	{4,8,9}						

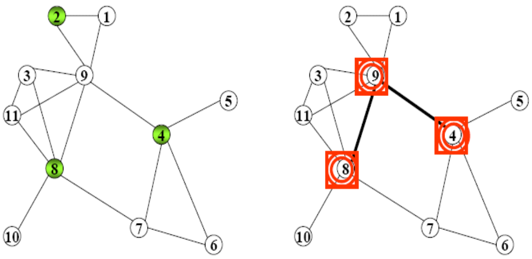


그림 12. DS_4 문제의 해

Fig. 12. Solution of DS_4 problem

$\delta(G)$	u	v	$\Delta(G)$	$MIDS$	V
3={a,b,⋯,w}	–	a(3)	a	{a}	{c,f,g,⋯,w}
1={c}	c	k(3)	k	{a,k}	{f,g,h,i,m,n,⋯,w}
1={s}	s	w(3)	w	{a,k,w}	{f,g,h,i,m,n,o,p,q,r,t,u}
1={u}	q	q(3)	q	{a,k,q,w}	{g,h,i,m,n,o,r,t}
2={g,h,i,r} 2={m,n,o,t}	g	h(2),r(2)	h	{a,h,k,q,w}	{m,n,o,r,t}
0={r}	–	r	r	{a,h,k,q,r,w}	{m,n,o,t}
2={m,n,o,t}	m	n(2),t(2)	n	{a,h,k,n,q,r,w}	{t}
0={t}	–	t	t	{a,h,k,n,q,r,t,w}	{ϕ}

MIDS (u)	v			MDS		
	v	v_c	v_i	삭제	추가	MDS
a h k n q r t w	{b,d,e} {b,g,i} {c,j,l} {d,m,o} {f,p,u} {g,i,v} {m,o,x} {s,v,x}	{b,d} {b,g,i} {ϕ} {d,m,o} {ϕ} {g,i,v} {m,o,x} {v,x}	{e} {ϕ} {c,j,l} {ϕ} {f,p,u} {ϕ} {ϕ} {s}	a – – – – – – w	e – – – – – – s	{e,h,k,n,q,r,s,t}

MDS (u)	u 인접정점 (v)		최대차수 w 인접정점 (x)				
	v	$v \setminus u$	w	x	$x \setminus \{u,v\}$	$x \in w$	선택
e	{a,f,p}	{a,f,p}	f	{e,g,q}	{g}	{g}	{f,g}
h	{b,g,i}	{b,g,i}	g	{f,h,r}	{f}	{f}	
k	{c,j,l}	{c,j,l}	j	{i,k,s}	{i}	{i}	{i,j}
r	{g,i,v}	{g,i,v}	i	{h,j,r}	{j}	{j}	
n	{d,m,o}	{d,m,o}	m	{l,n,t}	{l}	{l}	{m,l}
s	{j,l,w}	{j,l,w}	l	{k,m,s}	{m}	{m}	
q	{f,p,u}	{f,p,u}	p	{e,o,q}	{o}	{o}	{o,p}
t	{m,o,x}	{m,o,x}	o	{n,p,t}	{p}	{p}	
MCDS	4개중 3개 선택: {e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,q,r,s,t}						

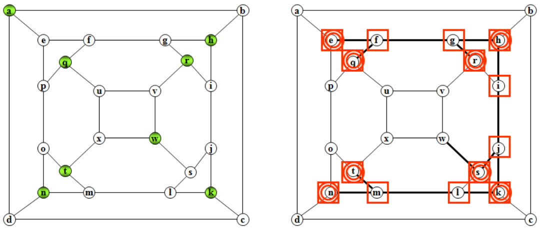


그림 13. DS_5 문제의 해

Fig. 13. Solution of DS_5 problem

$\delta(G)$	u	v	$\Delta(G)$	$MIDS$	V
1={k}	f	f(3)	f	{f}	{a,b,c,d}
2={b,d}	b	a(3→3),c(4→3)	c	{c,f}	{ϕ}

MIDS (u)	v			MDS		
	v	v_c	v_i	삭제	추가	MDS
c f	{a,b,d,h} {e,h,k}	{h} {h}	{a,b,d} {e,k}	–	–	{c,f}
h	{c,f}	$c \not\subseteq h, f \not\subseteq h$				

MDS (u)	u 인접정점 (v)			최대차수 w 인접정점 (x)			선택
	v	$v \setminus u$	v_c	w	x	$x \setminus \{u,v\}$	
c	{a,b,d,h}	{a,b,d,h}	h	–	–	–	h
f	{e,h,k}	{e,h,k}	h	–	–	–	
MCDS	{c,f,h}						

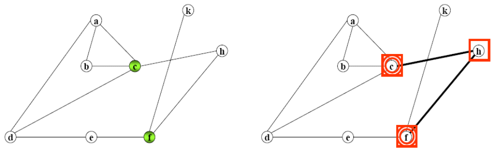


그림 14. DS_6 문제의 해

Fig. 14. Solution of DS_6 problem

$\delta(G)$	u	v	$\Delta(G)$	$MIDS$	V
2={1,2,12,13,15,19,20}	1	1(2),3(3)	3	{3}	{5,6,⋯,20}
2={5,6,12,13,15,19,20}	5	6(2),7(3)	7	{3,7}	{8,⋯,13,15,⋯,20}
1={12,13}	12	8(4)	8	{3,7,8}	{9,10,11,17,⋯,20}
2={9,10,11,19,20}	9	10(2),11(2)	10	{3,7,8,10}	{17,18,19,20}
2={19,20}	19	17(3→3),18 (4→3)	18	{3,7,8,10,18}	{ϕ}

MIDS (u)	v			MDS		
	v	v_c	v_i	삭제	추가	MDS
3 7 8 10 18	{1,2,4} {4,5,6,14} {12,13,14,15,16} {9,11,14} {16,17,19,20}	{4} {4,14} {14,16} {14} {16}	{1,2} {5,6} {12,13,15} {9,11} {17,19,20}	– – 8 10 –	– – 16 14 –	{3,7,14,16,18}
14 16	{7,8,⋯,13,16} {8,14,15,18}	$8 \subseteq \{14,16\}$ $10 \subseteq 14$				

MDS (u)	u 인접정점 (v)			최대차수 w 인접정점 (x)			
	v	$v \setminus u$	v_c	w	x	$x \setminus \{u,v\}$	선택
3	{1,2,4}	{1,2,4}	4	–	–	–	4
7	{4,5,6,14}	{4,5,6}	4	–	–	–	
18	{16,17,19,20}	{16,17,19,20}	{ϕ}	17	{18,19,20}	{ϕ}	–
MCDS	{3,4,7,14,16,18}						

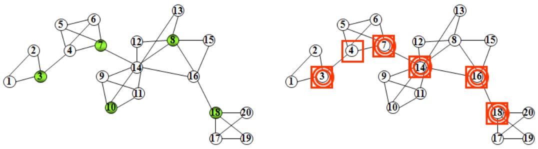


그림 15. DS_7 문제의 해

Fig. 15. Solution of DS_7 problem

$\delta(G)$	u	v	$\Delta(G)$	$MIDS$	V
1={a,g,m}	a	b(2)	b	{b}	{c,d,⋯,u}
1={d,g,m}	d	e(3)	e	{b,e}	{g,h,⋯.m,o,p,⋯,u}
0={g,o}	g,o	–	g,o	{b,e,g,o}	{h,i,⋯,m,p,q,⋯,u}
1={h,m}	h	i(2)	i	{b,e,g,i,o}	{k,l,m,p,q,⋯,u}
1={k,m}	k	l(2)	l	{b,e,g,i,l,o}	{p,q,⋯,u}
2={p,q,s,u}	p	r(5)	r	{b,e,g,i,l,o,r}	{ϕ}

MIDS (u)	v			MDS		
	v	v_c	v_i	삭제	추가	MDS
b	{a,c}	{ϕ}	{a,c}	–	–	{b,d,f,i,l,n,r}
e	{d,f,n}	{f,n}	{d}	e	d	
g	{f}	{f}	{ϕ}	g	f	
i	{h,j}	{ϕ}	{h,j}	–	–	
l	{k,m}	{ϕ}	{k,m}	–	–	
o	{n}	{ϕ}	{ϕ}	o	n	
r	{p,q,s,t,u}	{ϕ}	{p,q,s,t,u}	–	–	

MDS (u)	u 인접정점 (v)				최대차수 w 인접정점 (x)			선택
	v	$v \setminus u$	v_c	v_i	w	x	$x \setminus \{u,v\}$	
b	{a,c}	{a,c}	c	{a}	–	–	–	c
d	{c,e}	{c,e}	c,e	{ϕ}	–	–	–	e
f	{e,g,h}	{e,g,h}	e,h	{g}	–	–	–	h
i	{h,j}	{h,j}	h	{j}	–	–	–	–
l	{k,m}	{k,m}	{ϕ}	{k,m}	{k}	{j,l}	{j}	{k,j}
n	{e,o,p}	{e,o,p}	e,p	{o}	–	–	–	p
r	{p,q,s,t,u}	{p,q,s,t,u}	p	{q,s,t,u}	–	–	–	–
MCDS	{b,d,f,i,j,k,l,n,p,r}							

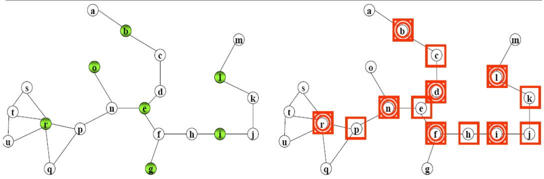


그림 16. DS_8 문제의 해

Fig. 16. Solution of DS_8 problem

$\delta(G)$	u	v	$\Delta(G$	$MIDS$	V
2={f,h,j,k}	f	e(3),g(4)	g	{g}	{a,b,c,d,j,k,l,⋯,t}
1={j}	j	k(2)	k	{g,k}	{a,b,c,d,l,m,⋯,s}
2={l}	l	m(2),n(6)	n	{g,k,n}	{a,b,c,d,s}
0={s}	–	s(0)	s	{g,k,n,s}	{a,b,c,d}
3={a,b,c,d}	a	b,c,d	d	{d,g,k,n,s}	{ϕ}

MIDS (u)	v			MDS		
	v	v_c	v_i	삭제	추가	MDS
d	{a,b,c,d}	{e}	{a,b,c}	–	–	{d,g,j,n,q}
g	{e,f,h,i}	{e}	{f,h,i}	–	–	
k	{j,t}	{t}	{j}	k	j	
n	{l,m,o,p,q,r}	{q,r}	{l,m,o,p}	–	–	
s	{q,r,t}	{q,r,t}	{ϕ}	s	q	

MDS (u)	u 인접정점 (v)				최대차수 w 인접정점 (x)			선택
	v	$v \setminus u$	v_c	v_i	w	x	$x \setminus \{u,v\}$	
d	{a,b,c,d}	{a,b,c,e}	e	{a,b,c}	–	–	–	e
g	{e,f,h,i}	{e,f,h,i}	e,i	{f,h}	–	–	–	i
j	{i,k}	{i,k}	i	{k}	–	–	–	–
n	{l,m,o,p,q,r}	{l,m,o,p,r}	{ϕ}	{l,m}	l	{i,m,n}	{i}	{i,l}
q	{n,o,p,r,s,t}	{o,p,r,s,t}	{ϕ}	{s,t}	t	{k,q,r,s}	{k}	–
MCDS	{d,e,g,i,j,l,n,q}							

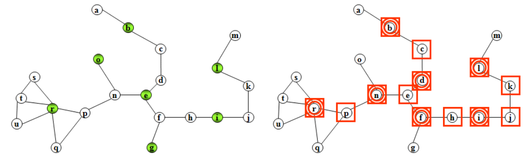


그림 17. DS_9 문제의 해

Fig. 17. Solution of DS_9 problem

$\delta(G)$	u	v	$\Delta(G)$	$MIDS$	V
1={7}	7	15(7)	15	{15}	{1,2,3,5,6,8,9,10,12,13,14 ,17,18}
2={1,3,8,9}	3	2(4),6(2)	2	{2,15}	{1,5,8,10,12,13,14,18}
2={1,8}	1	13(2),18(4)	18	{2,15,18}	{5,8,12}
2={5,8,12}	8	5(2),12(2)	5	{2,5,15,18}	{ϕ}

MIDS (u)	v			MDS		
	v	v_c	v_i	삭제	추가	MDS
2	{3,6,9,11,16,17,19,20}	{3,11,16,19,20}	{6,9,17}	–	–	{2,5,15,18}
5	{8,12,14,20}	{14,20}	{8,12}			
15	{3,4,7,11,16,19,20}	{3,11,16,19,20}	{4,7}			
18	{1,10,13,14}	{14}	{1,10,13}			
20	{2,3,4,5,11,14,15,17}	$2,5,15,18 \not\subseteq 20$				

MDS (u)	u 인접정점 (v)			
	v	$v \setminus u$	v_c	선택
2	{3,6,9,11,16,17,19,20}	{3,6,9,11,16,17,19,20}	{3,11,14,16,19, 20}	{20}
5	{8,12,14,20}	{8,12,14,20}	{14,20}	
15	{3,4,7,11,16,19,20}	{3,4,7,11,16,19,20}	{3,11,19,20}	
18	{1,10,13,14}	{1,10,13,14}	{14}	{14}
MCDS	{2,5,14,15,18,20}			

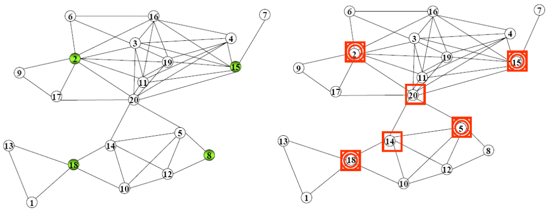


그림 18. DS_{10} 문제의 해

Fig. 18. Solution of DS_{10} problem

IV. 결론 및 향후 연구과제

지배집합 문제는 지금까지 정확한 해법을 다항시간에 찾는 알고리즘이 존재하지 않는 NP-완전 문제로 알려져 근사 알고리즘만을 연구하였다. 본 논문은 각 정점의 차수를 기준으로 MIDS를 구하고, MIDS로부터 MDS로 변환하는 방법과 MDS로부터 MCDS로 변환하는 알고리즘을 제안하였다. 제안된 알고리즘은 DS의 MIDS, MDS와 MCDS 모든 문제에 대해 정확한 해를 선형시간으로 구하는 알고리즘이 존재하여 지배

집합 문제가 NP-완전 문제가 아니라 P-문제임을 증명하였다. 따라서 제안된 알고리즘을 지배집합을 구하는 일반적인 알고리즘으로 적용할 수 있을 것이다.

본 논문은 데이터 부족으로 MCDS를 MWCDS로 변환하는 알고리즘을 제안하지 못하였다. 따라서 추후 다양한 데이터 수집으로 MWCDS까지 일관되게 정확한 해를 구하는 알고리즘을 연구할 계획이다.

참고문헌

〔1〕 Wikipedia, "Dominating Set," http://en.wikipedia.org/wiki/Dominating_set, 2013.

〔2〕 L. Ruan, H. Du, X. Jia, W. Wu, Y. Li, and K. I. Ko, "A Greedy Approximation for Minimum Connected Dominating Sets," Theoretical Computer Science, Vol. 329, No. 1-3, pp. 325-330, Dec. 2004.

〔3〕 M. A. Henning, C. Löwenstein, and D. Rautenbach, "Remarks about Disjoint Dominating Sets," http://www.tu-ilmenau.de/fakmn/fileadmin/template/fm/Preprints/Rautenbach/08_09_Rautenbach.pdf, 2008.

〔4〕 A. Desrochers, "Island Network Analysis: MSTs and Dominating Sets," Dept. of Mathematics, Saint Michael's College, Winooski Park Colchester, 2004.

〔5〕 A. S. K. Pathan and C. S. Hong, "A Key-Predistribution -Based Weakly Connected Dominating Set for Secure Clustering in DSN," IEEE International Conference on High Performance Computing and Communications (HPCC), Lecture Notes in Computer Science, Vol. 4208, pp. 270-279, Sep. 2006.

〔6〕 M. Garey and D. Johnson, "Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness," W. H. Freeman, 1979.

〔7〕 M. Pei, "Two Families of NP-Complete Problems," University of Waterloo, http://www.math.uwaterloo.ca/~mpei/mds.pdf, 2003.

〔8〕 F. Grandoni, "A Note on the Complexity of Minimum Dominating Set," Journal of Discrete Algorithms, Vol. 4, No. 2, pp. 209-214, Jun. 2006.

〔9〕 Y. Li, "Connected Dominating Sets in Wireless Networks," http://www.cs.umn.edu/research/mobile/seminar/SPRING04/WNfiles/p3.ppt, 2004.

〔10〕 A. Schumacher, "Dominating-set-based Routing in Ad Hoc Networks," http://www.cs.helsinki.fi/u/floreen/adhoc/schumacher_slides.pdf, 2003.

〔11〕 W. C. K. Yen, "Bottleneck Domination and Bottleneck Independent Domination on Graphs," Journal of Information and Engineering, Vol. 18, No. 2, pp. 311-331, Mar. 2002.

〔12〕 I. J. Dejter and O. Serra, "Efficient Dominating Sets in Cayley Graphs," Discrete Applied Mathematics, Vol. 129, No. 2-3, pp. 319-328, Aug. 2003.

〔13〕 V. N. Raghavan, A. Ranganath, R. N. Bharath, and M. F. Khan, "Simple and Efficient Backbone Algorithm for Calculating Connected Dominating Set in Wireless Adhoc Networks," International Journal of Electrical and Computer Engineering, Vol. 2, No. 11, pp. 732-739, Feb. 2007.

〔14〕 Y. P. Chen and A. L. Liestman, "Approximating Minimum Size Weakly-Connected Dominating Sets for Clustering Mobile Ad Hoc Networks," Proceedings of the 3rd ACM international symposium on Mobile ad hoc networking & computing and Computing (MOBIHOC'02), pp. 165-172, 2002.

〔15〕 Y. P. Chen and A. L. Liestman, "Maintaining Weakly-connected Dominating Sets for Clustering Ad Hoc Networks," Ad Hoc Networks, Vol. 3, No. 5, pp. 629-642, Sep. 2005.

〔16〕 J. Wu, M. Cardei, F. Dai, and S. Yang, "Extended Dominating Set and Its Applications in Ad Hoc Networks Using Cooperative Communication," Trans. on Parallel and Distributed Systems, Vol. 17, No. 8, pp. 1-14, Aug. 2006.

〔17〕 J. Wu and H. Li, "Domination and It's Application in Ad Hoc Wireless Networks with Undirectional Links," International Conference on Parallel Processing, pp. 189-197, Aug. 2000.

〔18〕 M. Morgan and V. Grout, "Optimisaion Techniques for Wireless Networks," Proceedings of 6th International Network Conference (INC 2006), pp. 339-346, Jul. 2006.
〔19〕 S. Butenko, X. Cheng, C. A. S. Oliveira, and P. M. Pardolos, "A New Heuristic for the Minimum Connected Dominating Set Problem on Ad Hoc Wireless Networks," Recent Developments in Cooperative Control and Optimization, Kluwer Academic Publishers, pp. 61-73, 2003.
〔20〕 J. Wu and W. Lou, "Extended Multipoint Relays to Determine Connected Dominating Sets in MANETs," Annual IEEE Communications Society Conference on Sensor and Ad Hoc Communications and Networks, pp. 621-630, Oct. 2004.
〔21〕 A. Wiese and E. Kranakis, "Local PTAS for Dominating and Connected Dominating Set in Location Aware Unit Disk Graphs," School of Computer Science, Carleton University, TR-07-17, 2007.
〔22〕 C. W. Yi, "Wireless Communication Optimization," Dept. of Computer Science, National Chiao Tung University, 2008.

저 자 소 개

이 상 운(Sang-Un, Lee)
1983년~1987년 :
한국항공대학교 항공전자공학과 (학사)
1995년~1997년 :
경상대학교 컴퓨터과학과 (석사)
1998년~2001년 :
경상대학교 컴퓨터과학과 (박사)
2003.3~현 재 :
강릉원주대학교 멀티미디어공학과 부교수
관심분야 : 소프트웨어 프로젝트 관리,
소프트웨어 개발 방법론,
소프트웨어 신뢰성,
그래프 알고리즘
e-mail : sulee@gwnu.ac.kr