Journal of The Korea Society of Computer and Information
Vol. 20, No. 2, February 2015
www.ksci.re.kr
http://dx.doi.org/10.9708/jksci.2015.20.2.063

도메틱 수 문제에 관한 최대차수 정점 지배집합 알고리즘

이 상 운*

Maximum Degree Vertex Domatic Set Algorithm for Domatic Number Problem

Sang-Un Lee*

요 약

최대 지배집합의 수인 도메틱 수 문제 (DNP)는 정확한 해를 다항시간으로 구하는 알고리즘이 존재하지 않아 NP-완전 문제로 알려져 있다. 본 논문은 DNP의 해를 다항시간으로 구하는 알고리즘을 제안하였다. 그래프의 최대 차수 $\Delta(G)$ 정점 v_i를 $D_i, i=1,2,\cdots,k$의 지배집합의 원소로 선택하는 방법을 적용하고, $V_{i+1}=V_i \setminus D_i$의 축소된 그래프에 대해 D_{i+1}을 구하였다. 또한 $V \setminus D_i = N_G(D_i)$로 D_i가 지배집합으로 되는지 여부를 검증하였다. 제안된 알고리즘을 15개의 다양한 그래프에 적용한 결과 정확한 해를 다항시간 복잡도 $O(kn)$으로 구하는데 성공하였다. 결국, 제안된 알고리즘은 도메틱 수 문제가 P-문제임을 보였다.

▸ Keywords : 지배집합, 연결 지배집합, 독립 지배집합, 차수, 도메틱 수

Abstract

In the absence of a polynomial time algorithm capable of obtaining the exact solutions to it, the domatic number problem (DNP) of dominating set (DS) has been regarded as NP-complete. This paper suggests polynomial-time complexity algorithm about DNP. In this paper, I select a vertex v_i of the maximum degree $\Delta(G)$ as an element of a dominating set $D_i, i=1,2,\cdots,k$, compute D_{i+1} from a simplified graph of $V_{i+1}=V_i \setminus D_i$, and verify that D_i is indeed a dominating set through $V \setminus D_i = N_G(D_i)$. When applied to 15 various graphs, the proposed algorithm has succeeded in bringing about exact solutions with polynomial-time complexity $O(kn)$. Therefore, the proposed domatic number algorithm shows that the domatic number problem is in fact a P-problem.

▸ Keywords : Dominating set, Connected DS, Independent DS, Degree, Domatic number

•제1저자 : 이상운
•투고일 : 2014. 10. 03, 심사일 : 2014. 11. 03, 게재확정일 : 2014. 12. 25.
* 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 (Dept. of Multimedia Eng., Gangneung-Wonju National University)

I. 서 론

n개 도시가 통신채널로 연결된 통신망에서, 하나의 전송그룹은 망에 있는 모든 도시들로 메시지를 전송할 수 있는 도시들의 부분집합이며, 전송그룹은 망에 있는 지배집합 (dominating set, DS)이 되며, 이 그룹의 도메틱 수 (domatic number)는 망에 있는 분리된 전송그룹들의 최대수가 되어야만 한다. 이 경우, 통신망을 효율적으로 운영하기 위해서는 도메틱 수를 찾아야만 한다.

그래프 $G=(V,E), v \in V, e=\{u,v\} \in E$에서 D에 존재하지 않는 모든 정점 $V \setminus D$이 D에 속한 정점들에 적어도 하나의 간선으로 연결 (인접, adjacent)되어 있는 V의 부분집합 $D \subseteq V$를 지배집합 (dominating set, DS)이라 한다[1-3].

지배집합 문제는 최소 DS를 찾는 MDS (minimum DS) 문제, 공통 원소를 갖지 않는 최소 독립 (independent, I) DS를 찾는 MIDS 또는 MDDS (disjoint DS) 문제, 최소 연결 (connected) DS를 찾는 MCDS 문제, 최소 빈약 연결 (weakly connected) DS를 찾는 MWCDS 문제가 있다 [1,3-5].

MCDS는 무선통신망, VLSI 설계분야에 많이 적용되고 있다. DS 문제는 1979년 Garey와 Johnson[6]이 NP-완전 문제로 제기한 이후 아직까지 정확한 해 (exact solution)를 다항시간으로 찾는 알고리즘이 존재하지 않고 있다[1,2,4,7,8].

DS 문제에서 k가 주어졌을 때 V를 공통원소를 갖지 않는 지배집합들 $D_1, D_2, \cdots, D_k$로 분할 (partition)하는 것을 도메틱 분할 (domatic partition)이라 하며, 도메틱 수 $(d(G), dn(G), dom(G))$는 k가 최대가 되는 최대 지배집합 수를 의미한다[9-11]. 즉, $D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_k = V$, $D_i, (i=1,2,\cdots,k)$ 이웃 (neighborhood)을 $N_G(D_i)$라면 $V \setminus D_i = N_G(D_i)$이다.

주어진 그래프에서 최소 차수 (minimum degree)를 $\delta(G)$, 최대 차수 (maximum degree)를 $\Delta(G)$라 하면, 일반적으로 $2 \leq dn(G) \leq \delta(G)+1$가 성립한다. $dn(G)$도 DS와 마찬가지로 NP-완전 문제이다[6].

본 논문은 k가 주어지지 않은 상태에서 $dn(G)$를 다항시간으로 찾는 알고리즘을 제안한다. 2장에서는 주어진 그래프에 대해 $dn(G)$의 개념을 고찰한다. 3장에서는 $dn(G)$를 다항시간으로 정확히 구하는 알고리즘을 제안한다. 4장에서는 다양한 그래프를 대상으로 제안된 알고리즘의 적용성을 평가해 본다.

II. 도메틱 수 개념

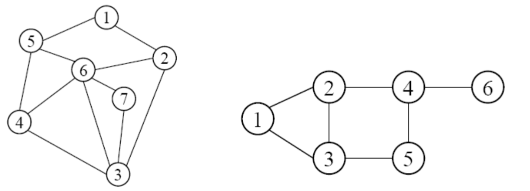
도메틱 분할은 그래프 $G=(V,E)$에서 V를 공통원소를 갖지 않는 지배집합들 $D_1, D_2, \cdots, D_k$로 분할하는 것이며, 도메틱 수 ($dn(G)$)는 k가 최대인 수를 의미한다. 따라서 $dn(G)$는 다음 조건을 만족해야 한다.

(1) $D_1, D_2, \cdots, D_k$모두 지배집합으로 $D_i, (i=1,2,\cdots,k)$의 이웃 $N_G(D_i)$에 대해, $V \setminus D_i = N_G(D_i)$가 성립한다.

(2) $D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_k = V$이며, $D_1 \cap D_2 \cap \cdots \cap D_k = \varnothing$으로 공통원소를 갖지 않는다.

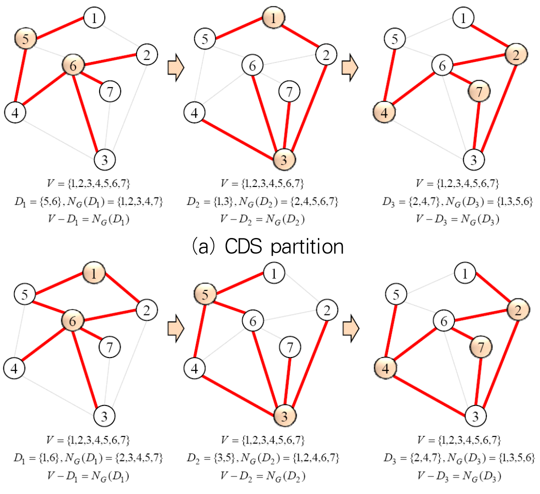
(3) $D_i, (i=1,2,\cdots,k)$ 집합 내에 속한 원소 (정점)들은 서로 간선들로 연결 (CDS)되어 있거나 독립적으로 존재 (IDS)하여도 무관하다

그림 1의 2개 그래프를 대상으로 $dn(G)$의 개념을 고찰해 본다. G_1과 G_2 그래프에 대해 CDS와 IDS로 분할한 결과는 그림 2와 그림 3에 제시되어 있다. G_1 그래프는 Wikipedia[9]의 도메틱 수에서, G_2 그래프는 Wikipedia[1]의 지배집합에서 인용되었다.



(a) G_1 그래프 (b) G_2 그래프

그림 1. 그래프
Fig. 1. Graph



(b) IDS partition

그림 2. G_1 그래프의 $dn(G_1)=3$
Fig. 2. $dn(G_1)=3$ of G_1 graph

G_1 그래프는 CDS와 IDS 모두 3개의 DS로 분할되어 $dn(G_1)=3$이 된다. G_2 그래프는 CDS와 IDS 모두 2개의 DS로 분할되어 $dn(G_2)=2$이다.

G_1 그래프의 $\delta(G)$는 ① 정점으로 $d_G(1)=2$이다. G_2 그래프의 $\delta(G)$는 ⑥ 정점으로 $d_G(6)=1$이다. 따라서 $2 \le dn(G) \le \delta(G)+1$이 성립한다.

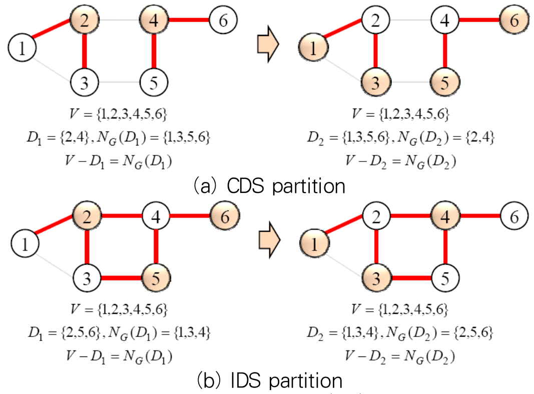


그림 3. G_2 그래프의 $dn(G_2)=2$

Fig. 3. $dn(G_2)=2$ of G_2 graph

G_2 그래프에서 $D_1=\{2,5\}, D_2=\{3,6\}$으로 분할 할 경우, D_3의 대상은 $\{1,5\}$이다. 그러나 $\{1,5\}$의 $N_G(1,5)=\{2,3,4\}$로 $\{6\}$을 인접 정점으로 갖지 못하여 $D_3 \ne \{1,5\}$이며, D_2에 포함되어야 한다. 결국, $D_1=\{2,5\}, D_2=\{1,3,5,,6\}$으로 $dn(G_2)=2$이다.

III. 최대차수 정점 지배집합 알고리즘

주어진 그래프 $G=(V,E)$에 대한 도메틱 수를 찾기 위해, 본 장에서는 최대차수 정점을 지배집합으로 결정하는 방법을 제안한다.

제안된 알고리즘은 $G=(V,E)$에서 각 정점 차수 $d_G(v_j)$를 계산하여 그래프의 최대차수 $(\Delta(G))$인 정점 v_i를 D_i에 넣고, v_i 정점, v_i 부속 간선인 $\{v_i, N_G(v_i)\}$과 $N_G(v_i)$ 들 간의 간선 $\{N_G(v_i), N_G(v_i)\}$을 삭제하면 $v_j \not\in N_G(v_i)$ 정점들과 $\{v_j, N_G(v_i)\}$들만 남는다. 여기서 $d_G(v_i)$가 최대 차수인 정점 v_i를 D_i에 넣는 방법으로 $v_j=\{\varnothing\}$이 될 때까지 수행한다.

$V=V \setminus D_i$에 대해 D_{i+1}을 구하면서 각 D_{i+1}에 대해 $V-D_{i+1}=N_G(D_{i+1})$이면 D_{i+1}를 확정하고, $V-D_{i+1} \ne N_G(D_{i+1})$와 $v_j \ne \{\varnothing\}$이면 D_{i+1} 정점을 v_i 대신 $N_G(v_i)$로 교환한다. 만약, $V-D_{i+1} \ne N_G(D_{i+1})$와 $v_j=\{\varnothing\}$이면 D_{i+1}을 D_i에 포함시킨다.

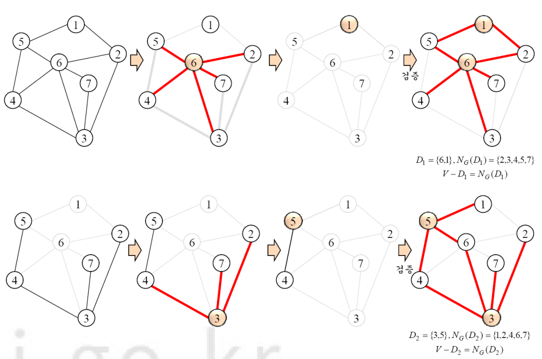
제안된 알고리즘을 최대차수 정점 지배집합 알고리즘(maximum degree vertex dominating set algorithm, MDVDSA)라 하며, 수행 복잡도 $O(kn)$인 다항시간으로 그림 4에 제시되어 있다.

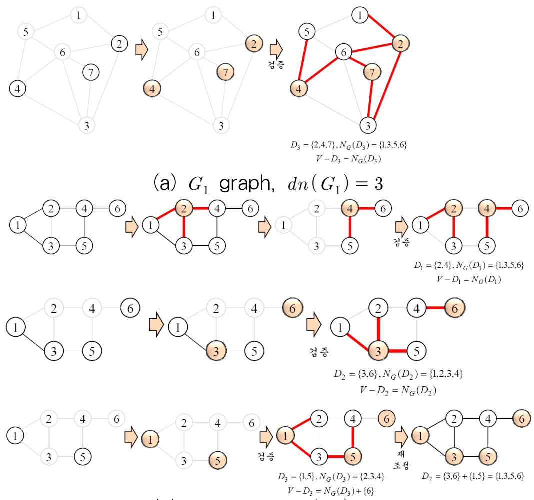
$G=(V,E), k=1$
각 정점 v_i의 차수 $d_G(v_i)$ 계산.
$\Delta(G)$ 정점 v_i 선택, $D_k=D_k+v_i$.
$V_k=v_j \not\in N_G(v_i)+\ \{v_j, N_G(v_i)\}$인 $N_G(v_i)$.
until $V_k=\{\phi\}$ do /* 수행 복잡도: $O(k)$ */
  until $v_j=\{\phi\}$ do /* 수행 복잡도: $O(n)$ */
    $d_G(v_i)$ 계산.
    $d_G(v_i)=0$ 정점 v_i 선택, $D_k=D_k+v_i$.
    if $|\Delta(G)| \ge 2$ then $v_j \not\in N_G(v_i)$ 정점 선택
    else if $|\Delta(G)|=1$ then 해당 정점 v_j 선택
    end
    $D_k=D_k+v_j$.
    $V_k=v_j \not\in N_G(v_i)+\ \{v_j, N_G(v_i)\}$인 $N_G(v_i)$.
  end
  if $V-(D_k+N_G(D_k))=\varnothing$ then
    $k=k+1$, $V_{k+1}=V_k \setminus D_k$.
  else if $V-(D_k+N_G(D_k)) \ne \varnothing$ and $v_j \ne \{\varnothing\}$ then
    v_i 대신 $\{v_j, N_G(v_i)\}$인 $N_G(v_i)$로 교환
  else if $V-(D_k+N_G(D_k)) \ne \varnothing$ and $v_j=\{\varnothing\}$ then
    $D_{k-1}=D_{k-1}+D_k$, D_k 삭제, $V_{k+1}=\{\phi\}$
  end
end
$dn(G)=k$.

그림 4. 최대 차수 정점 지배집합 알고리즘

Fig. 4. Maximum Degree Vertex Dominating Set Algorithm

그림 1의 G_1과 G_2 그래프에 대해 제안된 DNA를 적용한 결과는 그림 5에 제시되어 있다.





(a) G_1 graph, $dn(G_1)=3$

(b) G_2 graph, $dn(G_2)=2$

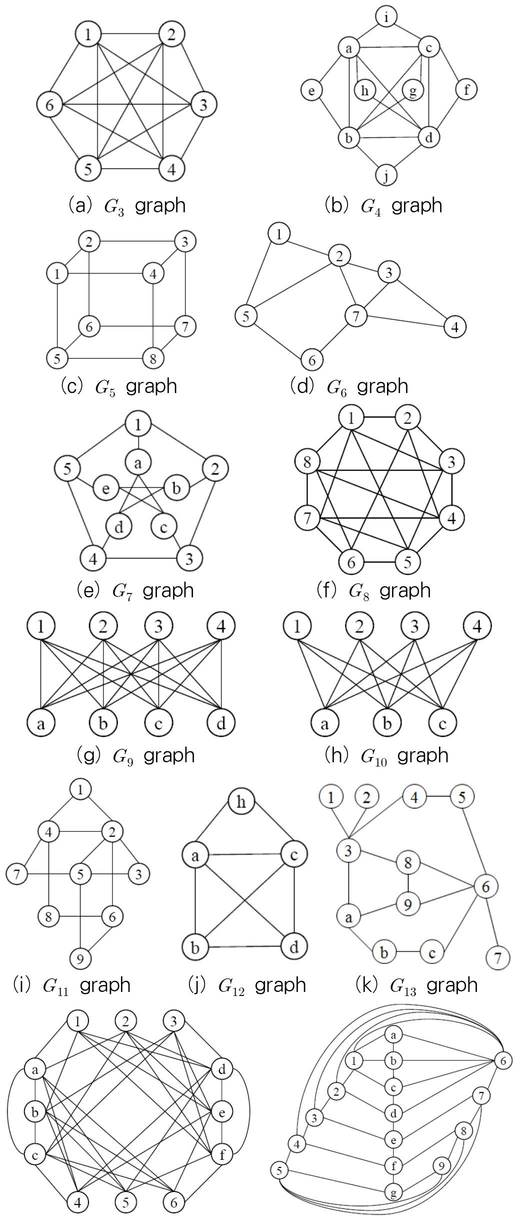
그림 5. MDVDSA의 도메틱 수
Fig. 5. Domatic number of MDVDSA

G_1에 대해 첫 번째로, 최대 차수 정점 v_6의 $d_G(v_6)=5$로 $\{v_5,v_4,v_2,v_7,v_3\}$을 커버하고 남은 정점은 v_1으로 최종적으로 얻은 지배집합은 $\{v_6,v_1\}$인 $dn(G_1)=2$의 도메틱 수를 얻는다. 두 번째로, $\{v_6,v_1\}$을 제외시킨 그래프에 대해 최대 차수 정점 v_3은 $d_G(v_3)=3$으로 $\{v_4,v_7,v_2\}$를 커버하고, 남은 정점들은 v_5가 $\{v_4,v_6,v_1\}$을 커버하여 지배집합 $\{v_3,v_5\}$인 $dn(G_1)=2$를 얻는다. 세 번째로, $\{v_6,v_1,v_3,v_5\}$를 제외시킨 그래프의 정점들 $\{v_4,v_7,v_2\}$에 대해 v_4는 $\{v_5,v_6\}$을, v_2는 $\{v_1,v_6,v_3\}$을, v_7은 $\{v_6,v_3\}$을 커버하여 지배집합 $\{v_4,v_7,v_2\}$로 $dn(G_1)=3$을 구하였다. 결론적으로, 최대 지배집합인 $\{v_4,v_7,v_2\}$로 도메틱 수 $dn(G_1)=3$의 해를 얻는다. G_2에 대해서도 동일한 방법으로 최대 지배집합을 가지는 $\{v_2,v_4\},\{v_3,v_6\},\{v_1,v_5\}$중 임의의 하나로 결정하면 $dn(G_2)=2$를 얻는다. 이 결과는 그림 2와 그림 3에서 얻은 도메틱 수와 동일한 결과임을 알 수 있다.

IV. 실험 및 결과 분석

본 장에서는 그림 6의 13개에 대한 다양한 종류의 그래프에 대해 도메틱 수를 구하는 MDVDSA의 적용성을 평가해 본다.

G_3는 K_6 완전 그래프이며, G_4는 Chordal 그래프로 Kaplan과 Shamir[12]에서, G_5는 Hypercube 그래프로 Pemmaraju와 Pirwani[13]에서, G_6은 평면 (planar) 그래프로 Moscibroda와 Wattenhofer[14]에서 인용되었다.



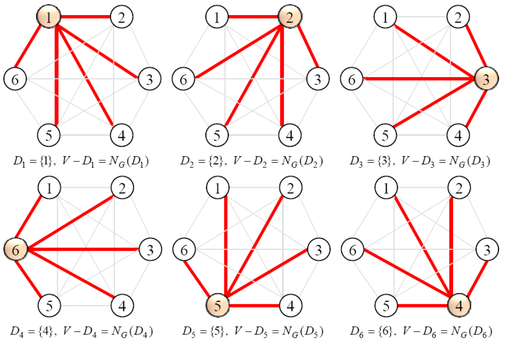
(a) G_3 graph (b) G_4 graph
(c) G_5 graph (d) G_6 graph
(e) G_7 graph (f) G_8 graph
(g) G_9 graph (h) G_{10} graph
(i) G_{11} graph (j) G_{12} graph (k) G_{13} graph
(l) G_{14} graph (m) G_{15} graph

그림 6. 실험 데이터
Fig. 6. Experimental data

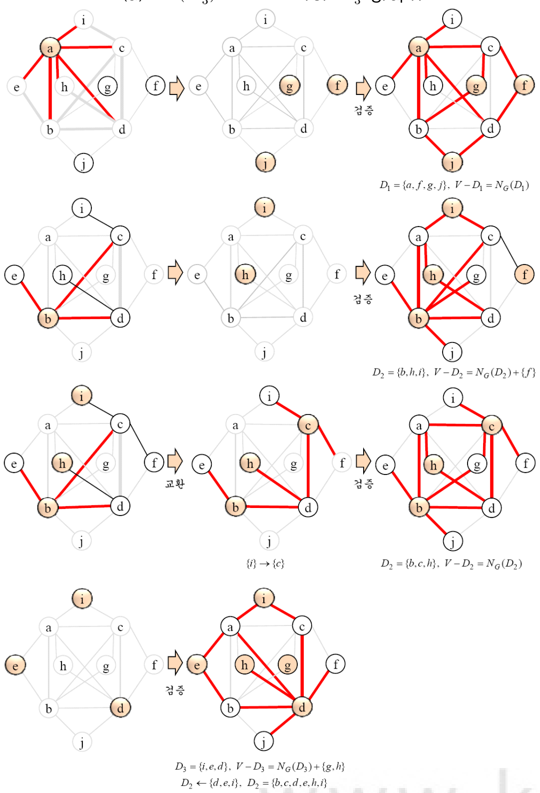
G_7는 Petersen 그래프로 정규 (regular) 그래프이며, 또한 모든 정점의 차수가 3으로 큐빅 (cubic) 그래프라고도 한다. G_8은 정규 그래프로 Hartnell과 Rall[15]에서 인용되었다. G_9은 $K_{4,4}$ 이분 (bipartite) 그래프로

Hedetniemi[10]와 Tsui, Yen과 Tang[16]에서, G_{10}은 $K_{4,3}$ 이분 (bipartite) 그래프로 Tsui, Yen과 Tang[16]에서, G_{11}는 Hedetniemi[10]에서, G_{12}는 평면 그래프로 Rothe[17]에서, G_{13}은 평면 그래프로 Simjour[18]에서, G_{14}는 Gadjet 연결 그래프로 Rothe[17]와 Riege와 Rothe[19]에서, G_{15}는 평면 그래프로 Hartnell과 Rall[15]에서 인용되었다.

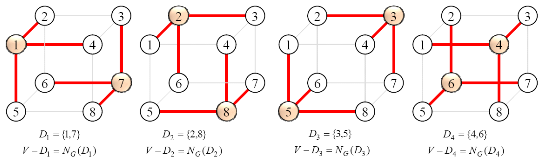
그림 6의 실험 데이터에 대해 제안된 알고리즘을 적용한 결과는 그림 7에 제시되어 있다.



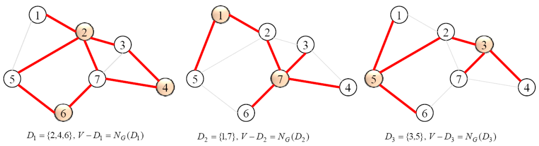
(a) $dn(G_3) = 6 = k$ for G_3 graph



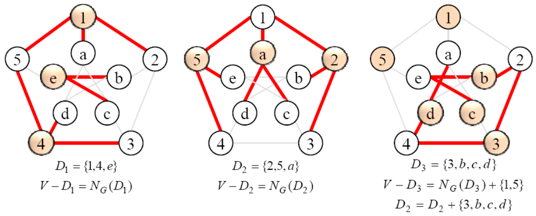
(b) $dn(G_4) = 2$ for G_4 graph



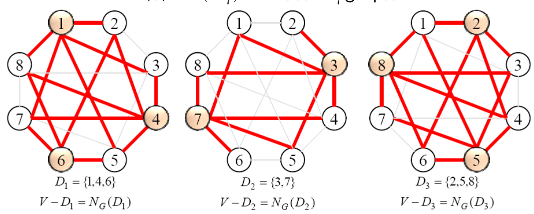
(c) $dn(G_5) = 4$ for G_5 graph



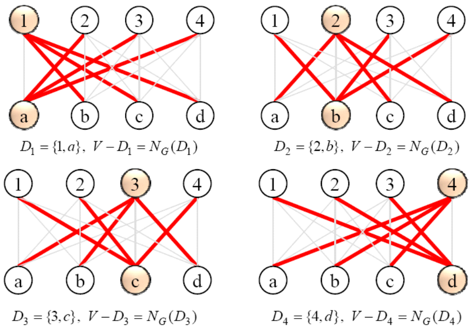
(d) $dn(G_6) = 3$ for G_6 graph



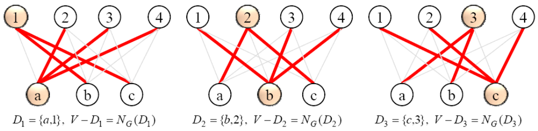
(e) $dn(G_7) = 2$ for G_7 graph



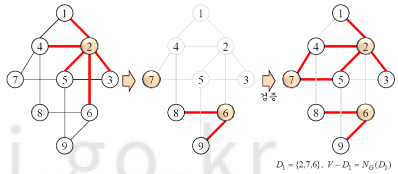
(f) $dn(G_8) = 3$ for G_8 graph

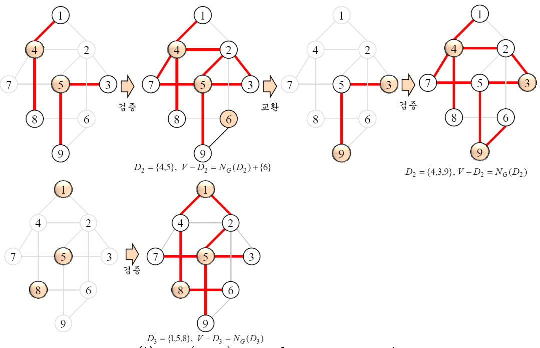


(g) $dn(G_9) = 4 = n, (K_{n,n})$ for G_9 graph

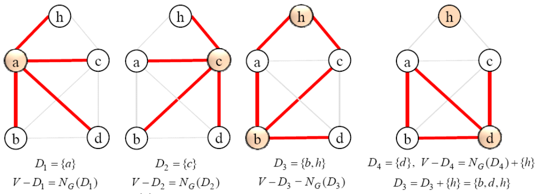


(h) $dn(G_{10}) = 3 = m, (K_{m,n}, m \le n)$ for G_{10} graph

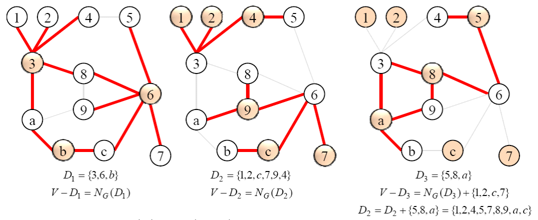




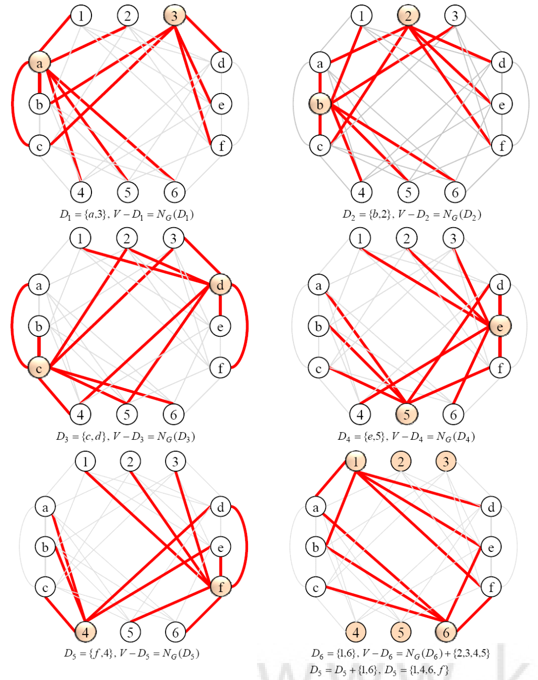
(i) $dn(G_{11})=3$ for G_{11} graph



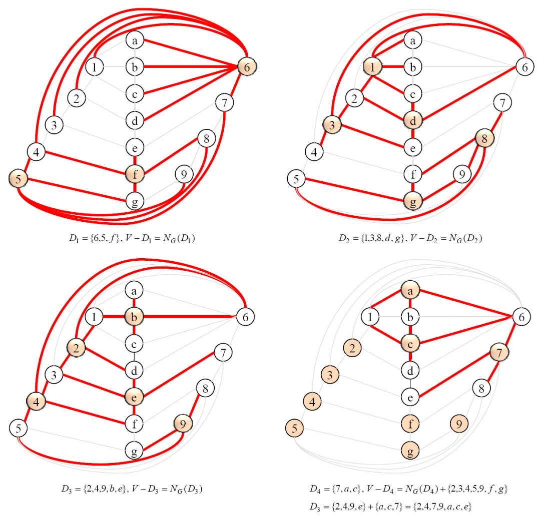
(j) $dn(G_{12})=3$ for G_{12} graph



(k) $dn(G_{13})=2$ for G_{13} graph



(l) $dn(G_{14})=5$ for G_{14} graph



(m) $dn(G_{15})=3$ for G_{15} graph

그림 7. MDVDSA의 도메틱 수

Fig. 7. Domatic number of MDVDSA

그림 7의 각 그래프에 대한 도메틱 수를 찾는 과정은 3장의 그림 5 설명 부분에서 거론된 관계로 생략한다.

본 논문에서 거론된 15개의 실험 데이터에 대해 제안된 MDVDSA를 적용한 결과 얻은 도메틱 수는 표 1에 제시되어 있다. 표에서, MDVDSA는 15개 데이터 모두에서 기존에 알려진 최적 해와 동일한 결과를 얻었음을 알 수 있다. 따라서, 제안된 알고리즘은 도메틱 수를 찾는 다항시간 알고리즘이 존재할 수 있음을 보였다.

표 1. 알고리즘 성능

Table 1. Algorithm performance

그래프	도메틱 수 (dn)		그래프	도메틱 수 (dn)	
	알려진 최적 해	MDVDSA		알려진 최적 해	MDVDSA
G_1	3	3	G_9	4	4
G_2	2	2	G_{10}	3	3
G_3	6	6	G_{11}	3	3
G_4	2	2	G_{12}	3	3
G_5	4	4	G_{13}	2	2
G_6	3	3	G_{14}	5	5
G_7	2	2	G_{15}	3	3
G_8	3	3			

V. 결론

그래프 $G=(V,E)$에 대해 V를 공통원소를 갖지 않는 지배집합들 $D_1,D_2,\cdots,D_k$로 분할하는 도메틱 분할에서 k가 최대 수가 되는 최대 지배집합 수인 도메틱 수 문제는 지금까지

정확한 해법을 다항시간에 찾는 알고리즘이 존재하지 않는 NP-완전 문제로 알려져 있다.

본 논문은 최대 차수를 가진 정점을 D_i에 포함시키는 단순한 방법으로 지배집합을 구하고, $V \setminus D_i = N_G(D_i)$에 대해 지배집합들을 계속적으로 구하는 방법으로 최대 원소를 가진 지배집합을 도메틱 수로 결정하는 방법으로 D_i의 지배집합 여부를 검증하였다.

도메틱 수에 대해 기존에는 다항시간 알고리즘이 제안되지 않은 관계로 제안된 알고리즘과의 유사점이나 차이점은 비교하지 못하였다. 다만, 제안된 알고리즘을 15개의 다양한 그래프들에 적용한 결과 정확한 해를 다항시간으로 구할 수 있음을 보였다.

결론적으로, 제안된 알고리즘을 적용하면 도메틱 수에 대한 최적 해를 다항시간으로 구할 수 있기 때문에, 도메틱 수 문제가 NP-완전 문제가 아니라 P-문제가 될 수 있음을 제시하였다.

제안된 알고리즘은 다양한 그래프들에 대해 검증한 관계로 도메틱 수를 구하는 실무분야에서 일반화된 알고리즘으로 적용할 수 있을 것이다.

REFERENCES

〔1〕 Wikipedia, “Dominating Set,” http://en.wikipedia.org/wiki/ Dominating_set, 2014.

〔2〕 L. Ruan, H. Du, X. Jia, W. Wu, Y. Li, and K. I. Ko, ″A Greedy Approximation for Minimum Connected Dominating Sets,″ Theoretical Computer Science, Vol. 329, pp. 325-330, 2004.

〔3〕 M. A. Henning, C. Lőwenstein, and D. Rautenbach, ″Remarks about Disjoint Dominating Sets,″ http://www.tu-ilmenau.de/fakmn/fileadmin/templete/fm/Preprints/Rautenbach/08_09_Rautenbach.pdf, 2008.

〔4〕 A. Desrochers, ″Island Network Analysis: MSTs and Dominating Sets,″ Dept. of Mathematics, Saint Michael′s College, Winooski Park Colchester, 2004.

〔5〕 A. S. K. Pathan and C. S. Hong, ″A Key-Predistribution- Based Weakly Connected Dominating Set for Secure Clustering in DSN,″ HPCC 2006, pp. 270-279, 2006.

〔6〕 M. Garey and D. Johnson, ″Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness,″ W. H. Freeman, 1979.

〔7〕 M. Pei, ″Two Families of NP-Complete Problems,″ University of Waterloo, http://www.math.uwaterloo.ca/~mpei/mds.pdf, 2003.

〔8〕 F. Grandoni, ″A Note on the Complexity of Minimum Dominating Set,″ Journal of Discrete Algorithms, Vol. 4, No. 2, pp. 209-214, 2006.

〔9〕 Wikipedia, “Domatic Number,″ http://en.wikipedia.org/wiki/Domatic_number, 2012.

〔10〕 S. T. Hedetniemi, ″Fundamentals of Domination in Graphs: Introduction to Domination Theory,″ Marcel Dekker, Inc., 1998.

〔11〕 P. Dankelmann and N. Calkin, ″The Domatic Number of Regular Graphs,″ Department of Mathematical Sciences, Clemson University, 2008.

〔12〕 H. Kaplan and R. Shamir, ″The Domatic Number Problem on Some Perfect Graph Families,″ School of Mathematical Sciences, Raymond and Beverly Sackler Faculty of Exact Sciences, Tel Aviv University, 1995.

〔13〕 S. Pemmaraju and I. Pirwani, ″Extending he Lifetime of Wireless Networks While Ensuring Coverage,″ Department of Computer Science, The University of Iowa, SIAM-DM, 2006.

〔14〕 T. Moscibroda and R. Wattenhofer, ″Maximizing the Lifetime of Dominating Sets,″ Computer Engineering and Networks Laboratory, ETH Zurich, Switerland, 19th IEEE International Parallel and Distributed Processing Symposium (IPDPS), 2005.

〔15〕 B. L. Hartnell and D. F. Rall, ″Connected Domatic Number in Planar Graphs,″ Czechoslovark Mathematical Journal, Vol. 51, No. 126, pp. 173-179, 2001.

〔16〕 K. W. Tsui, W. C-K. Yen, and C. Y. Tang, ″On The Domatic Number of Bipartite Permutation

Graphs," http://dspace.lib.fcu.edu.tw/ bitstream/2377/10710/1/CE07NCS002007000076.pdf,NCS, 2007.
[17] J. Rothe, "Exact-Four-Colorability, Exact Domatic Number Problems, and the Boolean Hierarchy," Institut fur Informatik, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, 2005.
[18] N. Simjour, "A New Optimality Measure for Distance Dominating Sets," Master of Mathematics, Computer Science, University of Waterloo, 2006.
[19] T. Riege and J. Rothe, "Complexity of the Exact Domatic Number Problem and of the Exact Conveyer Flow Shop Problem," Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, 2004.

저 자 소 개

이 상 운(Sang-Un, Lee)
1983년 ~ 1987년 :
한국항공대학교 항공전자공학과 (학사)
1995년 ~ 1997년 :
경상대학교 컴퓨터과학과 (석사)
1998년 ~ 2001년 :
경상대학교 컴퓨터과학과 (박사)
2003.3 ~ 현 재 :
강릉원주대학교 멀티미디어공학과 부교수
관심분야 : 소프트웨어 프로젝트 관리, 소프트웨어 개발 방법론, 소프트웨어 신뢰성, 그래프 알고리즘
e-mail : sulee@gwnu.ac.kr