Journal of The Korea Society of Computer and Information
Vol. 19, No. 5, May 2014

www.ksci.re.kr
http://dx.doi.org/10.9708/jksci.2014.19.5.019

평면의 채색수 알고리즘

이 상 운*

The Chromatic Number Algorithm in a Planar Graph

Sang-Un Lee*

요 약

본 논문은 평면상의 거리가 1인 인접 정점들에 대해 서로 다른 색을 칠할 경우 최대로 필요한 색인 채색수를 찾는 문제를 연구하였다. 지금까지 채색수 상한 값은 $4 \le \chi(G) \le 7$로 알려져 있으며, Hadwiger-Nelson은 $\chi(G) \le 7$, Soifer는 $\chi(G) \le 9$를 제안하였다. 먼저, 최소로 필요로 하는 채색수를 구하는 알고리즘을 제안하고, Hadwiger-Nelson의 정육각형 그래프를 대상으로 채색수를 구한 결과 $\chi(G)=3$이 될 수 있음을 보였다. Hadwiger-Nelson의 정육각형 그래프를 12개 인접 정점으로 가정할 경우 $\chi(G)=4$를 구하였다. 또한, Soifer의 8개 인접 정점 정사각형 그래프에 대해 채색수를 구한 결과 $\chi(G)=4$임을 보였다. 결국, 제안된 알고리즘은 최소차수 정점부터 색을 배정하는 단순한 다항시간 규칙을 적용하여 평면의 최대 채색수는 $\chi(G)=4$임을 제안한다.

▸ Keywords : 평면, 단위거리 그래프, 채색수, 차수

Abstract

In this paper, I seek the chromatic number, the maximum number of colors necessary when adjoining vertices in the plane separated apart at the distance of 1 shall receive distinct colors. The upper limit of the chromatic number has been widely accepted as $4 \le \chi(G) \le 7$, to which Hadwiger-Nelson proposed $\chi(G) \le 7$ and Soifer $\chi(G) \le 9$. I firstly propose an algorithm that obtains the minimum necessary chromatic number and show that $\chi(G)=3$ is attainable by determining the chromatic number for Hadwiger-Nelson's hexagonal graph. The proposed algorithm obtains a chromatic number of $\chi(G)=4$ assuming a Hadwiger-Nelson's hexagonal graph of 12 adjoining vertices, and again $\chi(G)=4$ for Soifer's square graph of 8 adjoining vertices. assert. Based on the results as such that this algorithm suggests the maximum chromatic number of a planar graph is $\chi(G)=4$ using simple assigned rule of polynomial time complexity to color for a vertex with minimum degree.

▸ Keywords : Plane, Unit Distance Graph, Chromatic number, Degree

•제1저자 : 이상운
•투고일 : 2014. 3. 12, 심사일 : 2014. 4. 7, 게재확정일 : 2014. 4. 22.
* 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 (Dept. of Multimedia Eng., Gangneung-Wonju National University)

I. 서 론

평면 (plane) 상에서 거리가 1인 정점들을 간선으로 연결하여 인접한 정점 간에는 다른 색을 칠할 경우, 최소로 요구되는 채색수 (chromatic number, $\chi(G)$) 상한값 (upper bound)은 몇 개인가? 이 문제의 해답은 알려져 있지 않으며, $4 \le \chi(G) \le 7$로 추정하고 있다[1-10]. 모든 단위거리 그래프 (unit distance graph)의 채색수 상한값은 $\chi(G)=4$이다[3]. 따라서 하한값 (lower bound)은 4가 된다. 상한값 (upper bound)에 대해 Hadwiger-Nelson[2,8,9]은 하나의 정점에서 단위거리 인접 정점이 6개가 되도록 각 변의 길이가 1인 정육각형을 바둑판 모양으로 짜맞추기 (tessellation 또는 tiling)하여 7개 정점에 서로 다른 색을 배정하여 $\chi(G)=7$임을 제안하였다.

본 논문은 Hadwiger-Nelson[2,8,9]이 제안한 정육각형 평면 그래프의 채색수는 $3 \le \chi(G) \le 4$임을 증명한다. 2장에서는 단위거리 그래프의 채색수와 Hadwidger-Nelson [2,8,9]이 제안한 채색수를 고찰해 본다. 3장에서는 최소 채색수를 찾는 알고리즘을 제안하고, 6개 정점이 거리가 1인 Hadwidger-Nelson[2,8,9] 그래프를 대상으로 최소 채색수가 $\chi(G)=3$임을 증명한다. 4장에서는 12개 정점이 거리가 1이 되도록 Hadwidger-Nelson[2,8,9] 그래프를 확장하여 최대 채색수를 구하여 보고, 정사각형의 8개 정점이 거리가 1인 Soifer[9] 그래프의 최대 채색수도 $\chi(G)=4$임을 증명한다. 따라서 평면의 단위거리 그래프의 최대 채색수는 $4 \le \chi(G) \le 7$이 아닌 $\chi(G)=4$임을 제안한다.

II. 관련연구와 연구 배경

Weisstein[3]은 그림 1의 단위거리 그래프들을 제시하고 있다. Claw, 4-ladder rung, square, domino, 6-cycle, 3-path, 6-star 등의 그래프들은 $\chi(G)=2$이다. diamond, triangle 등의 그래프는 $\chi(G)=3$이며, Moser spidle과 Golomb 그래프의 채색수는 4이다. 또한, 단위거리 그래프는 5-색을 필요로 하는 그래프가 존재하지 않아 평면의 최대 채색수는 기껏해야 4이다. 따라서 상한값 (upper bound)은 $\chi(G)=4$임을 증명하였다. 결국, 단위거리 그래프의 채색수 범위는 $2 \le \chi(G) \le 4$ 이다[11]. 여기서 평면이라 함은 유클리드 평면 (Euclidean plane, $\mathbb{R}2$)으로 무한대 (∞)임을 가정한다[4,5]. 따라서 그래프 $G=(V,E)$는 거리가 1인 모든 정점들 간에 간선이 연결된 평면상의 모든 정점을 가진 무한 그래프 (infinite graph)이다[6].

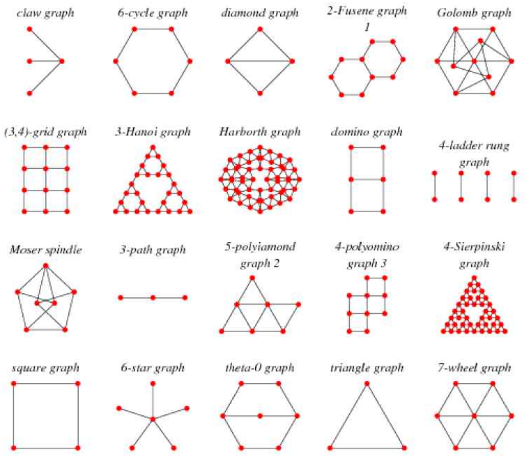


그림 1. 단위 거리 그래프
Fig. 1. Unit distance graph

Hadwiger-Nelson[2,8,9]은 그림 2와 같이 정육각형을 바둑판 모양으로 짜맞추기하여 1개 정점의 단위거리 인접 정점이 6개가 되는 경우, 7개 정점에 서로 다른 색을 배정하여 $\chi(G)=7$임을 제안하였다.

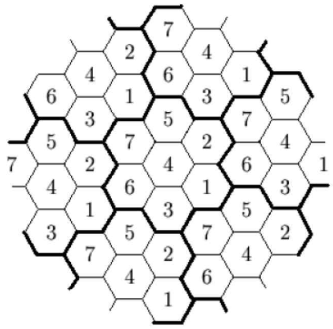


그림 2. Hadwiger-Nelson 그래프의 채색수 ($\chi(G)=7$)
Fig. 2. Chromatic number of Hadwiger-Nelson graph ($\chi(G)=7$)

그림 2 그래프에 대해, Kristiansen[12]은 $\chi(G)=4$임을 보였다. Erdös는 $\chi(G) \ge 5$라고 생각하였다[9]. Coulson[13]은 $\chi(G) \le 6$을 제안하였다. Hoffman과 Soifer[14]는 $\chi(G)=6$인 그래프가 존재함을 보였다. Soifer[9]는 $\chi(G) \le 7$과 $\chi(G) \le 9$를 제안하였다.

따라서 평면 단위거리 그래프의 채색수 상한 값에 대해서는 아직까지 미해결 문제로 남아 있다. 그래프의 채색과 관련하여 Lee[15]는 정점 색칠을, Lee[16]는 간선 색칠을, Lee[17]는 지도의 색칠에 관한 알고리즘을 제안하였다.

3장에서는 Hadwiger-Nelson[2,8,9]의 $\chi(G) \le 7$그래

프의 채색수는 $\chi(G)=3$이며, Soifer[9]의 $\chi(G) \le 9$그래프의 채색수는 $\chi(G)=4$임을 증명할 수 있는 알고리즘을 제안한다.

III. 평면 채색수 알고리즘

그래프의 최소 채색수를 찾는 알고리즘은 그림 3에 제시하였다. 제안된 알고리즘은 최소 차수 (minimum degree, $\delta(G)$)를 갖는 정점 u를 i번째 색 χ_i로 배정하고, u와 u에 이웃하는 정점 $N_G(u)$인 정점 v의 간선을 모두 제거하였을 때 남은 정점들 중에서 $\delta(G)$인 정점을 χ_i색으로 배정하면서 정점들이 없을 때까지 반복 수행한다. 만약, $\delta(G)$가 동일한 정점들이 다수 존재하면 χ_{i-1}색의 정점을 제거한 그래프에서 최대 차수 (maximum degree, $\Delta(G)$)인 정점을 선택한다.

$G_0 = (V_0, E_0), \chi_0 = \{\phi\}$.
for $i = 1$ to k
  $G_i = G_{i-1} \setminus C_{i-1}$.
  G_i의 각 정점 u의 차수 $d_G(u)$ 계산, $d_G(u) = d_G(u')$.
  while $|V| = 0$
    if $d_G(u')$의 $|\delta(G)| = 1$ then $\chi_i \leftarrow u$ ($\delta(G)$ 인 정점 u)
    else if $d_G(u')$의 $|\delta(G)| \ge 2$ then $\delta(G)$ 정점들 중 $d_G(u)$가 최대인 정점 u 선택,
      $\chi_i \leftarrow u$
      if $d_G(u)$가 최대인 정점 다수 존재 then
        임의의 정점 u 선택.
    u와 u 인접 정점 $N_G(u)$인 v 정점의 간선 삭제.
    G_i 각 정점 u의 차수 $d_G(u')$ 계산.
  return χ_i
next

그림 3. 최소 채색수 알고리즘
Fig. 3. Minimum Chromatic number algorithm

그림 2의 Hadwiger-Nelson[2,8,9] 그래프를 대상으로 그림 4와 같이 거리 1을 6개 인접 정점으로 가정하는 경우 제안된 알고리즘을 적용하여 최소 채색수를 구하여 본다.

그림 4에 대해 제안된 채색수 알고리즘을 적용하여 최소 채색수를 구한 결과는 그림 5에 제시되어 있다. (a)는 각 정점을 거리 1인 인접 정점들과 간선을 연결한 그림이며, (b)는 $\{R, G, B, Y, \cdots\}$의 색들 중 R색을 배정한 정점을, (c)는 G색을 (d)는 B색을 배정한 정점을 표현하고 있다.

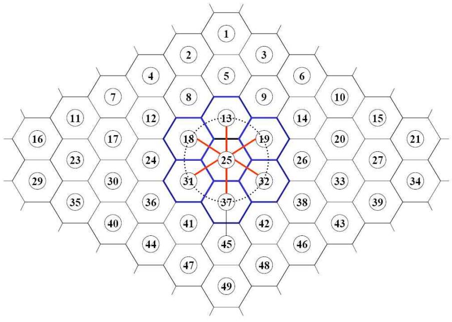
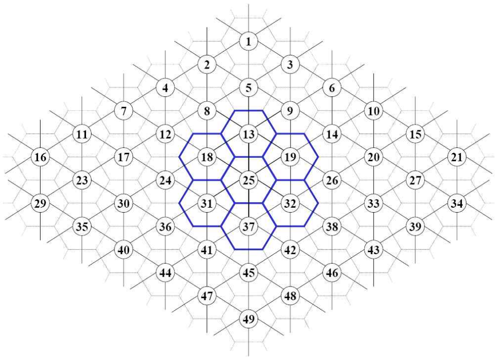
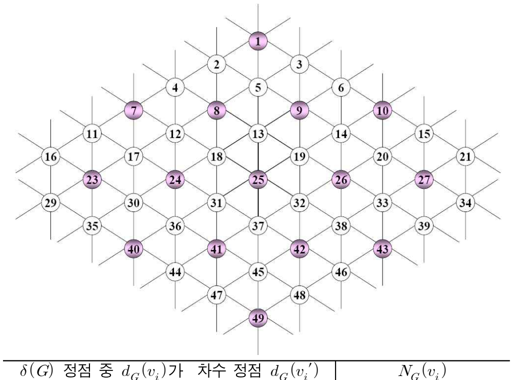


그림 4. Hadwiger-Nelson 실험 그래프
Fig. 4. experimental graph of Hadwiger-Nelson

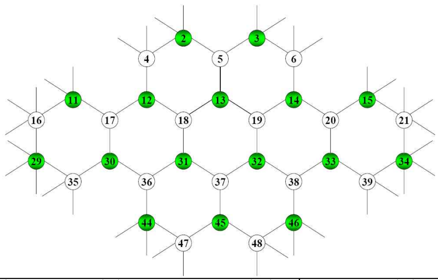


(a) 거리 1, 6개 인접 정점 간선 연결



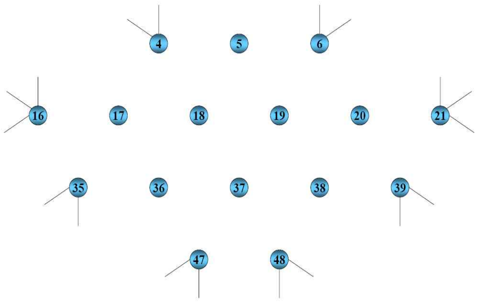
$\delta(G)$ 정점 중 $d_G(v_i)$가 차수 정점 $d_G(v_i')$	$N_G(v_i)$
$d_G(1)=6$	$\{2,3,5,\cdot,\cdot,\cdot\}$
$d_G(8)=4$	$\{4,12,13,18\}$
$d_G(9)=3$	$\{6,14,19\}$
$d_G(25)=3$	$\{31,32,37\}$
$d_G(24)=3$	$\{17,30,36\}$
$d_G(7)=3$	$\{11,\cdot,\cdot\}$
$d_G(23)=3$	$\{16,29,35\}$
$d_G(26)=3$	$\{20,33,38\}$
$d_G(10)=3$	$\{15,\cdot,\cdot\}$
$d_G(27)=3$	$\{21,34,39\}$
$d_G(40)=3$	$\{44,\cdot,\cdot\}$
$d_G(41)=2$	$\{45,47\}$
$d_G(42)=2$	$\{46,48\}$
$d_G(43)=2$	$\{\cdot,\cdot\}$
$d_G(49)=3$	$\{\cdot,\cdot,\cdot\}$
$R=\{1,8,9,25,24,7,23,26,10,27,40,41,42,43,49\}$	

(b) $\chi_1 = R$ 정점



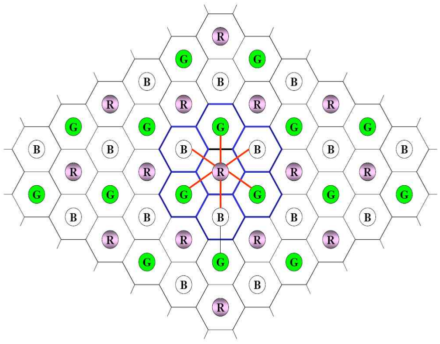
$\delta(G)$ 정점 중 $d_G(v_i)$가 차수 정점 $d_G(v_i')$	$N_G(v_i)$
$d_G(12)=3$	{4,17,18}
$d_G(13)=2$	{5,19}
$d_G(2)=2$	{·,·}
$d_G(14)=2$	{6,20}
$d_G(3)=2$	{·,·}
$d_G(30)=2$	{35,36}
$d_G(31)=1$	{37}
$d_G(32)=1$	{38}
$d_G(33)=1$	{39}
$d_G(45)=2$	{47,48}
$d_G(44)=2$	{·,·}
$d_G(46)=2$	{·,·}
$d_G(11)=3$	{16,·,·}
$d_G(15)=3$	{21,·,·}
$d_G(29)=3$	{·,·,·}
$d_G(34)=3$	{·,·,·}
$G=\{12,13,2,14,3,30,31,32,33,45,44,46,11,15,29,34\}$	

(c) $\chi_2 = G$ 정점



$d_G(v_i)=0:\{4,5,6,16,17,18,19,20,21,35,36,37,38,39,47,48\}$
$B=\{4,5,6,16,17,18,19,20,21,35,36,37,38,39,47,48\}$

(d) $\chi_3 = B$ 정점



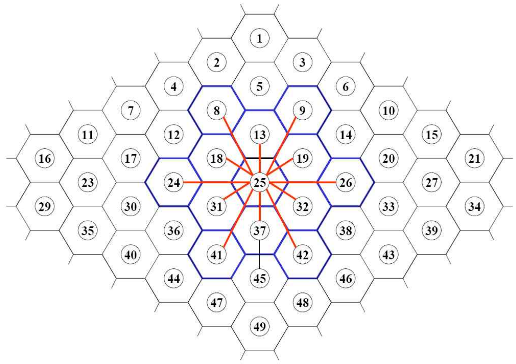
(e) 알고리즘 수행 결과 ($\chi(G)=3$)

그림 5. 6개 인접 정점 Hadwiger-Nelson 그래프 채색수
Fig. 5. 6 adjacent vertices chromatic number for Hadwiger-Nelson graph

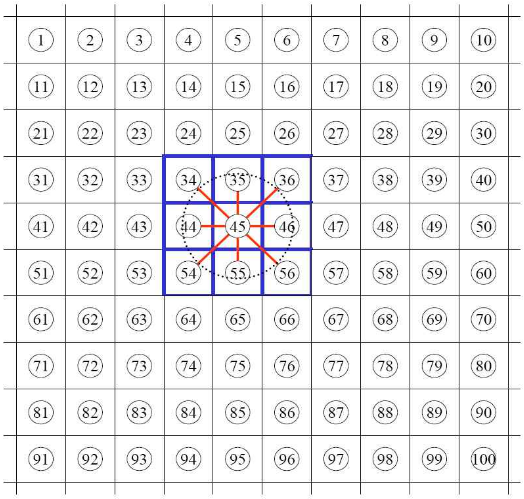
(e)는 각 정점에 색을 배정하여 표현한 그래프이다. 제안된 알고리즘을 적용한 결과 인접 정점들이 모두 다른 색으로 칠할 경우 3-색으로 가능함을 알 수 있다. 따라서 $\chi(G)=3$이다.

IV. 실험 및 결과 분석

본 장에서는 그림 6과 같이 거리 1 인접 정점을 12개로 가정한 정육각형 Hadwiger-Nelson[2,8,9] 그래프와 인접 정점이 8개인 정사각형 Soifer[9] 그래프를 대상으로 제안된 알고리즘을 적용하여 최소 채색수를 구하여 본다.



(a) 12개 인접 정점 정육각형 Hadwiger-Nelson 그래프

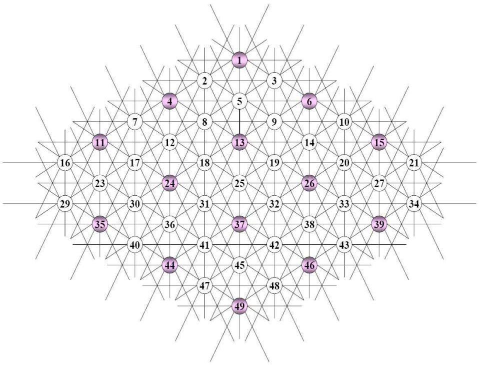


(b) 8개 인접 정점 정사각형 Soifer 그래프

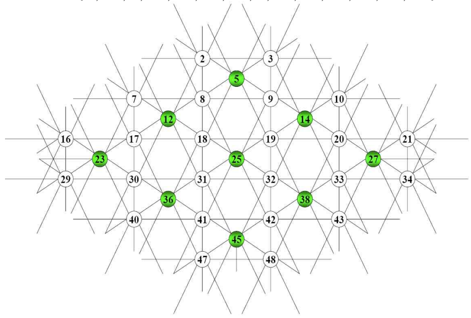
그림 6. 실험 그래프
Fig. 6. Experimental graph

왜냐하면 6각형의 한 변의 길이는 1로 가정하면 6각형의 각 꼭지점에서 거리가 1인 6각형이 6개 추가될 수 있기 때문

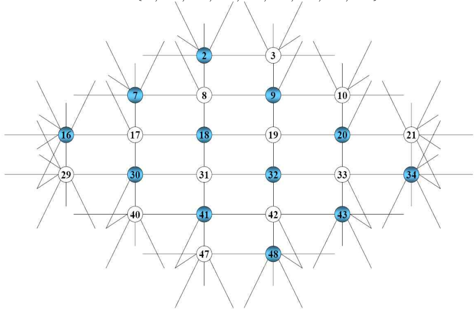
이다. 12개 인접정점 정육각형 Hadwiger-Nelson 그래프의 채색수는 그림 7에 제시되어 있으며, $\chi(G)=4$를 얻었다.



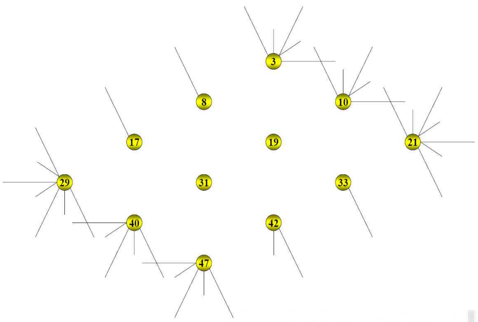
$R=\{1,13,4,24,37,44,26,6,46,11,35,15,39,49\}$



$G=\{5,25,12,36,14,38,45,23,27\}$



$B=\{18,32,9,20,30,41,2,7,43,48,34,16\}$



$Y=\{3,8,10,17,19,21,29,31,33,40,42,47\}$

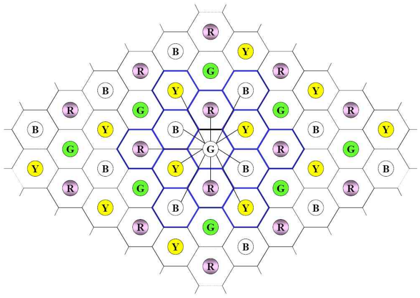
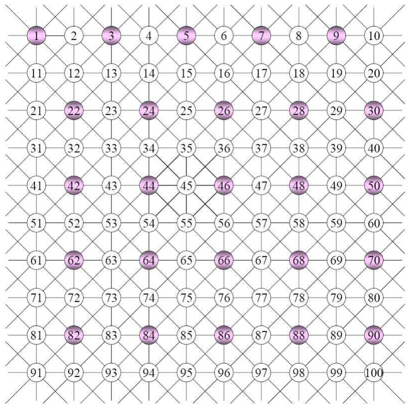
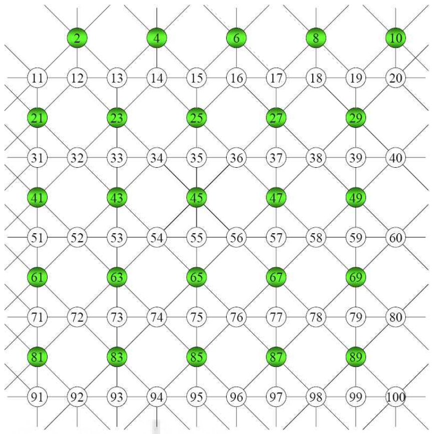


그림 7. 12개 인접 정점 Hadwiger-Nelson 그래프 채색수
Fig. 7. 12 adjacent vertices chromatic number for Hadwiger-Nelson graph

다음으로, 정사각형의 인접 정점이 8개인 Soifer 그래프를 대상으로 제안된 알고리즘을 적용하여 본 결과는 그림 8에 제시되어 있으며, $\chi(G)=4$를 얻었다.



$R=\begin{cases}1,3,22,24,26,5,7,28,9,30,42,44,46,48,50,\\68,70,82,84,86,88,90\end{cases}$



$G=\begin{cases}2,21,23,43,63,83,4,25,45,65,85,6,27,47,67,\\49,69,89,10,41,61,81\end{cases}$

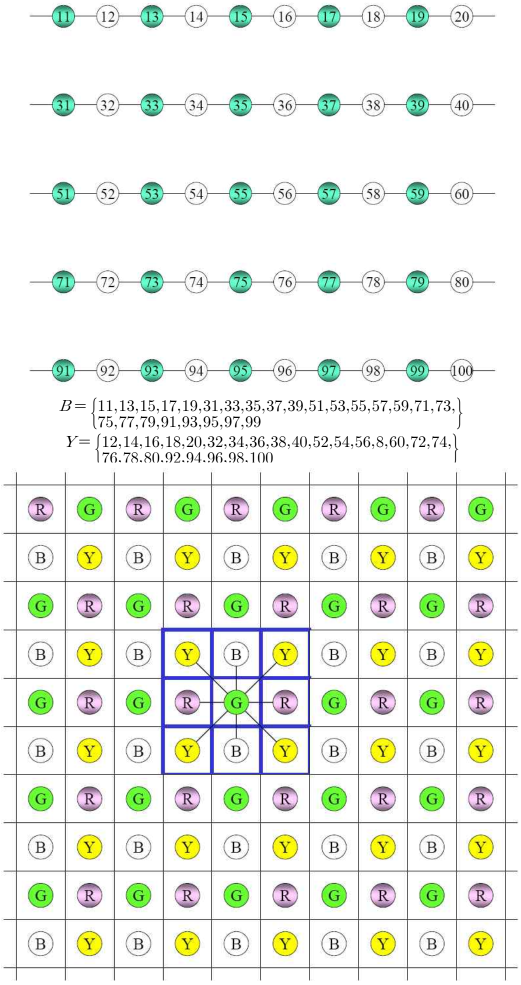


그림 8. Soifer의 8개 인접 정점 정사각형 그래프 채색수
Fig. 8. 8 adjacent vertices chromatic number for Soifer square graph

본 논문에서 거론된 Hadwiger-Nelson-6 그래프, Hadwiger-Nelson-12 그래프와 Soifer-8 그래프에 대해 최소 채색수에 대한 비교 결과는 표 1과 같다.

표 1. 최소 채색수 비교
Table 1. Compare with minimum chromatic numbers

연구 결과	그래프		
	Hadwiger-Nelson-6	Hadwiger-Nelson-12	Soifer-8
Hadwiger-Nelson	7	-	-
Kristiansen	4		
Erdös	5 이상	-	-
Coulson	6 이하	-	-
Hoffman & Soifer	6	-	-
Soifer	7 이하, 9이하	-	-
제안 알고리즘	3	4	4

V. 결론

본 논문은 평면상의 거리가 1인 인접 정점들에 대해 서로 다른 색을 칠할 경우 최대로 필요한 색인 채색수를 찾는 문제를 연구하였다. 지금까지 채색수 상한 값은 $4 \le \chi(G) \le 7$로 알려져 있으며, Soifer는 $\chi(G) \le 9$를 제안하였다.

먼저, 최소로 필요로 하는 채색수를 구하는 알고리즘을 제안하고, Hadwiger-Nelson의 6개 인접 정점 정육각형 그래프를 대상으로 채색수를 구한 결과 $\chi(G)=7$이 아닌 $\chi(G)=3$이 될 수 있음을 보였다. Hadwiger-Nelson의 6개 인접 정점 정육각형 그래프를 12개 인접 정점으로 가정할 경우에 대해 채색수를 구한 결과 $\chi(G)=4$를 구하였다. 또한, Soifer의 8개 인접 정점 정사각형 그래프에 대해 채색수를 구한 결과 $\chi(G) \le 9$가 아닌 $\chi(G)=4$임을 보였다. 결국, 평면의 최대 채색수 (상한 값)은 4이며, 최소 채색수 (하한값)은 2이다.

결론적으로, 본 논문은 최소 차수 정점부터 색을 배정하는 단순한 규칙을 적용한 결과 평면의 채색수는 $2 \le \chi(G) \le 4$인 결론을 얻었다. 따라서, 제안된 알고리즘은 평면의 채색수를 얻을 수 있는 다항시간 알고리즘을 제안하였으며, 본 알고리즘을 적용하면 지도나 평면에 색을 칠하는 게임 분야에 적용이 가능할 것이다.

참고문헌

[1] T. R. Jensen and B. Toft, "25 Pretty Graph Colouring Problems," Discrete Mathematics, Vol. 299, No. 1-3, pp. 167-169, Feb. 2001.
[2] Wikipedia, "Hadwiger-Nelson Problem," http://en.wikipedia.org/wiki/Hadwiger-Nelson_problem, Wikimedia Foundation Inc., 2014.
[3] E. W. Weisstein, "Hadwiger-Nelson Problem" http://mathworld.wolfram.com/Hadwiger-NelsonProblem.html, MathWorld, Wolfram Research, Inc., 2014.
[4] G. Exoo, "Epsilon Unit Distance Graphs," Discrete and Computational Geometry, Vol. 33, No. 1, pp. 117-124, Jan. 2005.
[5] M. Payne, "Unit Distance Colouring Problems," Bachelors Thesis, Monash University, 2007.
[6] D. Eppstein, "Geometric Graph Coloring Problems," Geometry Junkyard, http://www.

ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/geom-color.html, Jul. 2009.
[7] D. A. Meyer, "Coloring, Quantum Mechanics, and Euclid," Dept. of Mathematics, University of California/San Diago, Dec. 2003.
[8] H. Hadwiger, "Überdeckung des Euklidischen Raumes Durch Kongruentre Mengen," Portugal Mathematics, Vol. 4, pp. 238-242, 1945.
[9] A. Sofier, "The Mathematical Coloring Book: Mathematics of Coloring and the Colorful Life of Its Creators," Springer, 2009.
[10] L. Lovász, "Geometric Representations of Graphs," Institute of Mathematics, Eötvös Loránd University, Budapest, 2007.
[11] E. W. Weisstein, "Unit Distance Graph," http://mathworld.wolfram.com/UnitDistanceGraph.html, MathWorld, Wolfram Research, Inc., 2014.
[12] G. K. Kristiansen, "Unit Distance Graphs in a Hexagonal Geometry," http://home20.inet.tele.dk/krisma/unit_distance_graphs.htm, Mar. 2005.
[13] D. Coulson, "On the Chromatic Number of Plane Tilings," Journal of the Australian Mathematical Society, Vol. 77, pp. 191-196, Oct. 2004.
[14] I. Hoffman and A. Soifer, "Another Six-coloring of the Plane," Discrete Mathematics, Vol. 150, No. 1-3, pp. 427-429, Apr. 1996.
[15] S. U. Lee and M. B. Choi, "A Polynomial Time Algorithm for Vertex Coloring Problem," Journal of Korea Society of Computer Information, Vol. 16, No. 7, pp. 85-93, Jul. 2011.
[16] S. U. Lee, "A Polynomial Time Algorithm for Edge Coloring Problem," Journal of Korea Society of Computer Information, Vol. 11, No. 11, pp. 159-165, Nov. 2013.
[17] S. U. Lee, "The Four Color Algorithm," Journal of Korea Society of Computer Information, Vol. 18, No. 5, pp. 113-120, May. 2013.

저 자 소 개

이 상 운
1983년~1987년 :
한국항공대학교 항공전자공학과 (학사)
1995년~1997년 :
경상대학교 컴퓨터과학과 (석사)
1998년~2001년 :
경상대학교 컴퓨터과학과 (박사)
2003.3~현 재 :
강릉원주대학교
멀티미디어공학과 부교수
관심분야 : 소프트웨어 프로젝트 관리,
소프트웨어 개발 방법론,
소프트웨어 신뢰성,
그래프 알고리즘
e-mail : sulee@gwnu.ac.kr