

The Random Type Quadratic Assignment Problem Algorithm

Sang-Un Lee*

Abstract

The optimal solution of quadratic assignment problem (QAP) cannot get done in polynomial time. This problem is called by NP-complete problem. Therefore the meta-heuristic techniques are applied to this problem to get the approximated solution within polynomial time. This paper proposes an algorithm for a random type QAP, in which the instance of two nodes are arbitrary. The proposed algorithm employs what is coined as a max flow-min distance rule by which the maximum flow node is assigned to the minimum distance node. When applied to the random type QAP, the proposed algorithm has been found to obtain optimal solutions superior to those of the genetic algorithm.

▶ Keywords : LAP, QAP, NP-complete, Max-flow/Min-distance, Mesh type, Random type

• First Author: Sang-Un Lee, Corresponding Author: Sang-Un Lee

*Sang-Un Lee (sulee@gwnu.ac.kr), Dept. of Multimedia Engineering, Gangneung-Wonju National University

• Received: 2015. 11. 09, Revised: 2015. 12. 06, Accepted: 2016. 01. 06.

I. Introduction

2차원 할당문제(quadratic assignment problem, QAP)는 컴퓨터 회로기판에 전자부품을 배치하는 경우, 또는 병원의 X-RAY실, 진료실 등을 배치하는 경우로 n 개의 시설 (facilities)과 n 개의 영역 (locations or area)이 존재하며, n 개 위치간 거리 정보인 $n \times n$ 거리행렬 d_{ij} 와 n 개의 시설간의 유동량 정보인 $n \times n$ 유동행렬 f_{ij} 가 주어질 경우, 유동량을 최소화하도록 시설을 지정된 위치에 배치하는 문제이다[1].

QAP는 Koopmans와 Beckman이 건물 배치 문제(facility location problem)를 모형화하기 위해 1957년에 처음으로 제기한 이래, 정확한 해를 구하기 위한 방법의 일종인 분기한정법(branch-and-bound)이 40여 년간 연구되고 있다. 또한, 휴리스틱한 근사 알고리즘으로는 구성 알고리즘, 제한된 나열 방법, 유전자 알고리즘 등이 제안되고 있다[1,2]. QAP는 극도로 어려운 문제로 현재까지 다항시간으로 풀 수 있는 알고리즘이 알려져 있지 않아 NP-완전(NP-complete) 문제로 분류되고 있다[1]. 일반적으로, QAP는 $n!$ 의 가능한 할당 경우수가 존재한다. 그러나 엄밀히 말하면 대칭행렬로 $n!/2$ 개가 존재한다.

QAP의 대표적인 사례로 병원 시설 배치문제(Hospital layout problem)와 전자회로 배선문제(Steinberg wiring problem)가 있다[1,3,4]. 병원 시설 배치문제는 시설간의 거리가 일정하지 않은 랜덤형(random type)인 경우이고, 전자회로 배선문제는 위치간의 거리가 일정한 그물형 또는 사각형(mesh or rectangular type)이다. 그물형과 사각형은 일정한 패턴을 갖고 있는 반면에, 랜덤형은 특정 패턴이 없이 불규칙한 형태를 취해 QAP 들 중에서도 가장 어려운 난제로 알려져 있다.

본 논문은 랜덤형 QAP에 한정하여 다항시간으로 최적 해를 구할 수 있는 알고리즘을 제안한다. 제안된 알고리즘은 최소 거리에서 최대 유동량(물동량)을 갖도록 하는 단순한 규칙을 적용하여 QAP를 해결하였다. 2장에서는 QAP의 형태를 고찰한다. 3장에서는 랜덤형 QAP의 해를 찾을 수 있는 알고리즘을 제안한다. 4장에서는 제안된 알고리즘을 랜덤형 QAP 사례들에 적용하여 해를 찾는지 평가해 본다.

II. Description and Related Works

QAP는 시설 $i, j = 1, 2, \dots, m$, 영역 $k, l = 1, 2, \dots, n$ 에 대해 i 시설이 k 영역에 위치할 때 $u_{ik} = 1$, i 에서 j 로의 흐름양을 b_{ij} , 영역간의 거리를 a_{kl} 라 할 때, 식 (1)을 만족하도록 시설을 영역에 배치하는 문제이다.

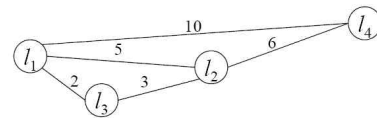
$$z = \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ij} a_{kl} u_{ik} u_{jl} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \text{s. t. } & \sum_{k=1}^n u_{ik} = 1 \text{ for } i = 1, 2, \dots, m \\ & \sum_{i=1}^m u_{ik} = 1 \text{ for } k = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

QAP의 최적 해를 찾는 다항시간 알고리즘이 알려져 있지 않다. 다만, 휴리스틱 방법으로 최적 해라고 알려진 다양한 사례들이 QAPLIB[5]로 제시되어 있다.

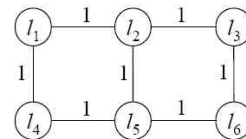
QAP는 노드간 거리가 맨해튼(manhattan distance)로 계산되어 블록간 거리를 “1”로 계산하여 일정한 그물(또는 사각형)의 형태를 갖는 것과 유클리드 거리(euclidean distance)로 일정하지 않은 랜덤형이 있다. 그림 1은 그물형과 랜덤형의 사례를 보여주고 있다.

Location	Location				Facility					
	d	l_1	l_2	l_3	l_4	f	f_1	f_2	f_3	f_4
l_1			5	10	2	f_1		21	11	44
l_2		5		6	3	f_2	21		12	30
l_3		10	6		4	f_3	11	12		9
l_4		2	3	4		f_4	44	30	9	



(a) Random type

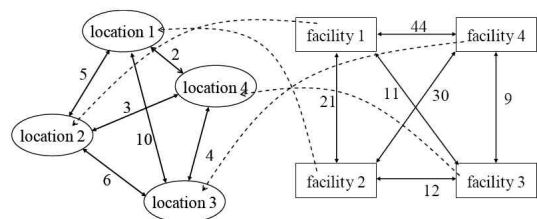
Location	Location						Facility							
	d	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	f	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
l_1			1	2	1	2	3	f_1		5	2	4	1	0
l_2		1		1	2	1	2	f_2	5		3	0	2	2
l_3		2	1		3	2	1	f_3	2	3		0	0	0
l_4		1	2	3		1	2	f_4	4	0	0		5	2
l_5		2	1	2	1		1	f_5	1	2	0	5		10
l_6		3	2	1	2	1		f_6	0	2	0	2	10	



(b) Mesh type (Nugent-6)

Fig. 1. QAP types

Tsutsui와 Fujimoto[6]는 그림 1의 $n=4$ 랜덤형 공장 배치문제에 대해 유전자 알고리즘을 적용하여 그림 2와 같이 $(l_1, f_2), (l_2, f_1), (l_3, f_4), (l_4, f_3)$ 으로 할당하였으며, $z = 1,524$ 를 제시하였다.



$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{cost}(\phi) &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 f_{ij} d_{\phi(i)\phi(j)} \\ &= 1524 \end{aligned}$$

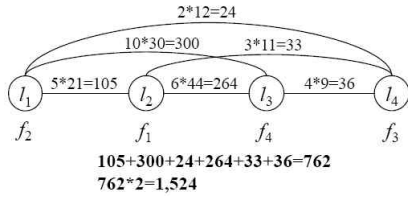


Fig. 2. Solution of $n=4$ FL-QAP(1)

랜덤형 QAP의 해를 구하는 방법으로 최근까지 알려진 방법으로는 유전자 알고리즘[6]이 유일하다. 그러나 유전자 알고리즘은 메타휴리스틱 기법의 일종으로, 랜덤한 초기치 설정으로 시작하여 오차가 감소하는 한 유전자들을 조작하면서 근사 해를 찾는다. 일단 현재 진행 과정에서 더 이상의 해 개선이 없는 경우 더 이상 해를 개선하지 못하여 지역 최적점(local minima)에 수렴한다. 그러나 요행히도 초기치가 전역 최적점(global minima) 근처에 설정되면 전역 최적점인 최적 해에 도달할 수도 있다. 이와 같은 사유로 인해, 메타휴리스틱 기법들은 수 천, 수만 번의 시행 횟수 들 중에서 평균으로 알고리즘의 성능을 제시한다. 왜냐하면, 이 기법들은 랜덤한 초기치 설정으로 인해 동일한 결과를 재현할 수 없으며, 어떻게 해를 찾아가는지에 대해서도 설명할 수 없다. 따라서 최적의 값을 제시하면 재현 불가로 추후 이 알고리즘을 적용하여 동일한 해를 얻는다고 보장할 수 없기 때문이다.

최적 해를 찾는 다항시간 알고리즘이 알려져 있지 않은 QAP를 다항시간으로 풀 수 있는 알고리즘은 3장에서 제안한다. 본 논문에서 제안되는 알고리즘은 선형할당문제 (linear assignment problem, LAP)의 “흐름 망의 최대 유동량은 최소 절단값이 결정한다.”는 최대흐름/최소절단 이론(max-flow min-cut theorem)[7]에 기반을 두고 있다. 따라서 여기서는 본 장에서 제안하는 알고리즘의 근거가 되는 최대흐름-최소절단의 개념을 그림 3을 대상으로 고찰해 본다[8,9]. (a)는 A-B-C-D-E의 단일 경로 상에서 원천(source) A에서 종착지(sink) E까지 최대로 흐를 수 있는 흐름량(max-flow)을 결정하는 문제로 용량은 {A,B}=5, {B,C}= 3, {C,D}=2, {D,E}=4이다. 여기서 $\min\{5,3,2,4\}=2$ 에 대해, 각 지점의 여유량(잉여량)을 계산하면 {A,B}=5-2=3, {B,C}= 3-2=1, {C,D}=2-2=0, {D,E}=4-2=2로 여유량이 “0”인 지점이 병목지점으로 최소 절단이 되며, 이 경로를 따라 흐를 수 있는 최대 용량은 최소절단 값인 2로 결정된다. (b)는 보다 복잡한 망으로 구성된 경우로 A에서 H로 흐를 수 있는 최대 흐름량을 결정하는 문제이다. 단일 지점만을 고려하면 {A}=3+2=5, {B}=2+2+2+3=9, {C}=3+2+4=9, {D}=4+2+2=8, {E}=3+2+3=8, {F}=3+2+1=6, {G}=1+2+2=5, {H}=3+2=5로 $\min\{5,9,9,8,8,6,5,5\}=5$ 로 A와 H가 일단은 최소절단의 후보가 된다. 그러나 복잡한 망에서는 하나의 지점이 아닌 다수의 지점 간 간선들이 결합된 형태로 병목지점들이 발생한다. 이 병목지점들 중에서 최소의 값을 갖는 지점들만으로 구성된 간선들을 절단이라 하며, “5”보다 작은 값을 갖는 간선들의 집합이 있는지 찾아보면,

{B,C}=3과 {F,G}=1로 원천과 종착지를 양분할 수 있다. 따라서 이 문제의 최소 절단 값은 4로 병목지점은 {B,C}와 {F,G}이다.

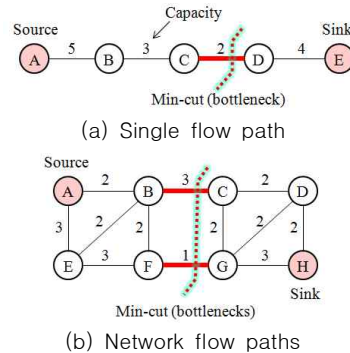


Fig. 3. Max-flow/Min-cut instances

III. Max-Flow/Min-Distance Assignment Algorithm

본 장에서는 영역간의 거리가 일정하지 않은 랜덤형 QAP에 대해 최적 해를 찾을 가능성이 가장 높은 알고리즘을 제안한다. 제안 알고리즘은 LAP의 최대흐름/최소절단 이론[7]을 QAP로 확장하여 최대 흐름량 $\{f_k, f_l\}$ 을 최소 거리 $\{l_i, l_j\}$ 에 매칭하는 최대흐름-최소거리 (max-flow/min-distance) 개념을 적용한다.

제안된 방법은 그림 4에 제시되어 있다. 첫 번째로, 주어진 QAP의 거리행렬을 거리 오름차순으로, 흐름량 행렬의 용량을 내림차순으로 정렬한다. 두 번째로, 거리행렬의 $\{l_i, l_j\}$ 와 흐름량 행렬의 $\{f_k, f_l\}$ 가 일치하면 $(l_i, f_k), (l_j, f_l)$ 로 매칭한다. 만약, 다르다면 최적의 위치로 매칭한다. 이는 정렬된 순서에 대한 역수의 값으로 순위 점수를 매긴 합을 이용하여 최대-최대 점수 쌍(시설-위치)으로 결정할 수도 있다.

```

Step 1. Sorting
for i=1 to n
    Ascending sort of the distance d of d{l_i, l_j} in distance matrix
end
compute sum of the reverse score for each location
for i=1 to n
    Descending sort of the flow f of f{f_k, f_l} in flow matrix
end
compute sum of the reverse score for each facility
Step 2. Assignment
for i=1 to n /* bipartite graph equal pair */
    if {l_i, l_j}={f_k, f_l}, i=k, j=l then
        assigned to (l_i, f_k), (l_j, f_l)
    else the unassigned facility assigned to 1st remained location
end
or
for i=1 to n
    Assigned the max score facility to max score location
end
    
```

Fig. 4. Max-flow/min-distance assignment algorithm (MFMDAA) for Random-type QAP

그림 2의 $n=4$ FL-QAP(1)에 대해 제안된 MFMDAA를 적용하면 그림 5와 같이 $(l_1, f_1), (l_2, f_2), (l_3, f_3), (l_4, f_4)$ 로 4개 시설을 4개의 위치에 배치하여 비용 $z=1,004$ 를 얻는다.

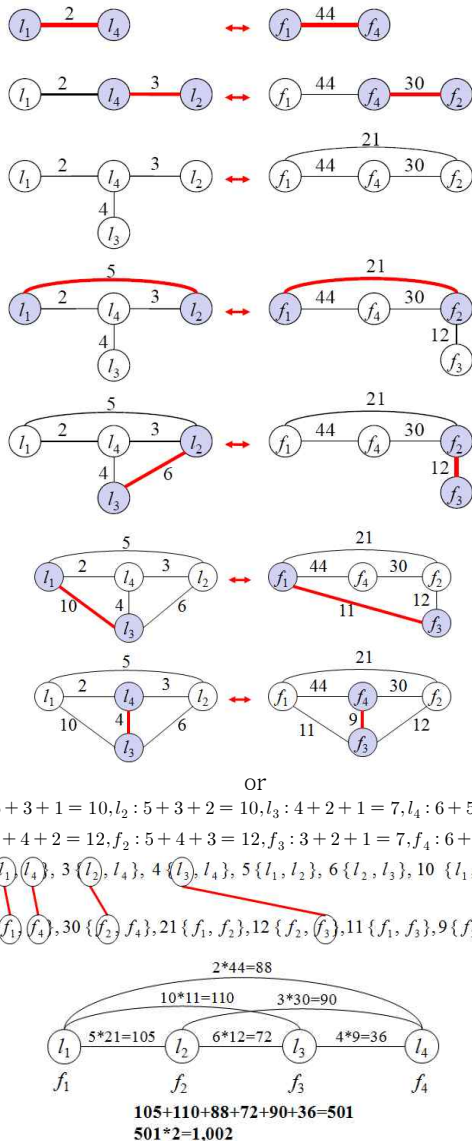


Fig. 5 Optimal solution of MFMDAA for $n=4$ FL-QAP(1)

거리행렬을 거리 오름차순으로 정렬하면 $2\{l_1, l_4\}, 3\{l_2, l_4\}, 4\{l_3, l_4\}, 5\{l_1, l_2\}, 6\{l_2, l_3\}, 10\{l_1, l_3\}$ 이며, 흐름행렬을 용량 내림차순으로 정렬하면 $44\{f_1, f_4\}, 30\{f_2, f_4\}, 21\{f_1, f_2\}, 12\{f_2, f_3\}, 11\{f_1, f_3\}, 9\{f_3, f_4\}$ 이다. 이와 같이 정렬된 순서에 대해 이분 그래프의 시설-위치 쌍이 최적이 되도록 1:1 매칭 결과 $l_1(f_1), l_2(f_2), l_3(f_3), l_4(f_4)$ 로 4개 시설을 각각의 위치에 설치할 수 있다. 결국, 그림 2의 유전자 알고리즘으로 얻은 $z=1,524$ 는 최적 해가 되지 못한 반면에, 제안된 MFMDAA가 최적 해를 얻었다.

그림 6의 $n=4$ FL-QAP(2)는 Jensen과 Bard[10]에서 인용되었다. Jensen과 Bard는 Excel을 이용해 $(l_1, f_1), (l_2, f_4), (l_3, f_3), (l_4, f_2)$ 로 $z=6,520$ 을 얻었다.

d	Location				Facility			
	l_1	l_2	l_3	l_4	f_1	f_2	f_3	f_4
l_1		80	150	170	f_1	5	2	7
l_2	80		130	100	f_2	5	3	8
l_3	150	130		120	f_3	2	3	3
l_4	170	100	120		f_4	7	8	3

Fig. 6. $n=4$ FL-QAP(2)

그림 6에 대해 최대 흐름량을 최소 거리에 배치하는 기법(MFMDAA)을 적용하면 그림 7과 같이 $z=6,520$ 으로 Jensen과 Bard[10] 결과와 동일함을 알 수 있다.

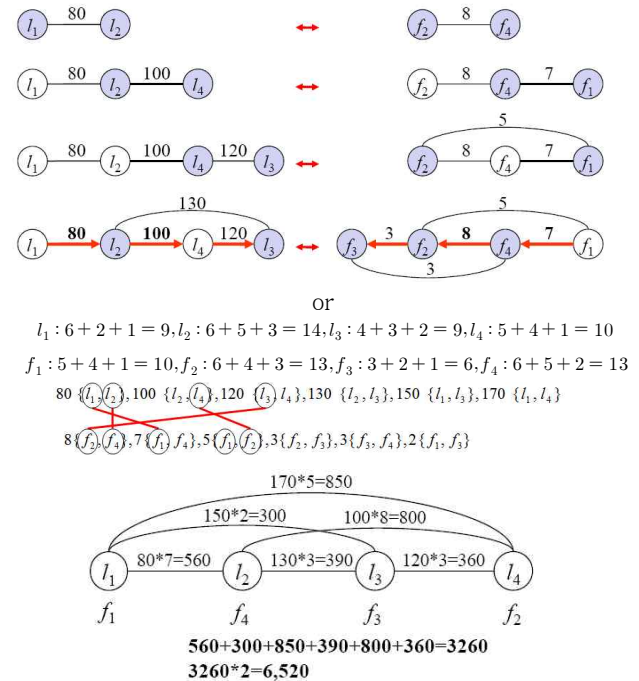


Fig. 7. Optimal solution of MFMDAA for $n=4$ FL-QAP(2)

IV. Applications and Evaluation

지금까지 살펴본 데이터는 거리행렬과 흐름량 행렬이 모두 K_4 인 완전그래프이다. 본 장에서 실험에 적용된 데이터는 $n=9$ 공장 배치 문제 (facility layout problem, FLP)와 $n=19$ 병원 배치문제 (hospital layout problem, HLP)이다. 두 문제는 모두 흐름량 행렬이 완전 그래프가 아닌 희소행렬 (sparse matrix) 그래프로 특정 노드들 간에만 흐름량이 존재한다. K_n -완전 그래프의 경우 간선 수 $|E|$ 는 $n(n-1)/2$ 개로 삼각행렬의 모든 셀에 값이 존재하지만 희소행렬이란 간선의 개수 $|E|$ 가 $n(n-1)/2$ 보다 매우 작은 경우를 의미한다. 즉, $n=9$ FLP는 흐름행렬에서 “0”의 개수가 7로 최대로 존재할 수 있는 간선 수 $36((9 \times 8)/2=36)$ 개 중 29개만이 존재하는 경우이고, $n=19$ HLP는 171개 중 56개 간선만이 존재하는 경우이다.

$n=9$ 공장 배치문제인 FL-QAP(3)은 표 1에 제시되어 있으며, 흐름량 행렬이 희소행렬인 특징과 더불어 거리행렬이

완전 랜덤형이 아닌 특정형태이다. 여기서 거리 행렬 값은 비용을 의미한다. Chan과 Tansri[11], Mak et al.[12], El-Baz[13], Mihajlovic et al.[14], Tsutsui와 Fujimoto[6]와 Jannat et al.[15]이 유전자 알고리즘을 적용하여 얻은 최적 해는 $z = 4,818$ 로 알려져 있으며, 연구 결과는 표 2에 제시되어 있다. 표에서는 최적 해로 알려진 $z = 4,818$ 을 구한 배치 결과는 제시되지 않고 있어 어떤 배치 순서인지 알 수 없다.

Table 1. $n = 9$ facility location problem FL-QAP(3)

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
l_1	1	2	3	3	4	2	6	7		f_1	100	3	0	6	35	190	14	12
l_2	1	12	4	7	5	8	6	5		f_2	100	6	8	109	78	1	1	104
l_3	2	12	5	9	1	1	1	1		f_3	3	6	0	0	17	100	1	31
l_4	3	4	5	1	1	1	4	6		f_4	0	8	0	100	1	247	178	1
l_5	3	7	9	1	1	1	1	1		f_5	6	109	0	100	1	10	1	79
l_6	4	5	1	1	1	1	4	6		f_6	35	78	17	1	1	0	1	0
l_7	2	8	1	1	1	1	1	1		f_7	190	1	100	247	10	0	0	0
l_8	6	6	1	4	1	4	7	1		f_8	14	1	1	178	1	1	0	12
l_9	7	5	1	6	1	6	1	1		f_9	12	104	31	1	79	0	0	12

Table 2. Solution of FL-QAP(3)

Layout	z	References				
		Chan & Tansri [11]	Mak et al. [12]	El-Baz [13]	Mihajlovic et al. [14]	Jannat et al. [15]
4-8-5-3-9-2-7-1-6	9,092	○	○	○	○	-
7-1-6-3-9-2-4-8-5	9,208	○	○	○	○	-
6-2-5-1-9-8-7-3-4	11,932	○	○	○	○	-
5-2-6-8-9-1-4-3-7	9,454	○	○	○	○	-
5-8-4-2-9-3-6-1-7	10,384	○	○	○	○	-
4-3-7-8-9-1-5-2-6	9,468	○	○	○	○	-
7-3-4-1-9-8-6-2-5	6,602	○	○	○	○	-
6-1-7-2-9-3-5-8-4	8,616	○	○	○	○	-
9-1-5-6-4-3-8-7-2	10,824	-	-	○	-	○
5-7-9-2-6-4-3-1-8	12,704	-	-	-	-	○
5-7-9-6-4-2-8-3-1	11,192	-	-	-	-	○
4-2-8-6-3-1-9-5-7	14,050	-	-	-	-	○
5-7-9-6-2-4-8-3-1	10,802	-	-	-	-	○
6-1-9-7-3-4-2-5-8	10,402	-	-	-	-	○

FL-QAP(3)에 대해 제안된 MFMDAA를 수행한 결과는 그림 8에 제시되어 있다. 본 문제의 거리행렬에서 단위거리 (거리=1)가 다수 존재하여 최대흐름-최소거리 배정이 어렵다. 따라서 초기치를 얻기 위해 행 또는 열의 개수가 1개가 존재할 때까지 거리행렬은 최대치를, 흐름량 행렬은 최소치를 삭제하는 방법을 적용하였다. 이 결과 $\{l_2, l_1\}$ 과 $\{f_8, f_4\}$ 를 얻어 (l_2, f_8) , (l_1, f_4) 로 배정되었다.

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
l_1	1	2	3	3	X	2	X	X		f_1	100	X	X	X	35	190	X	X
l_2	1	12	X	X	X	X	X	X		f_2	100	X	X	109	78	X	X	104
l_3	2	X	5	X	X	1	1	1		f_3	X	X	X	0	17	100	X	31
l_4	3	X	X	1	1	1	X	X		f_4	X	X	X	100	X	247	178	X
l_5	3	X	X	1	1	1	1	1		f_5	X	109	X	100	X	10	X	79
l_6	X	X	1	1	1	1	X	X		f_6	35	78	17	X	X	X	X	X
l_7	2	X	1	1	1	1	1	X		f_7	190	X	100	247	X	X	X	X
l_8	X	X	1	X	1	X	X	1		f_8	X	X	X	178	X	X	X	X
l_9	X	X	1	X	1	X	1	1		f_9	X	104	31	X	79	X	X	X

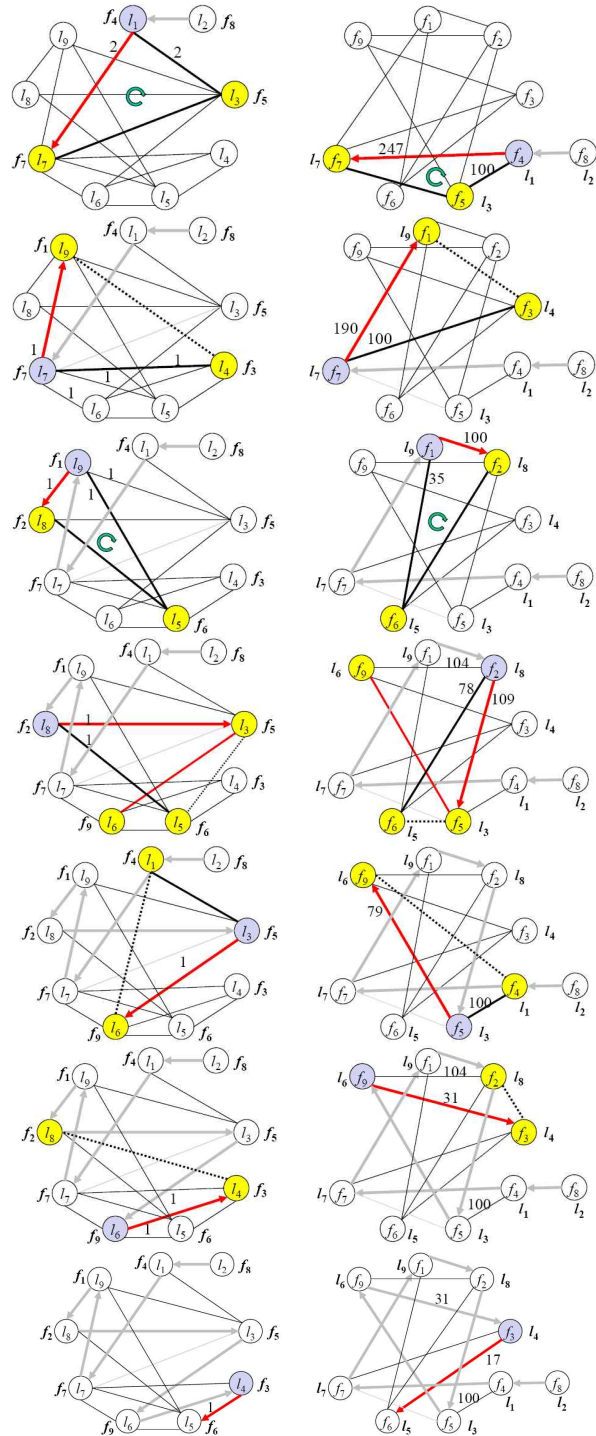
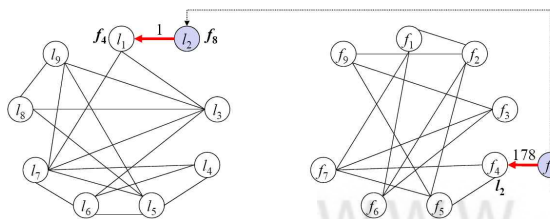


Fig. 8. Improving result of the solution for FL-QAP(3)

초기치 결정 이후 흐름량 행렬의 노드에서 2개씩 연결하는 방법을 적용하였다. 흐름량 행렬의 f_4 에서 $\{f_4, f_7\} = 247$, $\{f_4, f_5\} = 100$ 과 $\{f_5, f_7\}$ 이 존재한다. 이에 대응하는 거리행렬은 $\{l_1, l_7\} = 2$, $\{l_1, l_3\} = 2$ 와 $\{l_3, l_7\}$ 이 존재한다. 따라서 (l_7, f_7) , (l_3, f_5) 가 배정된다. 다음으로, $\{f_1, f_3\}$ 이 존재하지 않는 $\{f_7, f_1\} = 190$, $\{f_7, f_3\} = 100$ 이 있다. 이에 대응하는 거리행렬은 $\{l_9, l_4\}$ 이 존재하지 않는 $\{l_7, l_9\} = 1$, $\{l_7, l_4\} = 1$ 이다. 따라

서 $(l_9, f_1), (l_4, f_3)$ 가 배정된다. 이와 같이 $(l_8, f_2), (l_5, f_6), (l_3, f_5), (l_6, f_9)$ 로 배정되어 9-8-4-1-3-5-7-2-6으로 $z = 4,774$ 를 얻는다. 이 결과는 기존의 유전자 알고리즘을 적용해 얻은 최적 해 $z = 4,818$ 을 개선하였음을 알 수 있다.

병원 배치문제[4]는 표 3에 제시되어 있다. 병원 배치문제의 해는 9-10-7-18-14-19-13-17-6-11-4-5-12-8-15-16-1-2-3으로 $z = 17,212,548$ 로 알려져 있다.

Table 3. $n = 19$ Hospital location problem

d	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9	f10	f11	f12	f13	f14	f15	f16	f17	f18	f19
f1		12	36	28	52	44	110	126	94	63	130	102	65	98	132	132	126	120	126
f2	12		24	75	82	75	108	70	124	86	93	106	58	124	161	161	70	64	70
f3	36	24		47	71	47	110	73	124	71	95	110	46	127	163	163	73	67	73
f4	28	75	47		42	34	148	111	161	52	94	148	49	117	104	109	111	105	111
f5	52	82	71	42		42	128	136	102	22	73	125	32	94	130	130	136	130	136
f6	44	75	47	34	42		148	111	162	52	96	148	49	117	152	152	111	105	111
f7	110	108	110	148	128	148		46	46	136	47	30	108	51	79	79	46	47	41
f8	126	70	73	111	136	111	46		69	141	63	46	119	68	121	121	27	24	36
f9	94	124	128	162	102	162	46	69		102	34	45	84	23	80	80	69	64	51
f10	63	86	71	52	22	52	136	141	102		64	118	29	95	131	131	141	135	141
f11	130	93	95	94	73	96	47	63	34	64		47	56	54	94	94	63	46	24
f12	102	106	110	148	128	148	30	46	45	118	47		100	51	89	89	46	40	36
f13	65	58	46	49	32	49	108	119	84	29	56	100		77	113	113	119	113	119
f14	98	124	127	117	94	117	51	68	23	95	54	51	77		79	79	68	62	51
f15	132	161	163	104	130	152	79	121	80	131	94	89	113	79		10	113	107	119
f16	132	161	163	109	130	152	79	121	80	131	94	89	113	79	10		113	107	119
f17	126	70	73	111	136	111	46	27	69	141	63	46	119	68	113	113		6	24
f18	120	64	67	105	130	105	47	24	64	138	46	40	113	62	107	107	6		12
f19	126	70	73	111	136	111	41	36	51	141	24	36	119	51	119	119	24	12	

f	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9	f10	f11	f12	f13	f14	f15	f16	f17	f18	f19
f1		7638		415	545	819	135	1368	819	5630		3432	9082	1503			1373	1368	1783
f2	7638		4091	411	576	215	191	274	109	571				268			1373	268	
f3	4091	4091		384	232	321	207	422	361		404	9372		972			13538	1368	
f4	415	411	384		251					82	124								
f5	545	576	232	251					47	163	287		42				236		
f6	819	203	321							93	161								
f7	135	191	207						194	133	194								
f8	1368	274	422							301									
f9	819	109	581		47		194			195	418								
f10	5630	571		82	163	93	153	135				287							
f11				128	287	161	194	301	418			168						236	
f12	3432		40						287	168									
f13	9082		937		42														
f14	1503		268																
f15			972													99999			
f16		1373																	
f17	1373	268	1368		236														
f18	1368		1368																
f19	1783																		

제한된 방법은 거리행렬의 최소치 으뜸차순과 흐름양 행렬의 최대치 내림차순 배열이 일치하도록 그림 9와 같이 $(l_{15}, f_{15}), (l_{16}, f_{16}), (l_{17}, f_1), (l_{18}, f_2), (l_{19}, f_{19})$ 를 초기치로 배정하였다.

Table 5. Case of execution for $n = 19$ hospital assignment problem

흐름양	f	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9	f10	f11	f12	f13	f14	f15	f16	f17	f18	f19
f		76387		415	545	819	135	1368	819	5630		3432	9082	1503			1373	1368	1783
f2	76387		40951	4118	5767	2055	1917	2746	1097	5712				268			1373	268	
f3		40951		3848	2524	3213	2072	4225	566									13538	1368
f5				972											972			1368	
f6			1373												99999				
현 흐름양				8381	8836	6087	4124	8339	2482	11342	0	3836	18454	1771			27538	2736	1783
총 흐름양				9594	11349	7174	6054	8640	5097	18526	3403	5804	18496	1771			27990	2736	1783
미반영율				12.6	22.1	15.2	31.9	3.5	51.3	38.8	100.0	33.9	0.2	0.0			1.6	0.0	0.0
배정	f17	f18	f19												f15	f16	f1	f2	f3
거리	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9	f10	f11	f12	f13	f14	f15	f16	f17	f18	f19
f17	126	70	73	111	136	111	46	27	69	141	63	46	119	68	113	113		6	24
f18	120	64	67	105	130	105	47	24	64	135	46	40	113	62	107	107	6		12
f19	126	70	73	111	136	111	41	36	51	141	24	36	119	51	119	119	24	12	
현재 거리	372	204	213	327	402	327	134	87	184	417	133	122	351	181					

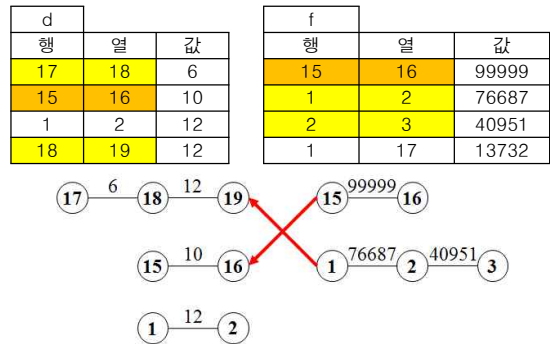


Fig. 9. Initial value setting for $n = 19$ hospital location problem

이후에는 표 4와 같이 총 흐름양에서 기존에 배정된 노드들과의 흐름양 비율을 구하고 최대 흐름양이 최소 거리에 위치한 노드에 배정하는 법칙을 적용하였다. 여기서 95% 이상은 동일하게 취급하였으며, 경쟁에서 탈락하면 100% 또는 다음 흐름양 노드의 비율보다 큰 경우 선택하였다. 이와 같이 수행한 결과 $(l_{13}, f_{17}), (l_{12}, f_5), (l_7, f_{13}), (l_{11}, f_4), (l_{14}, f_8), (l_9, f_5), (l_2, f_{10}), (l_3, f_7), (l_1, f_9), (l_{13}, f_{12}), (l_{10}, f_{11}), (l_4, f_{18}), (l_6, f_{19}), (l_5, f_{14})$ 로 최적해의 배정과 동일한 배치로 $z = 17,212,548$ 임을 알 수 있다. 표 4의 각 단계별 상세한 계산 방법 예는 표 5에 제시하였다.

Table 4. Assignment method for hospital problem

No.	Node	Total flow	Current flow	%	Select	Assignment
1	f_{17}	27,538	27,990	98.39%		
	f_{13}	18,454	18,496	99.77%	f_{17}	l_{13}
2	f_{13}	18,454	18,496	99.77%		
	f_{10}	11,342	18,526	61.22%	f_5	l_{12}
3	f_5	9,062	11,349	79.85%		
	f_{13}	18,496	18,496	100.0%	f_{13}	l_7
4	f_{10}	12,997	18,526	70.16%		
	f_1	8,637	9,594	90.03%	f_4	l_{11}
5	f_{10}	13,826	18,526	74.63%		
	f_8	8,339	8,640	96.52%	f_8	l_{14}
6	f_{10}	13,826	18,526	74.63%		
	f_6	6,087	7,174	84.85%	f_6	l_9
7	f_{10}	14,752	18,526	79.63%		
	f_7	4,124	6,054	68.12%	f_{10}	l_2
8	f_7	5,662	6,054	93.52%		
	f_9	4,483	5,097	87.95%	f_7	l_3
9	f_9	4,679	5,097	91.80%		
	f_{12}	4,118	5,804	70.95%	f_9	l_1
10	f_{12}	4,118	5,804	70.95%		
	f_{11}	3,403	3,403	100.0%	f_{12}	l_{13}
11	f_{11}	3,403	3,403	100.0%	f_{11}	l_{10}
	f_{18}	2,736	2,736	100.0%	f_{18}	l_4
12	f_{18}	2,736	2,736	100.0%		
	f_{10}	1,783	1,783	100.0%	f_{10}	l_6
13	f_{10}	1,783	1,783	100.0%		
	f_{14}	-	-	-	f_{14}	l_5

흐름량	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	
β	76387			415	545	819	135	1368	819	5630		3432	9082	1503				13732	1368	1783
β	76387	40651		4118	5767	2055	1917	2746	1097	5712				268			1373	268		
β		40651		3848	2524	3213	2072	4225	566			404	9372			972		13538	1368	
β			972													99999				
β		1373														99999				
β	13732	268	13538		226							226								
현 흐름량				8381	9062	6087	4124	8339	2482	11342	226	3836	18454	1771					2736	1783
총 흐름량				9594	11349	7174	6054	8640	5097	18526	3403	5804	18496	1771					2736	1783
미반영율				12.6	20.2	15.2	31.9	3.5	51.3	38.8	93.4	33.9	0.2	0.0					0.0	0.0
배정	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β
거리	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β
β	126	70	73	111	136	111	46	27	69	141	63	46	119	68	113	113			6	24
β	120	64	67	105	130	105	47	24	64	135	46	40	113	62	107	107			6	12
β	126	70	73	111	136	111	41	36	51	141	24	36	119	51	119	119			24	12
β	126	70	73	111	136	111	46		69	141	63	46	119	68	121	121			27	24
현재 거리	488	274	286	438	538	438	180		253	538	196	168	470	249						

본 논문에서 실험에 적용된 4개 문제에 대한 알고리즘 성능을 비교한 결과는 표 6과 같다. 제안된 알고리즘은 단순히 $O(n)$ 의 선형시간 수행 복잡도로 n 개의 시설을 n 개의 위치에 설치(배정, 할당)하였음에도 불구하고, 메타휴리스틱 기법의 일종인 유전자 알고리즘이나 기타 기법에 비해서도 보다 좋은 결과를 얻을 수 있음을 보였다.

Table 6. Comparison of algorithm performance

Problem	n	Known optimal solution	MFMDAA	Flow change amount
FL-QAP(1)	4	GA : 1,524	1,004	-520
FL-QAP(2)	4	Excel : 6,520	6,520	0
FL-QAP(3)	9	GA : 4,818	4,774	-44
HLP	19	17,212,548	17,212,548	0

V. Conclusions and Feature Researches

본 논문은 거리가 일정하지 않은 랜덤 QAP를 다루었다. 랜덤 QAP에 대해서는 지금까지 다항시간으로 해를 구하는 알고리즘이 알려져 있지 않고 있다. 이러한 난제를 풀 수 있는 하나의 방법으로 본 논문에서는 최소거리 노드에 최대흐름 노드

를 배치하는 최대흐름-최소거리 배정 법칙을 적용한 알고리즘을 제안하였다.

주어진 문제들의 흐름량 행렬이 회소행렬일 경우 초기치를 결정하기가 쉽지 않아 문제에 적합하도록 초기 값을 결정하는 방법을 다르게 적용하였다.

제안된 알고리즘을 4개의 실험 데이터에 적용한 결과, FL-QAP(1)과 FL-QAP(3)에 대해서는 기존 유전자 알고리즘의 해를 개선하는 효과를 얻었으며, FL-QAP(2)와 HLP에 대해서는 기존에 알려진 해와 동일한 결과를 얻었다.

결국, 본 논문은 랜덤형 QAP를 다항시간 내에 구할 수 있는 알고리즘이 존재할 가능성을 보였다. 본 논문의 결과를 기반으로 추후 일반화된 알고리즘에 대한 연구가 수행될 필요가 있다.

REFERENCES

[1] C. W. Commander, "A Survey of the Quadratic Assignment Problem, with Applications," European

- Journal of Operational Research, Vol. 176, Issue. 2, pp. 657-690, 2007.
- [2] P. Ji, Y. Wu, and H. Liu, "A Solution Method for the Quadratic Assignment Problem (QAP)," The 6th International Symposium on Operations Research and Its Applications (ISORA'06), Xinjiang, China, pp. 106-117, 2006.
- [3] L. Steinberg, "The Backboard Wiring Problem: A Placement Algorithm," SIAM Review, Vol. 3, pp. 37-50, 1961.
- [4] A. N. Elshafei, "Hospital Layout as a Quadratic Assignment Problem," Operations Research Quarterly, Vol. 28, pp. 167-179, 1977.
- [5] R. E. Burkard, S. E. Karisch, and F. Rendl, "QAPLIB-A Quadratic Assignment Problem Library," Journal of Global Optimization, Vol. 10, No. 4, pp. 391-403, 1997.
- [6] S. Tsutsui and N. Fujimoto, "Solving Quadratic Assignment Problems by Genetic Algorithms with GPU Computation: A Case Study," Proceedings of the 11th Annual Conference Companion on Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO), pp. 2523-2530, 2009.
- [7] E. Lawler, "Combinatorial Optimization: Networks and Matroids, 4.5. Combinatorial Implications of Max-Flow Min-Cut Theorem, 4.6. Linear Programming Interpretation of Max-Flow Min-Cut Theorem," Dover. pp. 117-120, 2001.
- [8] S. U. Lee, "Maximum Capacity-based Minimum Cut Algorithm," Journal of Korea Society of Computer Information, Vol. 16, No. 5, pp. 153-162, May 2011.
- [9] M. B. Choi and S. U. Lee, "A Minimum Cut Algorithm for Undirected Graph Using Maximum Adjacency Merging Method," Journal of the Institute of Internet, Broadcasting and Communication, Vol. 13, No. 1, pp. 143-152, Feb. 2013.
- [10] P. A. Jensen and J. F. Bard, "Operations Research Models and Methods, Section 7.4 Facility Location Problem," <http://www.me.utexas.edu/~jensen/ORMM/computation/unit/combin/qap.html>, John Wiley and Sons. 2003.
- [11] K. C. Chan and H. Tansri, "A Study of Genetic Crossover Operations on the Facilities Layout Problem," Computers and Industrial Engineering, Vol. 26, Issue. 3, pp. 537-550, 1994.
- [12] K. L. Mak, Y. S. Wong, and F. T. S. Chan, "A Genetic Algorithm for Facility Layout Problems," Computer Integrated Manufacturing Systems, Vol. 11, No. 1-2, pp. 113-127, 1998.
- [13] M. A. El-Baz, "A Genetic Algorithm for Facility Layout Problems of Different Manufacturing Environments," Computers & Industrial Engineering, Vol. 47, pp. 233-246, 2004.
- [14] I. Mihajlovic, Z. Zivkovic, N. Strbac, D. Zivkovic, and A. Jovanovic, "Using Genetic Algorithms to Resolve Facility Layout Problem," Serbian Journal of Management, Vol. 2, No. 1, pp. 35-46, 2007.
- [15] S. Jannat, A. A. Khaled, and S. K. Paul, "Optimal Solution for Multi-Objective Facility Layout Problem Using Genetic Algorithm," Proceedings of the International Conference on Industrial Engineering and Operations Management, Dhaka, Bangladesh, 2010.

Author



Sang Un Lee received the B. Sc. degree in avionics from the Korea Aerospace University in 1997. He received the M. Sc. and Ph. D. degrees in Computer Science from Gyeongsang National University, Korea, in 1997 and 2001, respectively.

He is currently Professor with the Department of Multimedia Science, Gangneung-Wonju National University, Korea. He is interested in software quality assurance and reliability modeling, software engineering, software project management, neural networks, and algorithm.