Journal of The Korea Society of Computer and Information
Vol. 20, No. 3, March 2015 www.ksci.re.kr
http://dx.doi.org/10.9708/jksci.2015.20.3.069

대칭 램지 수의 실험적 증명

이 상 운*

Experimental Proof for Symmetric Ramsey Numbers

Sang-Un Lee *

요 약

본 논문은 램지 수에 대해 해결하지 못한 $43 \le R(5,5) \le 49$와 $102 \le R(6,6) \le 165$의 문제를 해결하였다. K_n 완전 그래프의 램지 수 $R(s,t)$는 임의의 정점 v의 $n-1$개 부속 간선수가 $(n-1)/2=R$과 $(n-1)/2=B$의 2가지 색으로 정확히 양분된다. 따라서 임의의 정점 v로부터 거리 개념을 적용하여 $\{K_L,v\}$의 $(n-1)/2=R$, $\{v,K_R\}$의 $(n-1)/2=B$색이 되도록 $K_n=K_L+v+K_R$분할 그래프를 형성하였다. 이로부터 K_L이 K_{s-1}의 R색을 형성하면 K_s를 얻을 수 있다. K_R이 K_{t-1}의 B색을 형성하면 K_t를 얻는다. K_L과 K_R의 최대 거리는 짝수와 모든 정점의 부속 간선 수는 동일하다는 필요충분조건을 만족시키는 $R(s,t)=K_n$을 구하였다. 결국, $R(5,5)=43$과 $R(6,6)=91$을 증명하였다.

▸ Keywords : 램지 수, 분할 그래프, 거리, 차수

Abstract

This paper offers solutions to unresolved $43 \le R(5,5) \le 49$and $102 \le R(6,6) \le 165$problems of Ramsey's number. The Ramsey's number $R(s,t)$ of a complete graph K_n dictates that $n-1$ number of incidental edges of a arbitrary vertex v is dichotomized into two colors: $(n-1)/2=R$ and $(n-1)/2=B$. Therefore, if one introduces the concept of distance to the vertex v, one may construct a partite graph $K_n=K_L+v+K_R$, to satisfy $(n-1)/2=R$ of $\{K_L,v\}$ and $(n-1)/2=B$ of $\{v,K_R\}$. Subsequently, given that K_L forms the color R of K_{s-1}, K_s is attainable. Likewise, given that K_R forms the color B of K_{t-1}, K_t is obtained. By following the above-mentioned steps, $R(s,t)=K_n$ was obtained, satisfying necessary and sufficient conditions where, for K_L and K_R, the maximum distance should be even and incidental edges of all vertices should be equal are satisfied. This paper accordingly proves $R(5,5)=43$ and $R(6,6)=91$.

▸ Keywords : Ramsey number, Partite graph, Distance, Degree

•제1저자 : 이상운
•투고일 : 2014. 12. 01, 심사일 : 2014. 12. 31, 게재확정일 : 2015. 01. 12.
* 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 (Dept. of Multimedia Eng., Gangneung-Wonju National University)

I. 서 론

램지 수 (Ramsey number) $R(s,t)$는 K_n-완전 그래프(complete graph)의 간선 수 $e(K_n)=n(n-1)/2$개를 대상으로 s와 t 두 명이 번갈아 가면서 자신의 색 (Red와 Blue)을 칠할 경우 K_s 또는 K_t중 어느 하나가 나오는 사람이 게임을 승리하는 경우이다. 따라서 램지 수 $R(s,t)$는 K_s 또는 K_t 중 어느 하나가 반드시 나올 수 있는 최소한의 K_n을 찾는 문제이다[1-12].

$R(3,3)=6, R(3,4)=9, R(4,4)=18$로 증명되었으며, $43 \le R(5,5) \le 49, 102 \le R(6,6) \le 165$는 정확한 값을 얻지 못하고 있다[3,5]. McKay와 Radziszowski[11]는 컴퓨터 프로그램을 적용한 그래프 생성 방법을 적용하여 $R(5,5)=43$을, Kunkel과 Ng[12]는 Tabu 탐색 방법을 적용하여 $R(5,5)=44$를 제시하였다. Bian et al.[13]은 $R(3,3)$과 $R(m,2), 4 \le m \le 8$을 얻는 알고리즘을 제안하였으며, Xiaodong et al.[14]는 램지 수의 하한값에 대한 연구를 수행하였다.

$R(5,5)=43$을 정확히 찾기 위해서는 $e(K_{43})=903$ 개 간선들의 절반인 452개 또는 453개를 동일한 색으로 칠하는 경우로, 모든 가능한 경우의 수는 식 (1)과 같다.

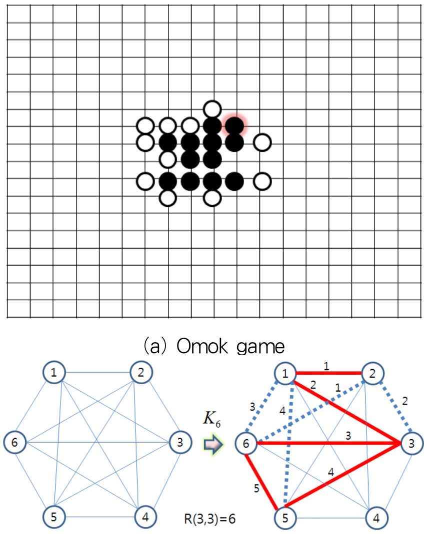
$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{1}$$

식 (1)을 적용하여 $\binom{903}{452}$ 을 계산하고 모든 경우 수에 대해 R 색의 K_5 또는 B색의 K_5중 어느 하나는 반드시 존재함을 보여야 한다. 따라서 현실적으로 증명이 불가능함을 알 수 있다.

본 논문은 $41 < R(5,5) \le 43$과 $89 < R(6,6) \le 91$을 제안한다. 2장에서는 $R(3,3)=6, R(3,4)=9, R(4,4)=18$의 램지 수를 고찰해 본다. 3장에서는 $R(5,5)$와 $R(6,6)$ 을 증명하는 방법을 제안한다. 4장에서는 제안된 방법을 적용하여 $R(5,5)=43$과 $R(6,6)=91$을 증명한다.

II. 관련 연구와 연구 배경

그림 1과 같이 $19 \times 19 = 361$바둑판에서 오목을 두는 경우와 램지수 게임을 비교하여 보자. 오목은 (a)와 같이 가로, 세로 또는 대각선의 간선이 교차하는 316개 정점들에 대해 백색 또는 흑색의 연속적인 5개 바둑알을 먼저 두는 사람이 승리한다. 이 경우 한 쪽이 막힌 4개와 막히지 않은 3개의 교차점 또는 양쪽이 모두 막히지 않은 3개와 3개의 교차점에 바둑알을 두면 승리한다. 여기서는 흑이 승리한 경우이다. 반면에, 대칭 램지수 $R(s,t), s=t$는 (b)와 같이 두 명이 번갈아 가면서 간선에 색을 칠하는 게임으로는 s는 적색 (R)을, t는 청색 (B)을 색칠할 경우 K_s 또는 K_t중 하나는 반드시 발생하여 게임을 승리할 수 있는 최소한의 K_n-완전 그래프를 찾는 문제이다. 즉, 오목의 바둑판 크기에 해당하는 K_n을 결정하는 문제이다. 여기서는 $R(3,3)=6$으로 s는 실선, t는 점선으로 색을 칠한 순서를 결정한 결과 s가 5회에서 K_3을 얻어 승리한 경우로 이는 K_6-완전 그래프 게임판으로 게임을 할 수 있음을 의미한다.



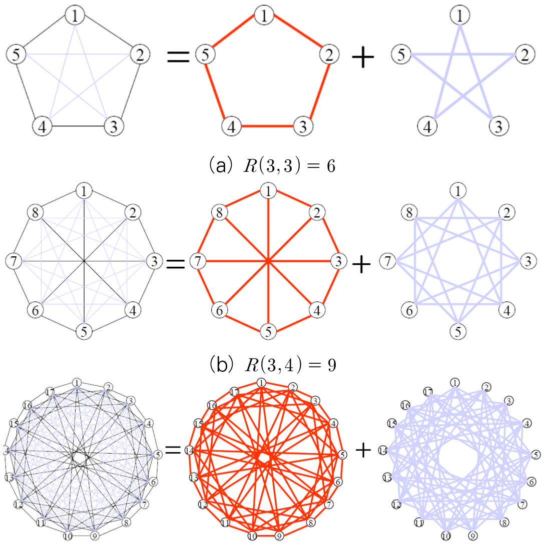
(a) Omok game
(b) $R(3,3)=6$ Ramsey game
그림 1. 오목과 램지수 게임
Fig. 1. Omok and Ramsey number game

그림 2는 Bondy와 Murty[15]가 $R(3,3)=6, R(3,4)=9, R(4,4)=18$이 됨을 설명한 그래프이다.

(a)는 K_5 그래프로 간선 수 $e(K_5)=10$ 개 중에서 2명이 각각 5개씩 선택할 경우, $K_s,(s=3)$과 $K_t,(t=3)$의 어느 하나도 존재하지 않는 경우이다. 따라서 $R(3,3)=6$으로 K_5에는 존재하지 않고, 최소한 K_6에는 존재함을 의미한다.

(b)는 $R(3,4)=9$에 대한 사례로, $e(K_8)=28$ 개 간선 중에서 $s=12$개, $t=16$개의 간선을 선택할 수 있다. 이를 바꾸어 말하면 28개 간선 중에서 $s=12$개의 간선을 선택하여 나머지 16개 간선들이 $K_t,(t=4)$가 되지 못하는 경우를 찾은

것이다. $R(3,4)=8$로는 $K_s,(s=3)$과 $K_t,(t=4)$ 모두를 얻지 못함을 알 수 있다.



(a) $R(3,3)=6$

(b) $R(3,4)=9$

(c) $R(4,4)=18$

그림 2. 램지 수 증명 사례

Fig. 2. Proofing examples of Ramsey Number

(c)는 $R(4,4)=18$에 대한 예로, $e(K_{17})=136$개 간선 중 $s=68$개, $t=68$개의 간선을 색칠할 경우, $K_s,(s=4)$와 $K_t,(t=4)$ 모두 얻지 못하는 경우이다.

지금까지 알려진 램지 수는 표 1에 제시되어 있다. $43 \le R(5,5) \le 49$이며, $102 \le R(6,6) \le 165$는 아직까지 미해결 문제로 남아 있다. 따라서 3장에서는 $R(s,t)$ 를 증명하는 방법을 제안하며, 이 증명 방법에 기반하여 4장에서는 $R(5,5)=43$과 $R(6,6)=91$을 제시한다.

표 1. 램지 수

Table 1. Ramsey number

s,t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		2	3	4	5	6	7	8	9	10
3			6	9	14	18	23	28	36	[40,43]
4				18	25	[35,41]	[49,61]	[56,84]	[73,115]	[92,149]
5					[43,49]	[58,87]	[80,143]	[101,216]	[125,316]	[143,442]
6						[102,165]	[113,298]	[127,495]	[169,780]	[179,1171]
7							[205,540]	[216,1031]	[233,1713]	[289,2826]
8								[282,1870]	[317,3583]	≤ 6090
9									[565,6588]	[580,12677]
10										[798,23556]

III. 대칭 램지 수 $R(s,t)$ 증명 방법

본 장에서는 K_n-완전 그래프를 식 (2)와 식 (3)의 분할 방법을 적용하여 $R(s,t)$를 증명한다.

$$K_{(n-1)/2} : 1 : K_{(n-1)/2} \text{ 분할, } s=t \text{ 대칭 램지수} \quad (2)$$

$$s:1:t \text{ 분할, } s \ne t \text{ 비대칭 램지수} \quad (3)$$

K_n 완전 그래프에서 C_n 사이클 그래프 (cycle graph)만을 고려하여 임의의 정점 v에서 $n-1$개의 각 정점까지의 경로길이를 거리로 치환하면 그림 3과 같이 거리 그래프 (distance graph)로 표현할 수 있다. 그림 3은 K_8에 대한 예로 v 정점에서 다른 모든 정점까지의 거리 d_i는 $1 \le d_i \le 4$가 존재한다.

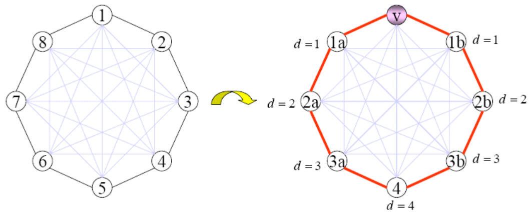
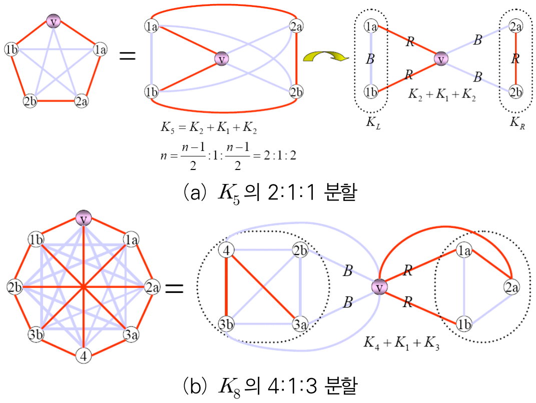


그림 3. K_8 거리 그래프

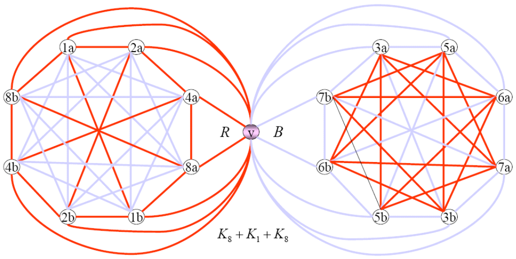
Fig. 3. K_8 distance graph

거리 그래프 개념을 적용하여 그림 2의 3개 그래프를 임의의 정점 v를 중심으로 좌측과 우측으로 분할하여 표현하면 그림 4와 같다.



(a) K_5의 2:1:1 분할

(b) K_8의 4:1:3 분할



(c) K_{17}의 8:1:8 분할
그림 4. 그래프 분할 방법
Fig. 4. Graph partition method

K_5 완전 그래프는 $1 \le d_i \le 2$가 존재하며, d_1의 간선 수 $e(d_1)$은 5개, d_2의 간선 수 $e(d_2)$는 5개이다. 10개 간선 중에서 $e(d_1)$을 s가, $e(d_2)$를 t가 선택한 경우이다. 이를 $s=\{d_1\}$, $t=\{d_2\}$ 로 표기하자. K_8 완전 그래프는 $e(d_1)=8, e(d_2)=8$, $e(d_3)=8, e(d_4)=4$이다. 여기서 $s=\{d_1,d_4\}, t=\{d_2,d_3\}$, 를 선택하여 간선수를 $3:4$로 분할한 경우이다. K_{17} 완전 그래프는 $s=\{d_1,d_2,d_4,d_8\}$을, $t=\{d_3,d_5,d_6,d_7\}$을 선택한 경우이다.

좌측 부분 그래프를 K_L, 우측 부분 그래프를 K_R이라 하자. $K_5=K_2+v+K_2$로, $K_8=K_4+v+K_3$으로, $K_{17}=K_8+v+K_8$로 분할된다.

그림 1의 3개 그래프 모두 임의의 정점 v의 간선 수 $n-1$개는 정확히 $R=(n-1)/2$와 $B=(n-1)/2$개로 양분된다. 이 방법으로 분할하면 $\{K_L,v\}$의 모든 간선들은 R색이 되며, $\{v,K_R\}$의 모든 간선들은 B색이 된다. 여기서 $\{K_L,K_R\}$ 간선들은 제외시켰다.

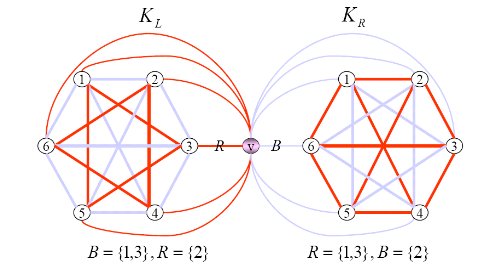
분할 그래프 방법은 K_{s-1}과 $\{K_{s-1},v\}$의 $s-1$개 간선이 동일한 색이면 K_s 색을 얻을 수 있다는 개념에 기반한다.

$5<R(3,3)\le 6$을 증명하여 보자. $K_5=K_2+v+K_2$로 K_L 2개 정점의 $\{1a,v\},\{1b,v\}$간선은 R과 B중 R색이, K_R 2개 정점의 $\{v,2a\},\{v,2b\}$간선은 B색이 배정된 상태이다. 따라서 남은 간선은 K_L의 $\{1a,1b\}$ 와 K_R의 $\{2a,2b\}$로 2개이다. 2개 간선 중 선택할 수 있는 경우 수 $(R,R),(R,B),(B,R),(B,B)$4가지 중 $(R,B),(B,R)$만이 가능하다. 만약, $\{1a,1b\}=R, \{2a,2b\}=B$이면 $(v,1a,1b)$는 R의 K_3이, $(v,2a,2b)$는 B 의 K_3이 형성되어 2가지 경우가 모두 나와 먼저 게임을 시작한 사람이 승리한다. 그러나 $\{1a,1b\}=B, \{2a,2b\}=R$이면 $(v,1a,1b)$는 R의 K_3가 형성되지 못하며, $(v,2a,2b)$는 B의 K_3가 형성되지 못하여 어느 누구도 게임을 이길 수 없다. 따라서 $5<R(3,3)\le 6$이 된다.

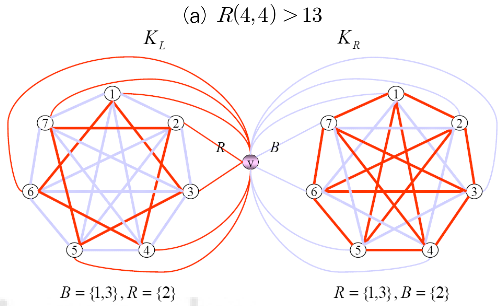
$K_7=K_3+1+K_3$으로는 항상 $R(3,3)$을 얻을 수 있다. 결국, $5<R(3,3)\le 7$이다. $R(s-1,t)+R(s,t-1)=R(s,t)$법칙을 적용하면 $R(2,3)+R(3,2)=R(3,3), R(2,3)=R(3,2)=3$으로 $R(3,3)=6$이 $5<R(3,3)\le 7$에 포함되어 $R(3,3)=6$을 얻는다.

$R(4,4)$를 증명하여 보자. 먼저, $R(3,3)+1+R(3,3)=K_6+v+K_6=K_{13}$으로 $R(4,4)$가 되지 않는 경우를 고찰해 보자. 얼핏 보면, K_6+v+K_6은 $R(4,4)$가 될 수 있을 것 같아 보인다. 왜냐하면 $\{K_L,v\}$의 6개 간선이 R색을, $\{v,K_R\}$의 6개 간선이 B색을 양분하여 배정되었고, K_L의 K_6로는 항상 $R(3,3)$으로 동일한 R색을 얻을 수 있으며, K_R의 K_6로 B색을 얻을 수 있다. 결국, 동일한 색의 K_3과 $\{K_3,v\}$의 3개 간선으로 K_4가 될 수 있기 때문이다. 그러나 이 경우는 K_L 또는 K_R의 어느 한 쪽만을 고려한 경우이다. 한쪽의 $e(K_6)=15$는 $e(d_1)=6, e(d_2)=6, e(d_3)=3$개가 존재하며, 양쪽을 고려하면 전체 간선 수는 30개이다. $\{K_L,v\}=R$과 $\{v,K_R\}=B$인 상태에서 동일한 색의 K_4 가 되지 못하도록 K_L에서 $R=\{d_2\}, B=\{d_1,d_3\}$을, K_R에서 $B=\{d_2\}, R=\{d_1,d_3\}$을 선택하면 R은 K_L에서 6개, K_R에서 9개로 총 15개를, B는 K_L에서 9개, K_R에서 6개로 총 15개를 선택하여 30개 간선을 정확히 양분하였다. 이 경우, K_L과 K_R 어느 하나도 R과 B의 K_4를 얻지 못한다. 따라서 K_{13}은 $R(4,4)$가 되지 못한다.

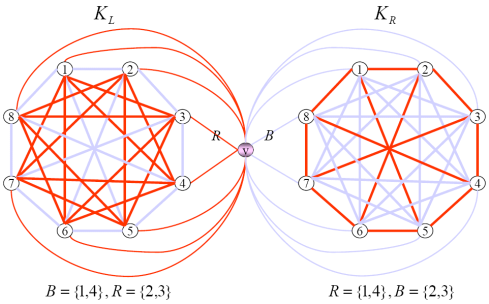
K_{13}, K_{15}, K_{17}이 $R(4,4)$가 되지 못하는 증명 결과는 그림 5에 제시되어 있다.



(a) $R(4,4)>13$



(b) $R(4,4)>15$



(c) $R(4,4) > 17$
그림 5. $R(4,4) = 18$증명
Fig. 5. Proof of $R(4,4) = 18$

$K_{15} = K_7 + K_1 + K_7, K_{17} = K_8 + K_1 + K_8$로 분할된다. 동일한 방법을 적용하면 K_{15}와 K_{17}도 $R(4,4)$를 얻지 못한다. 참고로, $K_n,(6 \le n \le 9)$의 거리별 간선은 표 2에 제시되어 있다.

표 2. $K_n,(6 \le n \le 9)$의 거리별 간선 수
Table 2. Edges per each distance for $K_n,(6 \le n \le 9)$

K_n	간선 수				
	$e(K_n)$	$e(d_1)$	$e(d_2)$	$e(d_3)$	$e(d_4)$
K_6	15	6	6	3	
K_7	21	7	7	7	
K_8	28	8	8	8	4
K_9	36	9	9	9	9

분할 그래프에서 다음 2가지 조건을 만족하면 대칭 램지 수 $R(s,t),(s=t)$를 얻을 수 있다.

(1) K_L과 K_R의 최대 거리 d_i는 짝수가 되어야 한다.

(2) 최대거리 d_i 정점의 부속 간선 수 (차수) $e(d_i)$는 d_{i-1} 거리의 정점 차수 $e(d_{i-1})$과 동일해야 한다. 즉, 모든 거리의 정점 부속 간선 수는 동일해야 한다.

결국, 분할 그래프로 $R(4,4)$를 얻기 위한 필요충분조건은 $K_9 + K_1 + K_9$로 $17 < R(4,4) \le 19$이다. 또한 $R(3,4) + R(4,3) = 18$이 $17 < R(4,4) \le 19$에 포함되어 $R(4,4) = 18$이다.

IV. 실험 및 결과 분석

먼저, $R(5,5)$를 구하여 보자. $R(4,4) + R(4,4) < R(5,5)$, $R(4,5) + R(5,4) < R(5,5),, R(4,5) = 25$이며, $43 \le R(5,5) \le 49$로 알려져 있다. 따라서 $36 < R(5,5) \le [43,49]$ 범위에서 구할 수 있다.

$K_{37} = K_{18} + K_1 + K_{18}, K_{39} = K_{19} + K_1 + K_{19}, K_{41} = K_{20} + K_1 + K_{20}, K_{43} = K_{21} + K_1 + K_{21}$이 된다. 표 3의 각 거리별 간선 수 법칙에 따르면 $K_{39} = K_{19} + K_1 + K_{19}$의 각 거리별 간선 수는 모두 동일하지만 최대 거리가 9인 홀수로 조건을 만족시키지 못한다.

표 3. $K_n,(18 \le n \le 21)$의 거리별 간선 수
Table 3. Edges per each distance for $K_n,(18 \le n \le 21)$

K_n	간선 수									
	$e(K_n)$	$e(d_1)$	$e(d_2)$	$e(d_3)$	$e(d_4)$	$e(d_5)$	$e(d_6)$	$e(d_7)$	$e(d_8)$	$e(d_9)$	$e(d_{10})$
K_{18}	153	18	18	18	18	18	18	18	18	9	0
K_{19}	171	19	19	19	19	19	19	19	19	19	0
K_{20}	190	20	20	20	20	20	20	20	20	20	10
K_{21}	210	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21

다음으로 최대거리는 짝수와 모든 거리의 정점 차수는 동일 조건을 만족하는 경우는 $K_{43} = K_{21} + K_1 + K_{21}$이다. 결국, $41 < R(5,5) \le 43$을 얻는다. $R(4,5) + R(5,4) = 50$이 $41 < R(5,5) \le 43$범위에 존재하지 않으므로 $R(5,5) = 43$이 된다.

$R(5,5) = 43$에 기반하여 $R(6,6)$을 구하여 보자. $R(5,5) + R(5,5) < R(6,6)$이며, $R(6,6) = [102,165]$로 알려져 있다. 따라서 $86 < R(6,6) \le [102,165]$범위에서 구할 수 있다. 표 4에 따르면 $K_L + v + K_R$에서 K_L과 K_R은 최대 거리는 짝수와 모든 거리 별 차수는 동일 조건을 만족하는 완전 그래프는 K_{45}이다. 따라서 $86 < R(6,6) \le 91$이다. $R(5,6) + R(5,6) = R(6,6), R(5,6) = [58,87]$로 $86 < R(6,6) \le 91$범위를 충족시키지 못하여 $R(6,6) = 91$이다.

표 4. $K_n,(43 \le n \le 45)$의 거리별 간선 수
Table 4. Edges per each distance for $K_n,(43 \le n \le 45)$

K_n	간선 수											
	$e(K_n)$	$e(d_1)$ $e(d_{12})$	$e(d_2)$ $e(d_{13})$	$e(d_3)$ $e(d_{14})$	$e(d_4)$ $e(d_{15})$	$e(d_5)$ $e(d_{16})$	$e(d_6)$ $e(d_{17})$	$e(d_7)$ $e(d_{18})$	$e(d_8)$ $e(d_{19})$	$e(d_9)$ $e(d_{20})$	$e(d_{10})$ $e(d_{21})$	$e(d_{11})$ $e(d_{22})$
K_{43}	903	43 43	43 43	43 43	43 43	43 43	43 43	43 43	43 43	43 43	43 43	43 0
K_{44}	946	44 44	44 44	44 44	44 44	44 44	44 44	44 44	44 44	44 44	44 44	44 22
K_{45}	990	45 45	45 45	45 45	45 45	45 45	45 45	45 45	45 45	45 45	45 45	45 45

V. 결론

본 논문은 1930년에 제시된 램지 수에 대해 아직까지 증명하지 못한 $43 \le R(5,5) \le 49$와 $102 \le R(6,6) \le 165$문제를 해결하였다.

증명방법은 K_n-완전 그래프의 램지 수 $R(s,t)$는 임의의 정점 v의 $n-1$개 간선 수를 $(n-1)/2 = R$과 $(n-1)/2 = B$의 2가지 색으로 정확히 양분한다는 법칙을 적용하였다. 임의의 정점 v로부터 거리 개념을 적용하여 $K_n = K_L + v + K_R$의

분할 그래프를 형성하고 $K_s = K_{s-1} + (n-1)/2, K_t = K_{t-1} + (n-1)/2$로 구하였다. $R(s,t) = K_n$이 되기 위한 K_L과 K_R의 최대 거리는 짝수와 모든 정점의 부속 간선 수는 동일 조건을 만족시켰다. 결국, $R(5,5)=43$과 $R(6,6)=91$을 증명하였다. 이는 K_5-완전 그래프를 먼저 생성할 수 있는 램지 수 게임을 하기 위해서는 K_{43}-완전 그래프 게임 판을, K_6-완전 그래프를 먼저 생성할 수 있는 램지수 게임을 하기 위해서는 K_{91}-완전 그래프 게임 판을 준비해야 함을 증명하였다. 즉, $43 \le R(5,5) \le 49$을 $R(5,5)=43$으로 확정시킬 수 있었으며, $102 \le R(6,6) \le 165$을 $R(6,6)=91$로 감소시켰다.

REFERENCES

[1] F. P. Ramsey, "On a Problem of Formal Logic," Proceedings of London Mathematics, Series 2, Vol. 30, pp. 264-286, 1930.

[2] Wikipedia, "Ramsey Theory," http://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey_theory, Wikimedia Foundation Inc., 2014.

[3] Wikipedia, "Ramsey's Theorem," http://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey's_theorem, Wikimedia Foundation Inc., 2014.

[4] E. W. Weisstein, "Ramsey's Theorem" http://mathworld.wolfram.com/RamseysTheorem.html, MathWorld, Wolfram Research, Inc., 2014.

[5] E. W. Weisstein, "Ramsey Number" http://mathworld.wolfram.com/RamseyNumber.html, MathWorld, Wolfram Research, Inc., 2014.

[6] Wikipedia, "Theorem on Friends and Strangers," http://en.wikipedia.org/wiki/Theorem_on_friends_and_strangers, Wikimedia Foundation Inc., 2014.

[7] Wikipedia, "Pigeonhole Principle," http://en.wikipedia.org/wiki/Pigonhole_principle, Wikimedia Foundation Inc., 2014.

[8] G. E. W. Taylor, "Ramsey Theory," School of Mathematics, The University of Birmingham, 2006.

[9] Math Explorers' Club, "How to Play Ramsey Graph Games," Math Explorers' Club, Cornell Department of Mathematics, 2004.

[10] I. Leader, "Friends and Strangers," Millenium Mathematics Project, University of Cambridge, 2001.

[11] B. D. McKay and S. P. Radziszowski, "Subgraph Counting Identities and Ramsey Numbers," Journal of Combinatorial Theory, Series B, Vol. 69, No. 2, pp. 193-209, Mar. 1997.

[12] C. J. Kunkel and P. Ng, "Ramsey Numbers: Improving the Bounds of R(5,5)," Midwest Instruction and Computing Symposium (MICS), 2003.

[13] Z. Bian, F. Chudak, W. G. Macready, L. Clark, and F. Gaitan, "Experimental Determination of Ramsey Numbers," Physical Review Letters, Vol. 111, No. 13, pp. 1-6, Sep. 2013.

[14] X. Xiaodong, X. Zheng, G. Exoo, and S. P. Radziszowski, "Constructive Lower Bounds on Classical Multicolor Ramsey Numbers," Electronic Journal of Combinatorics, Vol. 11, No. 1, pp. 1-24, Jan. 2004.

[15] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, "Graduate Texts in Mathematics: Graph Theory," Springer-Verlag, 2006.

저 자 소 개

이 상 운(Sang-Un, Lee)
1983년 ~ 1987년 :
한국항공대학교 항공전자공학과 (학사)
1995년 ~ 1997년 :
경상대학교 컴퓨터과학과 (석사)
1998년 ~ 2001년 :
경상대학교 컴퓨터과학과 (박사)
2003.3 ~ 현 재 :
강릉원주대학교 멀티미디어공학과 부교수
관심분야 : 소프트웨어 프로젝트 관리, 소프트웨어 개발 방법론, 소프트웨어 신뢰성, 그래프 알고리즘
e-mail : sulee@gwnu.ac.kr