

# 인공신경망모형을 이용한 KOSPI 200 선물의 가격결정에 관한 연구

김 헌 수\*

김 광 용\*\*

정 대 용\*\*\*

본 연구의 목적은 주가지수선물의 시장가격과 괴리를 보이고 있는 보유비용모형의 문제를 극복하기 위하여 보유비용모형 외에 일반균형모형과 인공지능기법을 이용하여 우리나라 주가지수선물의 가격결정을 실증분석하고 성과를 비교한다. 인공신경망 기법은 잘 알려진 바와 같이 파생상품의 가격결정모형에 있어서 기초자산의 확률과정 및 기타 비현실적인 가정들을 필요로 하지 않기 때문에 이로부터 발생하는 오차를 최소화할 수 있다. 모형간의 성과는 실제가격과의 괴리율의 평균, MAD(Mean Absolute Deviation), MSE(Mean Square Error)를 사용한다. 분석결과 일반균형모형이 보유비용모형보다 훨씬 나은 성과를 보이는 것은 확인할 수 있었으나, 인공신경망모형이 일반균형모형보다 더 좋은 성과를 얻기 위해서는 lag 변수들을 추가해야 한다는 점을 알 수 있었다. 시장가격에 가까운 이론가격을 주는 모형을 이용하여 가격예측력을 높이기 위해서는 일반균형모형 뿐만 아니라 인공신경망모형이 주가지수선물의 가격결정에 있어서 좋은 대안이 될 수 있을 것이다.

※ Key Word : 선물, KOSPI 200, 가격결정, 보유비용모형, 일반균형모형, 인공신경망모형, 실제가격과의 괴리율의 평균, MAD(Mean Absolute Deviation), MSE(Mean Square Error)

## I. 문제 제기

주가지수선물의 가격결정모형 중 가장 잘 알려진 모형은 보유비용모형(cost of

\* 순천향대학교 금융보험학과 교수(e-mail : briank@sch.ac.kr)

\*\* 숭실대학교 경영학부 교수(e-mail : gygim@ecminer.com)

\*\*\* 삼성선물(주) 금융공학팀장(e-mail : daejung@ssfutures.com)

carry model)이다. 이 모형에 의하면 주가지수 선물포지션은 주식과 채권으로 복제될 수 있으며 차익거래불가논리에 의해 선물가격이 주가지수, 이자율 그리고 배당수익률에 의해 결정된다. 이와 같이 보유비용모형은 논리적 단순성으로 인해 주가지수선물 뿐만 아니라 거의 모든 선물계약의 가격결정에 널리 이용되고 있다. 우리 나라의 경우에도 주가지수선물의 가격결정을 논의할 때 보유비용모형의 채택을 당연시하고 있다.

1996년 5월 3일 KOSPI 200 지수를 거래대상으로 하는 주가지수선물이 거래된 이후 선물시장가격은 보유비용모형을 이용한 이론가격에 비해 괴리율이 매우 높아 논란의 대상이 되어 왔다. 보유비용모형에 의한 주가지수 선물의 가격결정 시 순보유비용은 이자율과 배당수익률의 차이로 나타낼 수 있는데, 우리 나라의 경우 이자율이 배당수익률보다 높은 관계로 선물가격이 현물지수보다 일반적으로 높게 형성될 것으로 예상할 수 있다. 그러나 선물가격은 1996년 6월말의 만기 이후 저평가 및 백워드이션(backwardation) 현상을 보이는 경우가 많았다.

1996년 5월 3일부터 1998년 5월 12일까지 2년간 KOSPI 200 지수선물 최근월물의 가격괴리율은 -13.50%에서 +3.21%의 분포를 보였으며, 저평가 빈도가 68.6%, 고평가 빈도가 31.4%였다. 차근월물의 경우에는 -16.77%에서 5.31%의 분포를 보였으며 저평가 빈도가 83%, 고평가 빈도가 17%였다.<sup>1)</sup> 이와 같이 가격괴리현상이 매우 심했으며, 특히 저평가 빈도가 압도적으로 높았다.

주가지수선물의 가격괴리 현상을 분석한 기존의 연구를 살펴보면, 주식과 선물거래의 과세차이[Cornell & French(1983)], 배당금의 불확실성[Peters(1985)], 새로운 시장에서의 일시적 현상[Figlewski(1984)], 차입금리와 대여금리의 차이[Gould(1988)], 선물가격과 선도가격의 차이[MacKinlay & Ramaswamy(1988)], 포지션 제한[Brennan & Schwartz(1990)] 등에 의해 가격괴리를 설명하고 있다. 그러나, Modest(1984), Cornell(1985), Yadav & Pope(1990) 등은 상기의 요인들이 선물가격에 그리 큰 영향을 미치지 않는다는 연구결과를 발표하였

1) 가격괴리율은 시장가격과 보유비용모형을 이용한 이론가격의 차이를 이론가격으로 나누어 백분율로 표시한 것이며, 1996년 5월 3일부터 1998년 5월 12일까지 약 2년간의 11시 30분 자료를 이용하여 산출하였다.

다. 더구나, Finnerty & Park(1988), Merrick(1989), 그리고 Yadav & Pope(1990)는 상기의 요인들이 서로 상쇄작용을 하여 차익거래불가영역을 오히려 좁히는 역할도 한다고 주장한다.

Modest & Sundaresan(1983)은 미국의 S&P 500 지수선물시장에서 선물의 저평가현상은 공매도 대금의 100% 이용이 불가능하기 때문이라는 주장을 펴고 있다. 그들은 배당금과 거래비용을 고려하여 이론가격과 차익거래불가영역을 추정한 결과 투자자가 공매도 대금을 사용할 수 없는 경우 차익거래기회가 존재하지 않았으나, 공매도 대금을 100% 사용할 수 있는 투자자에게는 차익거래기회가 존재하였음을 보이고 있다. 이와 유사한 연구로 Puttonen & Martikainen(1991)은 공매도 대금의 이용제한 때문에 선물의 저평가 현상을 검증할 때는 고평가 현상을 검증할 때보다 추가적인 거래비용(이자비용)을 고려해야 한다는 주장을 펴고 있다. 또한, Brenner et. al.(1990)은 일본 주가지수선물시장에서 선물의 저평가 현상의 상당부분은 거래비용으로 설명될 수 있음을 보여주고 있다. 한편, McKinlay & Ramaswamy(1988)는 미국 S&P 500 지수선물시장에서 차익거래불가영역을 초과하는 가격피리가 존재하였으며, 특히 선물계약의 만기가 길수록 가격피리가 증가함을 보여주고 있다.

주가지수 선물의 시장가격이 보유비용모형의 이론가격과 상당한 괴리를 보일 때 우리는 가격결정모형에 오류가 있다고 생각해 볼 수 있다. 예를 들어, 보유비용모형은 주가지수가 외생적으로 주어진다고 가정하고 차익거래불가논리를 이용하는 부분균형모형이다. 따라서 현물시장과 선물시장의 동태적인 상호작용을 고려하지 못하는 단점을 지니고 있다. 또한 보유비용모형에서는 이자율과 주가지수의 변동성이 일정하다는 비현실적인 가정이 전제되어 있다. Hemler & Longstaff(1991)는 이자율과 주가지수의 변동성이 확률적이라는 가정 하에 주가지수선물의 일반균형 가격결정모형을 제시하고 있다. 그들의 모형에서는 주가지수 선물가격, 주가지수, 이자율 등이 내생적으로 결정되며, 이자율뿐만 아니라 주가지수 변동성도 선물가격에 영향을 미치게 된다. 1983년 1월부터 1987년 11월까지의 기간동안 NYSE 주가지수 선물시장의 월별자료를 이용하여 실증분석한 결과에 의하면, 주가지수의 변동성이 주가지수선물의 가격결정에 영향을 미치며 이는 보유비용모형이 설명할 수 없는

부분이다.

이와 관련된 실증연구로서 Brailsford & Cusack(1997)은 시드니 선물거래소 (Sydney Futures Exchange)에서 거래되는 10개 주식선물의 거래자료(1994년 5월 16일부터 18개월간)를 이용하여 보유비용모형과 Hemler & Longstaff(1991)의 일반균형모형을 비교분석한 결과 어느 한 모형이 다른 모형보다 절대적으로 우월하다는 결론을 내릴 수 없음을 보이고 있다. 정대용(1998)은 Hemler & Longstaff(1991)가 제시한 방법론에 따라 KOSPI 200 지수선물시장의 자료(1996년 5월 3일부터 1998년 5월 12일까지 약 2년간의 11시 30분 자료)를 이용하여 보유비용모형과 일반균형모형의 제약조건들을 검증함으로써 어느 모형이 더 적합한가를 실증분석하였다. 분석결과를 요약하면 보유비용모형과 일반균형모형 중 어느 하나의 모형이 우월하게 채택되지 않기 때문에 검증결과는 다소 복잡적이라고 할 수 있다. 우리 나라 주가지수 선물시장의 경우 선물가격은 보유비용모형을 정확히 따르지 않으며, 그렇다고 일반균형모형을 따른다고 결론을 내리기도 힘들다. 즉, 보유비용모형과 일반균형모형은 KOSPI 200 선물가격결정에 있어서 나름대로의 설득력을 지니고 있으며, 어느 한 모형이 다른 모형보다 절대적으로 우월하다는 결론을 내릴 수는 없다고 할 수 있다. 그러나, 시장의 변동성이 선물가격결정에 상당한 설득력을 갖는다는 사실은 흥미로운 결과이며, 이는 보유비용모형만으로 설명될 수 없는 부분이다.

본 연구에서는 보유비용모형 외에 일반균형모형과 인공지능기법 중에서 많은 연구가 진행되고 있는 인공신경망모형을 이용하여 우리 나라 주가지수선물의 가격결정을 실증분석한다. 앞에서 언급하였듯이 보유비용모형과 일반균형모형은 복잡한 현실세계를 단순화하기 위한 여러 가지 가정을 요구하기 때문에 이러한 가정이 현실에 부적합한 경우에는 모형의 해를 정확하게 구했다고 하더라도 모형가격은 실제 가격과 괴리를 갖게 된다. 또한 Hemler & Longstaff(1991), Brailsford & Cusack(1997), 정대용(1998) 등 기존의 연구에서는 일반균형모형이 제시하는 이론적인 결과가 비선형의 형태를 지닐뿐만 아니라 매개변수(parameters)를 직접 추정하기 불가능하므로 해(solution)를 선형화하여 회귀분석방법을 택하였다. 이 때 잔차의 자기상관성, 이분산성 등을 극복하기 위한 또 다른 절차가 필요하며, 이러한

과정들이 모형의 성과에 영향을 미쳐 보유비용모형과 일반균형모형 중 어느 하나의 모형이 우월하게 채택되지 않는 복합적인 결론으로 이어질 수도 있는 것이다.

인공신경망 기법은 잘 알려진 바와 같이 파생상품의 가격결정모형에 있어서 기초자산의 확률과정 및 기타 비현실적인 가정들을 필요로 하지 않기 때문에 이로부터 발생하는 오차를 최소화할 수 있다. 또한 인공신경망 기법은 적응적 모형이므로 임의의 한 시점에서 시장의 구조적 변화에 자동적으로 적응할 수 있다. 새로운 환경에서의 가격결정을 위한 새로운 모형화 과정 없이 기존 모형으로부터 신속한 적응이 가능하다. 특히, 일반균형모형의 해와 같이 비선형의 함수를 추정하는데 효과적이다. 따라서 본 연구에서는 이상에서 지적한 문제점들을 극복할 수 있는 자료 의존적인 인공신경망 기법을 국내 KOSPI 200 지수선물의 가격결정에 적용함으로써 기존의 모형들과 성과를 비교분석하고 인공신경망 기법의 적용 가능성을 확인하고자 한다.

본 연구의 구성은 다음과 같다. 제II장에서는 주가지수선물의 가격결정모형인 보유비용모형과 일반균형모형을 간략히 설명하고 인공신경망모형을 제시한다. 제III장에서는 분석방법과 각 모형의 성과를 측정, 비교한다. 제IV장에서는 본 연구의 결론 및 앞으로의 연구방향을 제시한다.

## II. 주가지수선물의 가격결정모형

### 1. 보유비용모형

주가지수선물의 이론가격은 보유비용의 개념과 차익거래불가논리에 의해 결정할 수 있다. 거래비용 및 공매도에 대한 제약이 없고 차입금리와 대출금리가 동일한 완전시장의 가정 하에서 주가지수선물의 이론가격은 현물지수에 순보유비용(이자비용 - 배당수익)을 더하여 계산한다. 즉, 배당금을 배당락일에 지급받는 것으로 의제 한 전기 현금배당금에 근거하여 각 배당금의 만기시 가치를 구하고 연속복리를 가

정하는 경우의 주가지수선물 이론가격( $F_t$ )은 다음과 같이 결정된다.

$$F_t = S_t \cdot e^{r(T-t)} - D(t, T) \quad (1)$$

이때  $S_t$ 는 주가지수,  $D(t, T)$ 는 시간  $t$ 부터 만기( $T$ )까지의 기간 동안 받게 되는 배당금의 만기가치, 즉,  $D(t, T) = \sum_{s=t}^T e^{r \cdot (T-s)} D_s$ , 이때  $D_s$ 는  $S \in [t, T]$ 일에 지급되는 배당금의 액수,  $r$ 은 무위험수익률을 나타낸다.

## 2. 일반균형모형

Hemler & Longstaff(1991)는 이자율과 시장변동성이 확률적이라는 가정 하에 주가지수선물의 일반균형 가격결정모형을 제시하고 있다. 그들의 모형에서 주가지수 선물가격은 주식시장, 선물시장, 그리고 자금시장간의 상호작용에 의해 결정된다. 즉, 주가지수 선물가격, 주가지수, 이자율 등이 모형 내에서 동시에 결정되며, 특히 시장변동성도 주가지수 선물가격에 영향을 미치게 된다.

$$F(S, r, \sigma, D(t, T), \tau) = [S - D(t, T)]A(\tau) \cdot \exp[B(\tau)r + C(\tau)\sigma] \quad (2)$$

이때  $F$ 는 주가지수 선물가격,  $S$ 는 주가지수,  $r$ 은 이자율,  $\sigma$ 는 주가지수 수익률의 변동성,  $D(t, T)$ 는 시간  $t$ 부터 만기( $T$ )까지의 기간 동안 받게 되는 배당금의 만기가치, 즉,  $D(t, T) = \sum_{s=t}^T e^{r \cdot (T-s)} D_s$ , 이때  $D_s$ 는  $S \in [t, T]$ 일에 지급되는 배당금의 액수, 그리고  $\tau$ 는 현재시점( $t$ )부터 선물만기일( $T$ )까지의 시간을 나타내며,  $A(\tau)$ ,  $B(\tau)$ ,  $C(\tau)$ 는 모두  $\tau$ 의 함수이다.<sup>2)</sup>

Hemler & Longstaff(1991) 모형의 실증적 시사점 중 가장 중요한 것은 “배당

2)  $A(\tau)$ ,  $B(\tau)$ ,  $C(\tau)$ 는 모두 현재시점부터 선물만기일까지의 시간 외에 이자율과 변동성의 결합과정(joint process)의 매개변수들의 함수로 표현된다. 본 논문에서는 Helmer & Longstaff(1991)의 방법론을 따라 이러한 매개변수들이 일정하다고 가정하고 시간의 함수로만 표현한다. 구체적인 식의 형태는 Hemler & Longstaff(1991)의 식(15) 참조.

금조정 후 주가지수 선물가격과 주가지수의 비율에 자연대수를 취한 값이 이자율 및 시장변동성과 선형회귀식으로 표현될 수 있다”는 것이다. 즉,

$$L_t = \beta_0 + \beta_1 r_t + \beta_2 \sigma_t + \varepsilon_t \quad (3)$$

이 때  $L_t = \ln\left(\frac{F_t}{S_t - D(t, T)}\right)$ ,  $S_t$ 는 주가지수,  $D(t, T)$ 는 시간  $t$ 부터 만기( $T$ )까지의 기간 동안 받게 되는 배당금의 만기 가치, 즉,  $D(t, T) = \sum_{s=t}^T e^{r \cdot (T-s)} D_s$ , 이때  $D_s$ 는  $s \in [t, T]$ 일에 지급되는 배당금의 액수,  $r_t$ 는 이자율, 그리고  $\sigma_t$ 는 시장변동성을 각각 나타낸다.

일반균형모형에 의하면 식(3)의 추정계수가 다음과 같아야 함을 의미한다.  $\beta_0 \neq 0$ ,  $\beta_1 > 0$ ,  $\beta_2 \neq 0$ . 한편, 보유비용모형에 의하면 배당금조정 후 주가지수 선물가격과 주가지수의 비율에 자연대수를 취한 값이 이자율에만 의존한다. 따라서, KOSPI 200 선물가격이 보유비용모형을 따른다면 식(3)의 추정계수가 다음과 같은 제약조건을 만족시켜야 한다.  $\beta_0 = 0$ ,  $\beta_1 > 0$ ,  $\beta_2 = 0$ . 즉, 이자율은 선물가격의 형성에 영향을 미치더라도 시장의 변동성은 선물가격에 어떠한 영향도 미치지 않아야 한다. 따라서, 보유비용모형은 일반균형모형의 특수한 형태임을 알 수 있다.

일반균형모형을 이용하여 이론가격을 얻기 위해서 본 연구에서는 다음과 같은 단계를 거친다.

- (1) 1997년 7월 7일부터 1998년 7월 21일까지의 KOSPI 200 선물시장가격, KOSPI 200, 배당금, 이자율, KOSPI 200의 변동성을 이용하여 식(3)의  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ 를 추정한다.
- (2)  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ 의 추정계수  $\hat{\beta}_0$ ,  $\hat{\beta}_1$ ,  $\hat{\beta}_2$ 와 1998년 7월 22일의 KOSPI 200, 배당금, 이자율, 변동성 자료를 이용하여 다음과 같이 1998년 7월 22일자 KOSPI 200 선물의 이론가격을 산출한다.

$$F_t = [S_t - D(t, T)] \cdot \exp[\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 r_t + \hat{\beta}_2 \sigma_t] \quad (4)$$

(3) 날짜가 이동함에 따라 추가적인 자료를 이용하여 (1)과 (2)의 과정을 반복적으로 수행하여 이론가격 시리즈를 산출한다.

### 3. 인공지능망 모형

#### 가. 실험과정

본 연구의 목적은 우리 나라 주가지수 선물가격을 결정하는데 있어서 가장 많이 사용되고 있는 보유비용모형 외에 일반균형모형과 인공지능망모형을 비교분석하여 실제 선물가격과 차이가 가장 작은 모형을 찾아내는 데 있다. 따라서, 본 연구에서는 먼저 자료를 수집하고 실험에 사용되는 자료로 다시 가공한 다음, 실험에 맞게 자료를 나누어 설계한다. 그리고 인공지능망 모형을 설계하여 실험한 후 나온 결과로 모형간 비교를 한다.

〈그림1〉 실험과정



## 나. 실험설계

### 1) 자료설계

본 연구의 분석기간은 1997년 7월 7일부터 1998년 9월 30일까지이다. 사용한 자료는 ① 현물가격(KOSPI 200), ② 잔존일수(MAT), ③ (최근월물) 배당락지수(ND), ④ GARCH(1,1) 변동성(VOL), ⑤ 91물 CD금리(CD), ⑥ (최근월물) 선물가격(NF) 등이다. 훈련자료(Training set)는 초기 333개이며, 실험자료(Testing set)는 30개(1998년 7월 22일부터)이다. 입력변수는  $LRNF1(=\log(LRNF))$ ,  $LRNF2(=\log^2(LRNF))$ ,  $LRNF3(=\log^3(LRNF))$ ,  $LRNF4(=\log^4(LRNF))$ ,  $LRNF5(=\log^5(LRNF))$ ,  $LRNF = \ln(NF_t/NF_{t-1})$ ,  $MCD(=MAT \times CD)$ ,  $MVOL(=MAT \times VOL)$ 이고, 출력변수는  $LRNF(=\log(NF/DNKP))$ 이다. 여기서 DNKP는 KOSPI 200에서 배당락지수(ND)를 뺀 지수를 의미한다. MAT는 잔존일수를 365로 나눈 값이다.

### 2) 모형설계

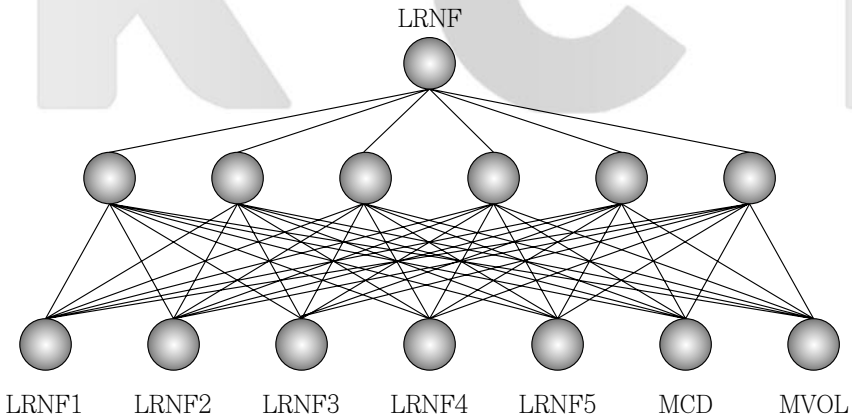
본 연구에서는 인공신경망모형에서 일반적으로 많이 사용되는 역전파모형(Backpropagation Architecture)을 이용한다. 인공신경망 기법을 이용할 때 신경망의 구조는 성과에 직접적인 영향을 미치므로 신중하게 결정되어야 한다. 인공신경망의 구조결정에 관한 다양한 연구가 있지만 최적의 신경망구조는 문제의 성격 및 사용된 학습 알고리즘에 따라 결정된다. 일반적으로 이러한 결정은 휴리스틱(heuristic)한 비교, 즉 각 구조별 학습오차의 비교를 통하여 이루어진다. 다양한 실험의 결과, 본 연구에서는 역전파 모형 중에서도 <그림2>와 같은 3계층모형을 선택하였고, 은닉층에서 출력층으로 전달되는 학습정보에 이용된 관련함수는 시그모이드 함수를 사용하는 옵션을 이용하였다.

본 실험설계 방법은 training sample과 test sample로 무작위로 나누어 training sample에서는 모델을 개발하고 test sample에서 그 예측력을 점검하는 방법을 취하였다. 특히 본 모델 개발 시 training sample 중 약 30%의 자료를 무작위로 선정하여 수없이 시행되는 데이터에 관한 모델의 학습시 예측력 점검을 동

시에 수행하는 방법을 사용함으로써(시스템의 선택사항임) 모델 개발시 overfitting 문제가 최소화 되도록 하는 방법을 이용함으로써 혹시 상식에 벗어난 아주 많은 히든 노드수가 필요하거나 아니면 다양한 test sample을 가지고 점검해야 하는 문제를 근원적으로 개선하고자 하였다. 따라서 본 실험에서는 다양한 히든 노드수에 따라 monotonic하게 예측력이 증가하다가 감소하게 되는 변곡점을 찾는 것이 중요하였으며 이러한 근거에 의하여 최종 히든 노드수를 결정하였다.

본 실험에서는 초기에 3의 배수로 다양한 히든 노드수(3개 6개...24개)에 관하여 시도하고 그 중 가장 test sample의 예측력이 좋은 구간인 히든 노드수 3에서 7까지의 실험을 통해 monotonic하게 증가하는 것을 볼 수 있었고 히든 노드수 7부터 test sample의 예측력이 감소하므로 히든 노드수 7이 변곡점이 되는 것을 알 수 있었다. 따라서 최종적으로는 7-6-1 구조를 선정하였다. 학습율은 0.05, 모멘텀은 0.5로 하여 훈련시켰다. 실험을 위해 사용된 프로그램은 Ward System사에서 개발된 NeuroShell이고, Pentium 200MHz를 이용하였다.

〈그림2〉 인공지능망 모형



### III. 실증분석 및 결과

## 1. 분석기간 및 자료

본 연구에서 분석기간은 1997년 7월 7일부터 1998년 9월 31일까지 약 1년여이다. 본 연구에 이용된 자료는 KOSPI 200, KOSPI 200 선물 시장가격(최근월물), 배당락지수(최근월물), 양도성에금증서(CD), 91일물의 연수익률 등이며, 모든 자료는 증권거래소로부터 얻었다.

시장변동성은 KOSPI 200 지수 수익률의 GARCH(1,1) 변동성을 이용한다. (GARCH(1,1) 변동성의 추정방법은 【부록】을 참조) 최근 많은 연구들에서 밝혀졌듯이 ARCH 모형은 시계열 자료의 변동성의 시간의존성을 잘 표현해 준다. ARCH 모형은 Engle(1982)에 의해 처음 소개되었는데, 시간에 따라 변하는 변동성을 표현하는데 있어서 잔차제곱의 자기회귀(autoregressive) 형태를 취한다. GARCH(Generalized ARCH) 모형은 ARCH 모형의 일반화된 형태로서 Bollerslev(1986)에 의해 소개되었는데, 시간의존적인 변동성을 잔차제곱의 자기회귀형태와 전기의 변동성으로 표현한다. 본 연구에서는 GARCH(1,1) 모형을 이용하는데, 많은 연구들이 보여주었듯이 이 모형은 금융자산의 가격변동성의 행태를 잘 설명해주고 있기 때문이다.<sup>3)</sup>

본 연구에서는 오전 11시 30분의 KOSPI 200 지수 및 지수선물가격을 이용한다. 이는 선물시장이 주식시장보다 15분 늦게 종료함에 따라 현물과 선물의 종가(closing prices)를 이용하여 가격괴리율을 측정하는 경우 단순히 시간차에 의한 오

3) Bollerslev, Chou, & Kroner(1992) 참조. 물론 GARCH(1,1) 모형이 연속시간 확산과정(diffusion process)인 기하적 브라운운동 과정(GBM: geometric Brownian motion)으로 부터 직접적으로 도출되는 것은 아니다. 한편 연속시간 모형에서 GBM을 가정하고 실증분석에서 이산시간(discrete time) 자료를 이용하여 GARCH(1,1) 모형을 추정함으로써 계량적 문제점이 제기될 수 있으나, Nelson(1990)은 표본간격(sampling intervals)이 감소함에 따라 이산시간 GARCH(1,1) 모형이 연속시간 확산모형으로 수렴함을 보이고 있다. 또한 Nelson(1992)은 이론적 모형이 점프(jump)가 없는 확산모형이라면 GARCH(1,1) 모형에 의해 연속시간 가격변동성을 일관성있게 (consistently) 추정할 수 있음을 보이고 있다.

차가 지속적으로 발생하기 때문이다.

## 2. 모형의 성과 측정방법

본 연구에서는 각 모형의 성과측정 도구로서 괴리율의 평균, MAD(Mean Absolute Deviation), MSE(Mean Square Error)를 사용한다. 괴리율의 평균은 식(6)에서 보는 바와 같이 실제가격과 모형가격의 차이를 모형가격으로 나누어 준 결과들의 평균이다.

$$\text{괴리율의 평균} = \frac{\sum_{i=1}^N (X_{\text{actual},i} - X_{\text{model},i})}{X_{\text{model},i}} \quad (6)$$

MAD는 식(7)에서 보는 바와 같이 실제가격과 모형가격의 차이에 절대값을 취한 결과들의 평균이다.

$$MAD = \frac{\sum_{i=1}^N |X_{\text{actual},i} - X_{\text{model},i}|}{N} \quad (7)$$

MSE는 식(8)과 같이 실제가격과 모형가격의 차이를 제곱한 결과들의 평균이다.

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^N (X_{\text{actual},i} - X_{\text{model},i})^2}{N} \quad (8)$$

## 3. 분석결과

### 1) 실험과정

본 연구에서는 모형의 실험과정에서 과거의 자료를 학습하여 다음날 하루를 예측하고, 또 그 다음날은 그 전날까지의 자료를 학습하여 결정하는 당일예측방법을 사

용하였다. 이렇게 하여 30일을 검증표본으로 놓고 피리울, MAD, MSE를 이용하여 모형을 검증하였다.

## 2) 실험결과

### ① 입력변수가 4개일 때 모형의 성과비교

입력변수의 변화가 모형의 성과에 미치는 영향을 파악하기 위하여 먼저 2개의 lag변수가 들어간 4개의 입력변수로 인공신경망 모형을 설계하여 실험하였다. 이와 같은 실험은 인공신경망 모형의 훈련시 전날과 이틀전의 자료가 종속변수에 영향을 미친다는 의미이다.

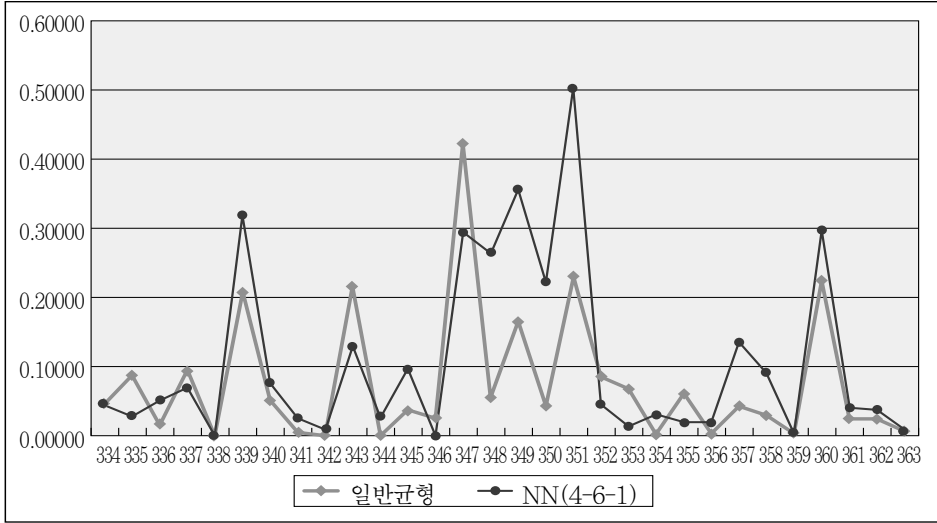
보유비용모형은 식(1)을 이용하여 추정하였고, 일반균형모형은 시간이 흐름에 따라 식(3)과 (4)를 반복적으로 이용하여 추정하였다. 식(3)을 추정한 결과  $\beta_1$ 과  $\beta_2$ 는 전체기간에서 1% 또는 5% 수준에서 통계적으로 유의한 값을 보였으며 평균  $R^2$ 은 0.75이다.

각 모형의 성과를 비교하기 위해서 피리울과 MAD, MSE를 측정한 결과 일반균형모형이 보유비용모형이나 히든 노드를 변화시킨 인공신경망모형보다 더 나은 결과를 보여주고 있다.

〈표1〉 입력변수가 4개인 인공신경망모형의 성과비교

	일반균형	보유비용	NN(4-3-1)	NN(4-6-1)
피리울평균	0.085216	-3.352458	0.239972	0.252058
MAD	0.2146	1.2020	0.2742	0.2712
MSE	0.0757	1.7361	0.1104	0.1079

〈그림3〉 일반균형모형과 인공신경망모형(4-6-1)의 MSE



③ 3개의 lag된 변수가 추가되었을 때의 모형의 성과비교

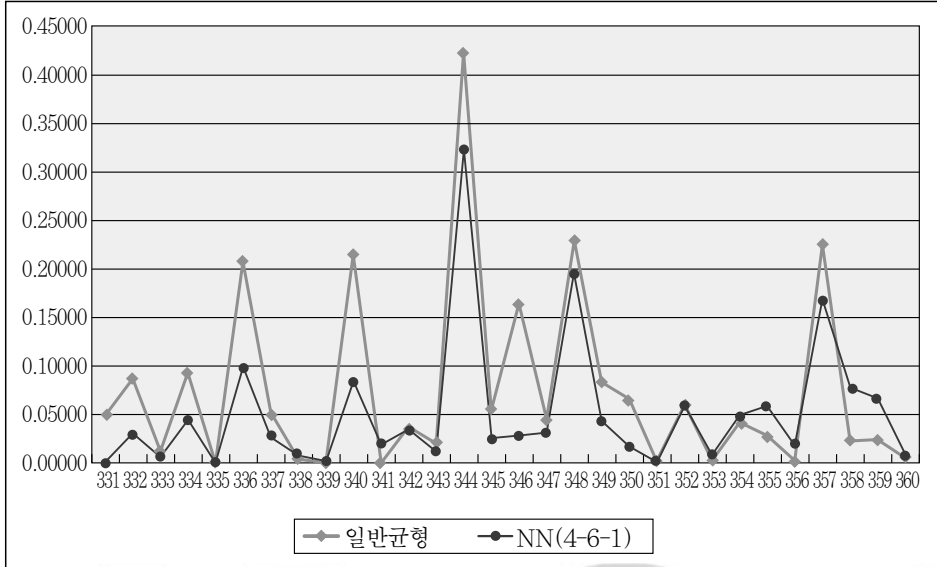
NN(6)모형에 Lag 변수를 3개를 더 추가하여 총 Lag변수를 5개로 놓고 입력변수를 7개로 설정하여 모형을 다시 구성하였다. 이러한 구성은 일주일의 시장변화를 인공신경망모형이 학습함으로써 가격결정에 도움이 되는지를 분석하는 것이다. 또한 훈련수를 15000을 기본으로 하여 조금씩 조정하면서 실험하였다.

다음은 다양한 실험의 결과를 근거로 각 모형의 성과를 비교한 것이다. <표2>, <그림4>, <그림5>에서 보는 바와 같이 인공신경망모형이 일반균형모형보다 실제 선물가격과 차이가 적게 나타나 나온 모형임을 보여주고 있다.

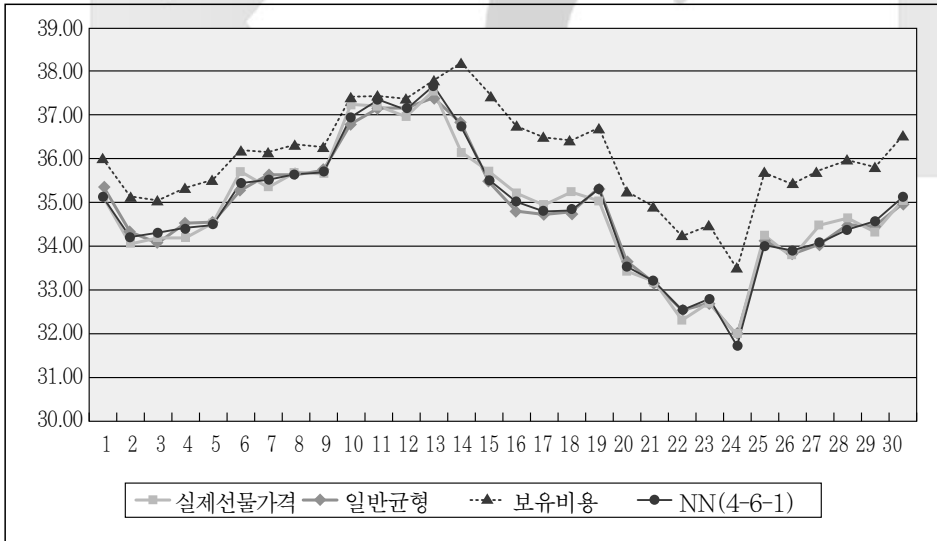
<표2> 입력변수가 7개인 인공신경망모형의 성과 비교

	보유비용	일반균형	NN(7-6-1)
피리올	-3.352458	0.085216	0.013945
MAD	1.2020	0.2146	0.1903
MSE	1.7361	0.0757	0.0513

<그림4> 일반균형모형과 인공신경망모형(7-6-1)의 MSE



〈그림5〉 선물가격결정모형의 성과비교



#### IV. 맺음말

논리적인 단순성과 사용의 편의성으로 보유비용모형이 주가지수선물의 가격결정에 일반적으로 사용되고 있으나, 보유비용모형 가격이 시장가격과 상당한 괴리를 보이고 있다. 따라서 본 연구에서는 보유비용모형 외에 일반균형모형과 인공신경망모형을 이용하여 주가지수선물의 가격결정모형을 비교분석하였다.

파생상품의 가격결정에 대한 기존의 재무적 모형들은 복잡한 현실세계를 단순화시키기 위한 여러 가지 가정들을 사용함으로써 가정의 현실적합 여부에 따라 문제가 발생할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 기존의 가격결정모형들의 문제점을 극복하기 위해 자료의존적인 인공신경망기법을 국내 주가지수선물의 가격결정에 적용해 봄으로써 그 가능성을 제시하였다.

인공신경망 모형에서 일반적으로 많이 사용되는 역전파 모형(Backpropagation Architecture)을 이용하여 KOSPI 200 선물의 가격결정에 적용한 결과 다음과 같은 결론을 유도하였다.

첫째, 2개의 lag 변수를 포함한 4개의 입력변수를 사용한 경우에는 일반균형모형이 보유비용모형이나 히든 노드를 변화시킨 인공신경망모형보다 더 나은 결과를 보여주고 있다. 그러나, NN(6)모형에 Lag 변수 3개를 더 추가하여 총 lag 변수를 5개로 놓고 입력변수를 7개로 설정한 모형의 경우 인공신경망모형이 일반균형모형보다 더 나은 결과를 보여주고 있다.

둘째, 일반균형모형이 보유비용모형보다 훨씬 나은 성과를 보이는 것은 확인할 수 있었으나, 인공신경망모형이 일반균형모형보다 더 좋은 성과를 얻기 위해서는 lag 변수들을 되도록 많이 사용해야 한다는 점이다.

셋째, 현재 국내 주가지수선물시장의 참여자들이 사용하고 있는 보유비용모형은 시장가격과 상당히 괴리가 있는 이론가격을 제시하기 때문에 가격괴리 그 자체의 크기에 대한 유용성에 의문을 제기하는 경우가 많다. 만일 보유비용모형에 문제가 있고 시장이 옳다면, 그리고 좀 더 시장가격에 가까운 이론가격을 주는 모형을 추구한다면 일반균형모형 뿐만 아니라 인공신경망모형이 주가지수선물의 가격결정에 있어서 좋은 대안이 될 수 있을 것이다.

그럼에도 불구하고 본 논문의 한계, 그리고 향후 연구과제는 다음과 같다. 첫째,

본 논문에서 선택한 분석기간은 1997년 7월 7일부터 1998년 9월 31일까지의 짧은 기간이며 외환위기라는 특수한 변수가 있어 논문의 결과가 선택한 기간에 의존적일 수밖에 없다. 그러나, 주가지수선물가격의 결정에 있어서 보유비용모형 외에 변동성이 역할을 하는 일반균형모형, 그리고 자료의존적인 인공신경망모형의 성과를 살펴본다는 측면에서 의미가 있는 선택이라고 판단되어 선정된 것이다. 둘째, GARCH(1,1) 모형이 시간의존적인 주가지수 변동성을 대체적으로 잘 설명하고 있기 때문에 본 논문에서 선택하였지만, 여러 가지 변동성 모형을 비교분석하는 추가적인 연구가 필요하다. 셋째, 보유비용모형의 이용시 현재 시점의 현물가격(KOSPI 200), 이자율, 잔존만기를 이용하여 현재시점의 이론가격을 구하고 선물시장가격과 비교하는 방법을 택한 반면, 일반균형모형을 적용할 때는 (어제까지의) 과거자료를 이용하여 회귀분석을 하고 (인공신경망모형에서 학습을 하는 것처럼) 추정된 식과 현재시점의 자료(현물가격, 이자율, 잔존만기, 변동성)를 입력하여 현재시점의 이론가격을 구하고 현재시점의 선물시장가격과 비교하였다. 인공신경망모형에서도 과거자료를 학습한 결과를 가지고 현재시점의 선물가격을 예측하고 현재시점의 선물시장가격과 비교하는 방법을 택하였다. 사실 일반균형모형의 개념은 예측모형은 아니지만 모형을 현실적으로 적용할 때 과거자료를 이용하여 현재시점의 선물가격을 예측하는 형태를 띠게 된다. 따라서 논문의 초점이 이론가격의 결정이라는 측면보다는 가격예측력의 비교분석에 집중되었다.

**【부 록】**

**GARCH(1,1) 모형에 의한 변동성 추정**

본 연구에서는 KOSPI 200 지수를 이용하여 다음과 같은 형태의 GARCH(1,1) 모형을 추정한다.

$$\begin{aligned}
 r_t &= \bar{r} + \epsilon_t \\
 \epsilon_t &| \Phi_{t-1} \sim N(0, h_t) \\
 h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}
 \end{aligned} \tag{11}$$

여기서  $r_t = 100 \times \log\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$ ,  $S_t$ 는 KOSPI 200,  $\bar{r}$ 는  $r_t$ 의 조건부평균,  $h_t$ 는 조건부 분산성을 나타내며, 오차  $\epsilon_t$ 는 조건부 정규분포(conditional normal distribution)를 따른다고 가정하고 最尤推定法(maximum likelihood method)에 의해 GARCH(1,1) 모형의 모수를 추정한다. 관측치의 수가 T인 경우 대수우도함수(log-likelihood function)는

$$L(\theta) = -T \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_1^T \log(V_t(\theta)) - \frac{1}{2} \sum_1^T \frac{\epsilon_t^2(\theta)}{V_t(\theta)}$$

여기서  $\theta = \{\bar{r}, \alpha_0, \alpha_1, \beta_1\}$ 는 추정되어야 할 조건부 평균과 분산식의 모수들의 집합이다. 대수우도함수를 최대화하기 위해 quasi-Newton 비선형최적화기법(nonlinear optimization method)을 이용한다.<sup>4)</sup>

이와 같은 GARCH(1,1) 모형은 현재 시점이 t일 때 t+1 시점의 변동성 예측치를 다음과 같이 제공해 준다.

$$h_{t+1} = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_t^2 + \beta_1 h_t$$

4) Judge, Griffiths, Hill, Lutkepohl, & Lee(1985:pp.958~960) 참조.

같은 논리로 t+1 시점에서 t+2 시점의 GARCH(1,1) 변동성은 다음과 같이 결정된다.

$$h_{t+2} = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t+1}^2 + \beta_1 h_{t+1}$$

현재 시점 t에서  $h_{t+1}$ 는 알려져 있는 반면,  $\epsilon_{t+1}^2$ 는 알려져 있지 않으므로 t+2 일의 변동성 예측치는 다음과 같이 조건부 기대치(conditional expectation)로 표현할 수 있다.

$$E[h_{t+2} | h_{t+1}] = \alpha_0 + \alpha_1 E[\epsilon_{t+1}^2 | h_{t+1}] + \beta_1 E[h_{t+1} | h_{t+1}]$$

$\epsilon_{t+1}$ 는 평균이 0이고 분산이  $h_{t+1}$ 므로

$$E[h_{t+2} | h_{t+1}] = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) h_{t+1}$$

위와 같은 논리에 의해서

$$E[h_{t+3} | h_{t+1}] = \alpha_0 + \alpha_0(\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_1 + \beta_1)^2 h_{t+1}$$

이제  $\sigma_{t+j}^2 = E[h_{t+j} | h_{t+1}]$ 로 정의하고 같은 논리를 반복적으로 적용하면 현재 시점 t에서 t+j 일의 변동성 예측치를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sigma_{t+j}^2 = \alpha_0 + \alpha_0(\alpha_1 + \beta_1) + \dots + \alpha_0(\alpha_1 + \beta_1)^{j-2} + (\alpha_1 + \beta_1)^{j-1} h_{t+1}$$

따라서 t+j일의 변동성 예측치는 다음과 같이 결정된다.

$$\sigma_{t+j}^2 = (1 - \omega_j) \bar{\sigma}^2 + \omega_j h_{t+1}$$

$$\text{이때 } \bar{\sigma}^2 = \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)}, \omega_j = \frac{(\alpha_1 + \beta_1)^{j-1} - (\alpha_1 + \beta_1)^j}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)}$$

위 식에서  $\bar{\sigma}^2$ 는 GARCH(1,1) 모형에 내재되어 있는 장기 변동성을 나타내며,  $\omega_j$ 는 익일 변동성 예측치의 상대적 중요도를 나타내는 가중치이다. 즉, 현재 시점 t에서

다음날( $t+1$ )의 변동성 예측치( $h_{t+1}$ )가 주어졌을 때,  $j$ 일 후의 변동성 예측치는 장기 변동성과 익일 변동성 예측치의 가중평균임을 알 수 있다.

이제 현재 시점이  $t$ 일 때  $t+1$ 부터 미래의 일정 시점  $t+T$ 까지의 기간동안 '일일 평균 변동성 예측치'는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\sigma^2(t, T) = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \sigma^2_{t+j}$$

## 참 고 문 헌

- 정대용, 「거래비용과 공매도 제약이 KOSPI 200 선물가격결정에 미치는 영향」, 『선물연구』(한국선물학회) 제6호, 1998, pp.111~132.
- Bollerslev, T., "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics* 31, 1986, pp.307~327.
- Brailsford, T. J., & A. J. Cusack, "A Comparison of Futures Pricing Models in a New Market: The Case of Individual Share Futures", *Journal of Futures Markets* 17, 1997, pp.515~541.
- Brennan, M. J., & E. Schwartz, "Arbitrage in Stock Index Futures", *Journal of Business* 63, 1990, pt. 2, pp.s7~s31.
- Brenner, M., M. G. Subrahmanyam, & J. Uno, "Arbitrage Opportunities in the Japanese Stock and Futures Markets", *Financial Analysts Journal*, 1990, March/April, pp.14~24.
- Cornell, Bradford, "Taxes and Pricing of Stock Index Futures", *Journal of Futures Markets* 5, 1985, pp.89~101.
- Cornell, Bradford, & Kenneth R. French, "The Pricing of Stock Index Futures", *Journal of Futures Markets* 3, 1983, pp.1~14.
- Figlewski, Stephen, "Explaining the Early Discounts on Stock Index Futures: The Case for Disequilibrium", *Financial Analysts Journal*, 1984, July/Aug., pp.43~47.

- Finnerty, J. E., & H. Y. Park, "How to Profit from Program Trading", *Journal of Portfolio Management*, 1988, Winter, pp.40~46.
- Gould, F. J., "Stock Index Futures: The Arbitrage Cycle and Portfolio Insurance", *Financial Analysts Journal* 48, 1988, Jan/Feb, pp.48~62.
- Hemler, Michael L., & Longstaff, Francis A., "General Equilibrium Stock Index Futures Prices: Theory and Empirical Evidence", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 28, 1991, pp.287~308.
- MacKinlay, C. A., & K. Ramaswamy, "Index Futures Arbitrage and the Behavior of Stock Index Futures Prices", *Review of Financial Studies* 1, 1988, pp.137~158.
- Merrick, J. J. Jr., "Early Unwinding and Rollovers of Stock Index Futures Arbitrage Programs: Analysis and Implications for Predicting Expiration Day Effects", *Journal of Futures Markets* 9, 1989, pp.101~111.
- Modest, D. M., "On the Pricing of Stock Index Futures", *Journal of Portfolio Management*, 1984, pp.51~57.
- Modest, D. M., & Mahadevan Sundaresan, "The Relationship Between Spot and Futures Prices in Stock Index Futures Markets: Some Preliminary Evidence", *Journal of Futures Markets* 3, 1983, pp.15~41.
- Peters, E., "The Growing Efficiency of Index Futures Markets", *Journal of Portfolio Management*, 1985, Summer, pp.52~56.
- Puttonen Vesa & Teppo Martikainen, "Short Sale Restrictions: Implications for Stock Index Arbitrage", *Economics Letters* 37, 1991, pp.159~163.
- Yadav, P. K., & P. E. Pope, "Stock Index Futures Arbitrage: International Evidence", *Journal of Futures Markets* 10, 1990, pp.573~603.

## Abstracts

The objective of this paper is to empirically investigate and compare pricing accuracy of stock index futures models; cost-of-carry model, general equilibrium model and neural network model. Neural network models could minimize pricing errors because they do not require unrealistic assumptions, e.g. , underlying assets' stochastic processes. In order to achieve the research objective, we employ three evaluation statistics; average pricing errors, MAD(Mean Absolute Deviation) and MSE(Mean Square Error). We find that the general equilibrium model outperforms the cost-of-carry model and that the neural network model 'with more lag variables' performs better than the general equilibrium model. The results imply that not only general equilibrium models but also neural network models could be potential alternatives for more accurate pricing models on stock index futures and that further studies on these models should be warranted.

※ Key words: KOSPI 200, Stock Index Futures, pricing, cost-of-carry model, general equilibrium model, neural network model, pricing accuracy, average pricing errors, MAD(Mean Absolute Deviation) and MSE(Mean Square Error)