보험개발연구 제18권 제2호 2007년 7월

기대의존성과 다수위험하의 베르누이원칙*

Expectation Dependence and the Bernoulli Principle Under Multiple Sources of Risk

홍 순 구**

Hong Soon-Koo

이 논문에서는, 보험위험과 통계학적 상호의존성이 있는 외생적 배경위험이 존재하는 경우, Wright(1987)에 의해 개발된 '기대의존성(Expectation Dependence)'의 개념을 적용해 베르누이원칙이 성립할 수 있는 필요 · 충분조건을 유도하고, 또 확률분포의 예시를 통해 그 결과를 확인해 본다. 요컨대 보험위험과 배경위험 간에 양(+)의, '0'의, 또는 음(-)의 기대의존성이 있는 경우 보험계약자는 그 경우에 한해서만 일부보험, 전부보험, 또는 초과보험을 각각 구입한다.

이 논문의 연구결과는 베르누이원칙에 대해 단순한 충분조건들을 제시하고 있던 기존의 연구결과(Aboudi · Thon 1995, 홍순구 2001 · 2004)들을 크게 개선시킨다. 즉 기대의존성의 개념을 적용해 베르누이원칙에 요구되는 필요 · 충분조건의 범위를 규정한 것이다. 이 기대의존성은 Aboudi · Thon(1995)에서의 회귀의존성이나 홍순구(2001, 2004)에서의 상호의존성을 포함하는 보다 광범위한 상호의존성의 개념이 된다.

※ 국문색인어: 기대의존성, 베르누이원칙, 통계학적 상호의존성, 필요 · 충분조건

* 이 논문은 서울산업대학교 학술연구비 지원에 의하여 연구되었음.
** 서울산업대학교 경영학과 교수(soonkooh@snut.ac.kr)

Ⅰ. 머리말

다수의 투자위험을 동시적으로 관리해야 하는 포트폴리오이론에서와 유사하게, 이제 보험경제학에서도 외생적 배경위험을 전제로 한 보험수요의 분석은 주된 연구분야의 하나가 되고 있다[Mayers · Smith(1983), Doherty · Schlesinger(1983a, 1983b), Turnbull(1983), Doherty (1984), Schlesinger · Doherty(1985), Schulenburg(1986), Dionne · Gollier(1992), Eeckhoudt · Kimball(1992), Meyer(1992), Aboudi · Thon(1995), Meyer · Ormiston(1996), Eeckhoudt · Gollier(1995), Schlesinger(2000)]. 이 논문에서는, 서로 통계학적 상호의존(Stochastic Interdependence)의 가능성이 있는 순수위험과 외생적 배경위험이 동시적으로 존재하는 경우, Wright(1987)에 의해 정의된 기대의존성(Expectation Dependence)의 개념을 적용해 베르누이원칙(Bernouuli Principle)[1)]이 성립 또는 위배될 수 있는 필요 · 충분조건을 유도하고, 또 확률분포의 예를 통해 그 결과를 가시적으로 확인해 본다.

Mossin(1968)이래 베르누이원칙은 최근까지도 여러 각도에서 활발하게 검증되고 있는 보험경제학의 연구주제이다[Cummins · Mahul(2004), Schlesinger (2006)]. 이런 연구의 일환으로 외생적인 배경위험이 존재하는 모형에서 베르누이원칙이 성립 또는 위배되는데 요구되는 충분조건들은 이미 여러 논문에서 조사되어 왔다[Mayers · Smith(1983), Doherty · Schlesinger(1983a), Doherty (1984), Schulenburg(1986), Aboudi · Thon(1995), 홍순구(2001, 2004)]. 그 중 Doherty · Schlesinger(1983a)와 Mayers · Smith(1983) 및 Doherty (1984) 그리고 Schulenburg(1986) 등의 연구들은, 모두 이 분야의 효시 또는 초석이 되는 논문들로서, 배경위험과 보험위험이 서로 독립적인 확률분포를 하는 경우 및 음(-)

1) 베르누이원칙(Bernouuli Principle)은 보험료가 순보험료 만으로 책정되는 경우 위험회피의 성향을 지닌 모든 보험계약자는 전부보험(full insurance)을 구입한다는 보험경제학의 정리(theorem)를 의미한다[Doherty · Schlesinger(1983a, 1983b)]. 이 베르누이정리는 지금까지도 보험시장의 존재의 유용성을 설명하는 가장 강력한 이론적 근거를 제공해 온다(Doherty 2000, Ch. 2).

의 상관계수(correlation coefficient)를 갖는 경우에는 베르누이원칙이 성립하지만[2], 배경위험과 보험위험간의 통계학적 상관계수가 양(+)의 값을 갖는 경우엔 보험계약자가 일부보험(partial insurance)을 선택함으로서 결과적으로 베르누이원칙에 위배됨을 증명했다.

하지만 위에서 언급된 논문들은 모두 평균 · 분산이론으로 보험수요를 분석함으로써 근원적인 한계점을 노출한다. 그 이유는 무엇보다, Schlesinger(2000)에 의해 지적된 바처럼[3], 베르누이원칙을 분석함에 있어 통계학적 상관계수는 두 확률변수간의 상호의존성을 측정하는 적확한 수단이 되지 못하기 때문이다. 예컨대 홍순구(2001)는 일반적인 기대효용모형 하에서, Doherty · Schlesinger(1983a), Mayers · Smith(1983), Schulenburg(1986) 등의 연구결과와는 상반되게, 배경위험과 보험위험이 양(+)의 상관계수를 갖더라도 보험계약자는 전부보험(full insurance) 또는 초과보험(over insurance)을 선택할 수 있음을 두 종류의 반례(counter example)에서 명시적으로 보이고 있다. 이 결과는 기대효용모형에서 베르누이원칙의 충분조건이 통계학적 상관계수로 정의될 수 없음을 재삼 확인시켜 준다. 요약하면, 상호의존의 가능성이 있는 두 확률변수가 존재하는 기대효용모형에서 베르누이원칙의 성립여부를 확인하기 위해서는 통계학적 상관계수보다 강력하게 정의되는 또 다른 상호의존성의 척도가 절실히 요구된다.

이런 맥락에서 우리의 연구주제와 보다 직접적인 연계선 상에 있는 논문들은 Aboudi · Thon(1995) 및 홍순구(2001, 2004)가 된다. 먼저 Aboudi · Thon(1995)은 배경위험과 보험위험이 Lehmann(1966)에 의해 개발된 '음(-)의 회귀의존성(Negative Regression Dependence)' 관계에 있는 경우 보험계약자는 전부보험(full insurance)을 선택한다는 결과를 제2차 확률지배이론으로 입증했다. 즉 Aboudi · Thon(1995)은 베르누이원칙이 성립되기 위한 충분조건으로 음(-)의

2) 즉, 배경위험과 보험위험이 서로 음(-)의 상관관계(negative correlation)에 있는 경우 보험계약자는 가능하다면 초과보험을 구입하려고 한다. 하지만 일반적으로 초과보험이 허용되지 않는 현실에서 보험계약자는 차선책으로 전부보험을 구입하게 되므로 우리는 베르누이원칙이 성립한다고 표현한다.

3) 이 논문의 V장에서 Schlesinger(2000)의 원문을 발췌한 부분을 참조바람.

회귀의존성을 유도한 것이다. Aboudi · Thon(1995)의 결과는 무엇보다, 평균 · 분산이론의 한계를 극복하는 일반 의사결정모형(제2차 확률지배이론)에서, 통계학적 상관계수 이외의 보다 강력한 상호의존도 측정수단을 적용해 두 확률변수 하에서 성립하는 베르누이원칙의 충분조건을 처음으로 제시했다는 점에서 큰 의의를 갖는다. 하지만, 결론적으로 말하면 Aboudi · Thon(1995)의 충분조건은 너무 제약적이다. 즉 Aboudi · Thon(1995)의 음(-)의 회귀의존성은 베르누이원칙이 성립하는데 요구되는 수준 이상으로 너무 좁은 범위에서 정의된 상호의존성의 개념이 된다. 우리 논문의 제IV장에서는 Aboudi · Thon(1995)에서의 음(-)의 회귀의존성이 충족되지 않더라도 베르누이원칙이 성립되는 결합확률분포를 구체적으로 예시한다.

한편 홍순구(2001, 2004)에서는 Aboudi · Thon(1995)보다는 진전된 결과가 도출된다. 즉 홍순구(2001, 2004)는 배경위험과 보험위험 간에 Brumelle(1974)이 정의한 음(-)의 상호의존성이 있는 경우 베르누이원칙이 성립함을 기대효용이론으로 입증했다. 여기서 Brumelle(1974)에 의한 음(-)의 상호의존성 개념은 Aboudi · Thon(1995)에서 적용된 음(-)의 회귀의존성을 포함하는 보다 광범위한 상호의존성 개념이기 때문에 결과적으로 홍순구(2001, 2004)는 베르누이원칙이 성립이 할 수 있는 두 확률변수 간의 범위를 더욱 넓혀주는 성과를 보여준다.

하지만 홍순구(2001, 2004)의 연구결과들도 역시, Aboudi · Thon(1995)에서와 유사하게, 필요 이상으로 제한된 범위에서 베르누이원칙의 충분조건들을 제시하고 있기는 마찬가지다. 즉 Brumelle(1974)의 음(-)의 상호의존성 개념은 베르누이원칙이 성립되는데 필요한 절대적인 상호의존적 조건이 되지 못하고 있다. 다시 말하면 우리는 Brumelle(1974)이 개발한 음(-)의 상호의존성 조건을 충족되지 않는 확률분포에서도 얼마든지 베르누이원칙이 성립되는 경우를 발견할 수 있기 때문이다. 이에 관한 구체적 예시도 다음 IV장에서 확인할 수 있다. 단적으로, 이런 부족함의 이유는 Brumelle(1974)의 음(-)의 상호의존성도, 정도의 차이는 있겠지만, 음(-)의 회귀의존성과 마찬가지로 하나의 단순한 충분조건일 뿐이기 때문이다.

우리의 논문에서는 베르누이원칙에 관한 기존의 연구결과들을 두가지 측면에서 개선한다. 그 하나는 베르누이원칙이 성립되기 위한 충분조건을 보다 일반화시키는 것이다. 즉, 이 논문에서 적용하는 Wright(1987)의 기대의존성(Expectation

Dependence)은 Aboudi · Thon(1995)에서의 회귀의존성(Negative Regression Dependence)은 물론이고 Brumelle(1974)이 개발한 상호의존성(홍순구 2001, 2004)까지도 포함하는 보다 광범위한 상호의존성의 개념이다. 하지만 우리 논문의 보다 근본적인 공헌도는 우리가 제시한 충분조건은 동시에 베르누이원칙의 필요조건이기도 함을 확인한 점이다. 요컨대 우리의 논문에서는 배경위험과 보험위험이 동시적으로 존재하는 경우 Wright(1987)가 정의한 기대의존성의 개념을 적용해 베르누이원칙이 성립 또는 위배되는데 요구되는 필요 · 충분조건들은 간단 명료하게 제시하고, 또 확률분포의 구체적 예시들을 통해 그 결과를 기존의 결론들과 비교 · 분석해 본다. 이 논문은 다음과 같은 순서로 진행된다. II장에서는, 주로 재무경제학의 분야에서 활용되고 있는, 두 위험간의 상호의존도를 측정하는 여러 개념들을 소개한다. 구체적으론, 회귀의존성과 기대의존성 및 Brumelle(1974)의 상호의존성 그리고 또 하나의 핵심적 상호의존성 개념인 사분의존성에 관한 정의와 주요 관련정리들을 언급하고, 아울러 각 상호의존성 측정수단들 간의 연관성도 요약해 본다. III장에서는 Wright(1987)의 기대의존성을 이용해 베르누이원칙이 성립 또는 위배되는데 요구되는 필요 · 충분조건들은 유도한다. 다음 IV장에서는 III장에서 유도한 기대의존성(Expectation Dependence)을 충족하는 여러 결합확률분포의 사례들을 예시한다. 이 사례들은 Aboudi · Thon(1995) 및 홍순구(2001, 2004)의 연구결과가 보여주는 한계성을 지적하는 역할도 함께 수행하게 된다. 끝으로 V장에서는 요약과 함께 우리의 논문을 마무리진다.

II. 상호의존성의 척도

아마도 우리에게 두 확률변수간의 상호의존도를 측정하는 가장 익숙한 개념은 공분산 또는 통계학적 상관계수일 것이다. 하지만 실제로는 공분산 이외에도 많은 상호의존성 측정수단들이 개발되어 있다. II장에서는 이런 척도들을 소개한다. 즉 우리 논문의 중심적 역할을 하는 기대의존성과 기대의존성과 연계되어 있는 상호의존성의 또 다른 주요 개념들이 정리된다. 요컨대 이번 II장에서 요약 · 정리하는 여러

상호의존성 척도들 간의 관련성은 베르누이원칙의 충분조건에 대해 그 과부족을 판가름할 수 있는 기준의 역할을 수행할 수 있다. 먼저 우리는 II장에서 자주 사용되는 다음 기호를 정의한다.

W	$\equiv$	보험계약자의 배경위험(exogenous background risk) 또는 보험계약자가 보유하고 있는 초기의 위험자산(initial random wealth); 확률변수
ω	$\equiv$	위험자산 W 의 실현가능한 값; $-\infty < \omega < \infty$
X	$\equiv$	보험구입이 가능한 순수위험; 확률변수
x	$\equiv$	순수위험 X의 실현가능한 값; $0 \leq x < \infty$
Pr(•)	$\equiv$	사건 '•'가 발생할 확률
$f(x, \omega)$	$\equiv$	X와 W의 결합확률밀도함수(joint probability density function), 또는 X와 W의 결합확률질량함수(joint probability mass function)
$F(x,\omega)$	$\equiv$	X와 W의 누적결합확률분포함수(joint probability function); 즉 $F(x,\omega)=\Pr(x \leq X, \omega \leq W)$
$F_x(x)$	$\equiv$	X와 한계확률분포함수(marginal probability distribution function); 즉 $F_x(x)=\Pr(X \leq x)$
$F_w(\omega)$	$\equiv$	W의 한계확률분포함수; 즉 $F_w(\omega)=\Pr(W \leq \omega)$

1. 상호의존성의 척도

가. 회귀의존성

Lehmann(1966)에 의해 개발된 회귀의존성(Regression Dependence)은 우리 논문에서 소개되는 가장 강력한, 또는 가장 좁은 범위에서 정의되는, 상호의존도 개념으로 다음과 같이 정의된다(Lehmann, 1966)[4].

〈회귀의존성의 정의〉

■ X는 W에 대해 음(-)의 회귀의존성(Negative Regression Dependence)

$\Pr(X \leq x | W = \omega)$가, 모든 x에 대해, ω의 증가함수이면 X는 W에 대해 '음(-)의 회귀의존성'이 있다고 정의하고, $NRD(X|W)$고 표기한다.

■ X는 W에 대해 양(+)의 회귀의존성(Positive Regression Dependence)

$\Pr(X \leq x | W = \omega)$가, 모든 x에 대해, ω의 감소함수이면 X는 W에 대해 '양(+)의 회귀의존성' 이 있다고 정의하고, $PRD(X|W)$라고 표기한다.

위의 정의에서 유의할 점은 회귀의존성은 일반적으로 X와 W가 서로 대칭적인 (Symmetric) 관계에서 성립되는 개념이 아니라는 사실이다. 예컨대 음(-)의 회귀의존성관계에서, $NRD(X|W)$이더라도 $NRD(W|X)$은 얼마든지 성립하지 않을 수 있다. 물론 양(+)의 회귀의존성도 마찬가지 경우에 해당한다. 즉,

$$NRD(X|W) \quad \not\leftrightarrow \quad NRD(W|X)$$

$$PRD(X|W) \quad \not\leftrightarrow \quad PRD(W|X)$$

참고로 말하면 회귀의존성의 비대칭성에 관한 실제 확률분포의 예는 Aboudi · Thon(1995) 등에서 찾아볼 수 있다.

나. 사분의존성

사분의존성(Quadrant Dependence)은 앞의 회귀의존성보다는 다소 완만하게 정의된 상호의존성의 개념으로, 특히 재무경제학에서 보다 다양하게 활용되고 있다[5].

4) 회귀의존성(Regression Dependence)에 관한 정의는 Lehmann(1966) 이외에도 Brumelle(1974), Wright(1987) 또는 Aboudi · Thon(1995) 등에서 확인해 볼 수 있다.

〈사분의존성의 정의〉

■ X는 W는 서로 음(-)의 사분의존성(Negative Quadrant Dependence)

모든 (x, ω)에 대해 $F(x, \omega) \leq F_x(x)F_w(\omega)$이면 X와 W는 서로 '음(-)의 사분의존성' 관계에 있다고 정의하고, *NQD*고 표기한다.

■ X와 W는 서로 양(+)의 사분의존성(Positive Quadrant Dependence)

모든 (x, ω)에 대해 $F(x, \omega) \geq F_x(x)F_w(\omega)$이면 X와 W는 서로 '양(+)의 사분의존성' 관계에 있다고 정의하고, *PQD*라고 표기한다.

위의 정의에서 명확하게 확인할 수 있는 것처럼 사분의존성은 X와 W가 서로 대칭적(symmetric) 관계에서 성립되는 개념이다. 즉, X가 W에 대해 음(-)의 [또는 양(+)의] 사분의존성 관계에 있으면 W도 X에 대해 음(-)의 [또는 양(+)의] 사분의존성 관계에 놓이게 된다. 그런데 우리 보험경제학의 관점에선 위의 사분의존성에 대해 그 정의 이상으로 중요한 정리(Proposition)가 하나 있다. 바로 사분의존성의 개념을 효용함수 u(단, $u' > 0$ 그리고 $u'' < 0$)와 결합시킬 수 있는 내용이다. 이 내용은 다음과 같이 요약된다[6].

5) 사분의존성은 Lehmann(1966)에 의해 처음 정의된 개념으로 재무경제학 논문인 Epstein · Tanny(1980)과 Wright(1987) 그리고 Aboudi · Thon(1995) 등에서도 소개되어 있다. 특히, Epstein · Tanny(1980)은 '사분의존성' 대신 '일반 상관계수(generalized correlation)'란 용어를 사용하고 있다. 즉, 다음 항목의 〈그림 1〉에서 정리된 것처럼 양(+)의 또는 음(-) 사분의존성은 동시에 양(+)의 또는 음(-) 상관계수를 포함하는 개념이 된다.

6) 다음 〈사분의존성의 정리〉에 관한 증명은 Esary · Proschan · Walkup(1967) 또는 Epstein · Tanny(1980, Theorem 8) 등에서 확인할 수 있다.

〈사분의존성의 정리〉

■ X와 W가 서로 '음(-)의 사분의존성' 이면 그 경우에 한해서만, 모든 증가함수 h 및 g에 대해 $Cov[h(X), g(W)] \le 0$ 이 성립된다. 즉,

$$NQD \leftrightarrow Cov[h(X), g(W)] \le 0$$

■ X와 W가 서로 '양(+)의 사분의존성' 이면 그 경우에 한해서만, 모든 증가함수 h 및 g에 대해 $Cov[h(X), g(W)] \ge 0$ 이 성립된다. 즉,

$$PQD \leftrightarrow Cov[h(X), g(W)] \ge 0$$

요약하면 위의 〈사분의존성의 정리〉는 X와 W가, 모든 증가함수 h및 g에 대해 $h(X)$와 $g(W)$가 서로 음(-)의 [또는 양(+)의] 상관성(correlation)이 있는 경우에 한해서만, 음(-)의 [또는 양(+)의] 상호의존성이 있다고 정의하는 내용이다. 공분산의 정의에서 h 및 g가 1차증가함수로만 정의되는 것과 비교하면, 사분의존성은 공분산 보다 훨씬 강화된 상호의존성의 개념임을 쉽게 짐작할 수 있겠다. 아울러 다음에 소개하는 기대의존성은 이제 이 사분의존성과 공분산의 중간적 강도로 정의되는 상호의존성의 개념이 된다.

다. 기대의존성

이번엔 우리 논문의 궁극적 관심사인 기대의존성의 정의와 그 관련 정리들을 살펴본다(Wright, 1987). 이 기대의존성은 회귀의존성 및 사분의존성보다 넓은 범위에서 정의되고 있으며, 또한 다음 항목의 〈그림 1〉에서 확인할 수 있는 것처럼 Brumelle(1974)의 상호의존성 개념보다도 완화되어 있는 개념이다.

〈기대의존성의 정의〉

■ X의 W에 대한 엄격한 음(-)의 기대의존성(Strict Negative Expectation Dependence)

모든 ω에 대해 $E(X|W\leq\omega)\geq E(X)$이고 임의의 ω에 대해 $E(X|W\leq\omega)>E(X)$이면, X는 W에 관해 '엄격한 음(-)의 기대의존성'에 있다고 정의하고, 'Strict $NED(X|W)$'라고 표기한다.

■ X는 W에 대해 기대의존성이 없음(No Expectation Dependence)

모든 ω에 대해 $E(X|W\leq\omega)=E(X)$이면, X는 W에 관해 '기대의존성이 없다'고 정의하고, 'Not $ED(X|W)$'라고 표기한다.

■ X의 W에 대한 엄격한 양(+)의 기대의존성(Strict Positive Expectation Dependence)

모든 ω에 대해 $E(X|W\leq\omega)\leq E(X)$이고 임의의 ω에 대해 $E(X|W\leq\omega)<E(X)$이면, X는 W에 관해 '엄격한 양(+)의 기대의존성'에 있다고 정의하고, 'Strict $PED(X|W)$'라고 표기한다.

우리는 기대의존성을, III장에서 전개될 우리의 논의와 부합하게끔, 세 경우로 나누어 정의했다. 실제로 Wright(1987)에서도 '기대의존성(Expectation Dependence)'과 '엄격한 기대의존성(Strict Expectation Dependence)'을 구분하고 있다. 즉 Wright(1987)는 모든 ω에 대해 $E(X|W\leq\omega)\geq E(X)$이 성립하는 경우 X는 W에 대해 '음(-)의 기대의존성[$NED(X|W)$]'이 있다고 정의한다(Wright 1987, 114쪽). 요컨대 '음(-)의 기대의존성[$NED(X|W)$]'은 '엄격한 음(-)의 기대의존성[Strict $NED(X|W)$]'과 '기대의존성이 없는[Not $NED(X|W)$]' 경우를 모두 포함하는 개념임을 명백히 하고 있는 것이다. 물론 '양(+)의 기대의존성[$PED(X|W)$]'도 '엄격한 양(+)의 기대의존성[Strict $PED(X|W)$]'과 '기대의존성이 없는[Not $ED(X|W)$]' 경우를 모두 포함한다. 더 나아가서는 회귀의존성과 사분의존성에서도 같은 방법으로 '엄격한' 경우를 분리시킬 수 있겠다.

한편 기대의존성도, 회귀의존성의 경우처럼, 일반적으로 X와 W는 서로 대칭적(symmetric) 개념이 아니다. 즉,

$$NED(X|W) \quad \not\leftrightarrow \quad NED(W|X)$$

$$PED(X|W) \quad \not\leftrightarrow \quad PED(W|X)$$

다음은 기대의존성의 개념과 효용함수를 연계시킬 수 있는 실용성 높은 정리이다. 이 정리는 III장에서 전개되는 우리의 논의와도 직접 연계되는 중요한 내용을 서술한다.

〈기대의존성의 정리〉

■ X가 W에 대해 엄격한 음(-)의 기대의존성이면, 그 경우에 한해, 단조증가함수 $g(g'>0)$에 관해 $Cov[X,g(W)]<0$ 이 된다. 즉,

$$\text{Strict } NED(X|W) \leftrightarrow Cov[X,g(W)]<0$$

■ X가 W에 대해 기대의존성이 없으면, 그 경우에 한해, 단조증가함수 $g(g'>0)$에 관해 $Cov[X,g(W)]=0$이 된다. 즉,

$$\text{Not } ED \leftrightarrow Cov[X,g(W)]=0$$

■ X가 W에 대해 엄격한 양(+)의 기대의존성이면, 그 경우에 한해, 단조증가함수 $g(g'>0)$에 관해 $Cov[X,g(W)]>0$이 된다. 즉,

$$\text{Strict } PED(X|W) \leftrightarrow Cov[X,g(W)]>0$$

위의 〈기대의존성의 정리〉는 Wright(1987)가 서술하고 증명한 내용을 거의 그대로 요약한 것이다(Wright 1987, Theorem 3.1 및 Corollary). 하지만 실제로는 Wright(1987) 이전에 이미 Hildreth · Tesfatsion(1977)는, 물론 Wright(1987)가 명명한 기대의존성이란 용어를 사용하고 있지는 않지만, Wright(1987)의 기대의존성과 완전히 동일한 내용을 음(-)의 상호의존성의 한 척도로 언급한 바 있다.

즉 Hildreth · Tesfatsion(1977)는 X가 W의 단조감소함수 k(즉 $k' < 0$)와 양(+)의 상관관계에 있는 경우를 음(-)의 상호의존성의 하나로 정의하고 있었다[Hildreth · Tesfatsion(1977), Theorem 1의 (i)]. 요컨대 Hildreth · Tesfatsion(1977)의 표현을 빌리면, 우리는 〈기대의존성의 정리〉에서 음(-)의 기대의존성을 다음과 같이 서술할 수 있겠다. 즉, "X가 W에 대해 음(-)의 기대의존성이면, 그 경우에 한해, 단조감소함수 k에 대해 $Cov[X, k(W)] > 0$이 된다". 양(+)의 기대의존성도 위와 같은 방법으로 표현할 수 있음은 물론이다. 즉,

$$NED(X|W) \quad \leftrightarrow \quad Cov[X, k(W)] > 0$$

$$PED(X|W) \quad \leftrightarrow \quad Cov[X, k(W)] < 0$$

이런 Hildreth · Tesfatsion(1977)의 표현은 〈기대의존성의 정리〉를 한계효용함수 u'(단, $u'' < 0$)와 보다 쉽게 결합시킬 수 있는 장점이 있다.

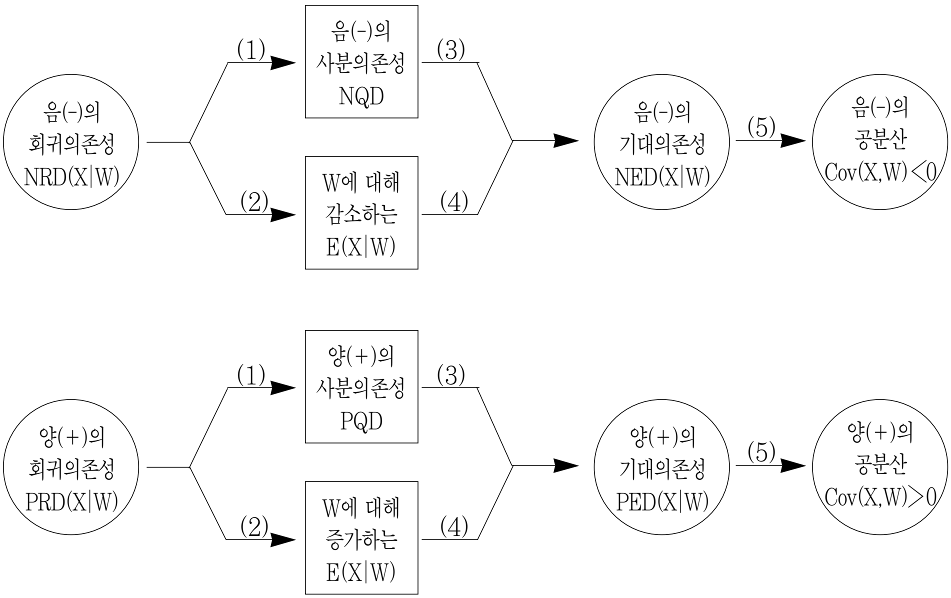
또한 〈사분의존성의 정리〉와 〈기대의존성의 정리〉를 비교해 보면 우리는 기대의존성이 사분의존성과 공분산 간의 중간적 위치에서 정의되는 상호의존성 개념임을 쉽게 파악할 수 있겠다. 먼저 기대의존성에서는, 〈사분의존성의 정리〉에서 나오는 모든 형태의 증가함수 $h(X)$가 1차증가함수 X만으로 그 내용이 대폭 완화되어 있다. 또한 〈기대의존성의 정리〉에서 증가함수 $g(W)$는 모든 형태의 증가함수를 포함하는 개념이 되므로, $g(W) = W$로 정의되는 공분산보다는 훨씬 강화된 개념이다. 상호의존성 척도들 간의 이런 관련성들은 보다 명확하게 다음 항목에서 〈그림 1〉로 요약된다.

2. 상호의존성 개념들 간의 관련성

앞의 항목에서 소개된 회귀의존성과 사분의존성 및 기대의존성의 개념에 Brumelle(1974)의 상호의존성과 공분산까지 포함시키면 경제학 및 재무학에서 가

장 빈번히 소개되는 모두 다섯 가지의 상호의존성 개념이 된다. 이 다섯 가지의 상호의존성 척도 간에는 다음과 같은 연관성이 있다.

〈그림 1〉 상호의존성 개념들 간의 관련성



위의 〈그림 1〉에서 우리는 편의상 음(-)의 상호의존성 개념들 간의 관련성만 설명하기로 한다. 물론 양(+)의 상호의존성 개념들 간에도 동일한 논리의 관련성이 존재한다. 〈그림 1〉에서 화살표 (1)의 관련성은 Lehmann(1966)에, 화살표 (2)의 관련성은 Brumelle(1974)에 증명되어 있다. 또한 화살표 (3)과 (4) 및 (5)에 관한 구체적인 증명은 모두 Wright(1987)에서 찾아 볼 수 있다[7].

7) 특히 화살표 (4)의 증명과정은 Wright(1987) 이전에 Hildreth · Tesfatsion(1977)에 보다 상세히 서술되어 있었다. 좀 더 부연하면, Hildreth · Tesfatsion(1977)의 정리 1(Theorem 1)에서 서술하는 (i)의 내용은 실질적으로 '음(-)의 기대의존성'을 의미한다. 따라서 Hildreth · Tesfatsion(1977)의 정리 1(Theorem 1)에서 "(iii) → (ii) → (i)"로 이어지는 증명과정은 우리의 〈그림 1〉에서 화살표 (4)를 증명하는 것과 동일하다. Hildreth · Tesfatsion(1977, 383쪽) 참조바람.

그러면 이제 위의 〈그림 1〉에서 확인할 내용은 '음(-)의 사분의존성(Negative Quadrant Dependence)' 과 Brumelle(1974)이 유도한 음(-)의 상호의존성인 'ω에 대해 감소하는 $E(X|W=\omega)$' 와의 관련성을 규명하는 것만이 남는다. 저자가 알고 있는 한, 이 두 상호의존성 척도 간의 관계는 아직은 다른 어느 문헌에서도 조사하지 않고 있는 내용이다. 예를 들면, Wright(1987)에서도 기대의존성과 사분의존성 또는 기대의존성과 Brumelle(1974)의 상호의존성 간의 연계성은 각각 설명되어 있으나, 사분의존성과 Brumelle(1974)의 상호의존성 간의 관계에 관해서는 아무런 언급도 되어 있지 않다. 하지만 우리는 두 상호의존도 간에 아무런 직접적 관련성이 없다는 것을 확증할 수 있다. 다시 말하면, '음(-)의 사분의존성' 이나 또는 'ω에 대해 감소하는 $E(X|W=\omega)$' 는 어느 하나의 개념도 다른 개념을 포함하지 않는 서로 독립된 개념이 된다. 우리는 두 상호의존도 간의 이같은 '무관성(irrelevance)' 을 결합확률분포에 관한 예시로써 확인할 수 있겠다. 이 구체적인 결합확률분포의 예시는 IV장에서 제시하기로 한다. 물론, '음(-)의 사분의존성' 과 'ω에 대해 감소하는 $E(X|W=\omega)$' 의 두 상호의존성이 동시에 충족되는 경우는 얼마든지 존재한다. 예컨대 X가 W에 대해 '음(-)의 회귀의존성' 성향을 갖는 경우 등이다. 결과적으로 이같은 내용들은 위의 〈그림 1〉에서 처럼 '음(-)의 회귀의존성' 으로 부터 갈라진 두 화살표로 '음(-)의 사분의존성' 과 'ω에 대해 감소하는 $E(X|W=\omega)$' 이 그려진 이유를 설명해 준다.

참고로 〈기대의존성의 정리〉와 관련해 두가지 특별한 확률분포를 언급해 본다. 먼저 X와 W가 독립분포(independent distribution)를 하는 경우다. 이 때는 물론 $Cov[X,g(W)]=0$이 되므로 X와 W가 기대의존성이 없는 경우(Not ED)에 해당한다. 하지만 X와 W가 독립분포를 하지 않는 경우라도, 다시 말하면 결합확률밀도함수(joint probability density function) 또는 결합확률질량함수(joint probability mass function)를 갖더라도, 기대의존성이 없는(Not ED)확률분포는 존재한다[8]. 즉,

$$\text{독립분포}(\textit{Independent Distribution}) \quad \overrightarrow{\not\leftarrow} \quad \text{Not } ED$$

8) IV장에서 〈예시 3〉은 이런 결합확률분포의 구체적 예를 제시한다.

우리가 고려하는 또 하나의 특별한 확률분포는 정규분포의 경우다. X와 W가 정규분포를 하는 경우, 공분산과 기대의존성은 물론이고 사분의존성까지 포함해 이 셋은 서로 완전히 동일한 대칭적 상호의존성 척도가 된다(Wright 1987, Theorem 3.3). 즉

$$NED(X|W) \leftrightarrow NED(W|X) \leftrightarrow Cov(X,W) < 0 \leftrightarrow NQD$$

$$PED(X|W) \leftrightarrow PED(W|X) \leftrightarrow Cov(X,W) > 0 \leftrightarrow PQD$$

III. 베르누이원칙의 필요 · 충분조건

보험구입에의 최적의사결정은 순수위험 뿐만 아니라 외생적 배경위험(exogenous background risk)에 의해서도 영향을 받게 된다. 이런 배경위험을 전통적 순수위험의 분석모형에 가장 간단하게 반영하는 방안은 기초자산을 확률변수로서 고려하는 것이다. 기본적으로 우리의 분석은 전통적인 보험수요모형(Mossin, 1968)에 초기의 위험자산(initial random wealth)을 도입하는 Doherty · Schlesinger(1983a) 및 Turnbull(1983) 또는 홍순구(2001) 등의 모형을 사용하기로 한다[9].

먼저 III장의 분석에서는 II장에 정의된 기호와 함께 다음과 같은 새로운 변수들을 사용한다.

9) 여기서 언급된 논문 이외에도, 많은 보험논문들이 형태는 조금씩 다르지만 기본적으로 초기의 위험자산(initial random wealth)을 도입하는 모형을 활용하고 있다. 예컨대 두가지 불확실성 하에서 최적비례보험계수(optimal coinsurance rate)에 관한 비교정태분석을 수행한 Meyer(1992)와 Dionne · Gollier(1992)의 보험수요모형도 이 이런 범주의 논문들에 속한다고 할 수 있다.

a ≡ 비례보험계수 $(0 \leq a)$

P ≡ 전부보험$(a=1)$을 구입하는 경우의 보험료

aP ≡ $a(0 \leq a)$만큼 비례보험을 구입하는 경우의 보험료

Y ≡ 보험계약자의 기간말(期間末) 부(富); 확률변수

y ≡ Y의 실현가능한 값 $(-\infty < y < \infty)$

즉, $y = \omega - aP - (1-a)x$

$u(y)$ ≡ 효용함수; 엄격한 오목함수를 가정, 즉, $u'(y) > 0$, $u''(y) < 0$

보험계약자는 위험자산을 포함한 W(확률변수, $-\infty < W < \infty$)의 기초(期初) 자산을 보유하고 있고, 이 자산은 X(확률변수, $0 \leq X < \infty$)만큼의 손실위험에 노출되어 있다. 보험계약자는 손실위험에 대비해 비례보험계약(coinsurance contract)을 체결할 수 있다고 가정한다. 아울러, 베르누이원칙을 분석하는 우리의 연구목적에 부합하게끔, 보험료는 보험계리적인 가치로만 책정됨을 가정한다. 즉, 전부보험$(a=1)$을 구입하는 경우의 보험료를 P라고 표기하면 $P=E(X)$가 된다. 따라서, 보험계약자가 $a(0 \leq a)$만큼 비례보험을 구입하는 경우 그는 보험료 aP를 지불하게 되고, 만약 손실 X가 발생하는 경우 aX의 보험금을 지급받는다. 요컨대 보험계약자의 기간말(期間末) 자산 Y는 다음과 같이 표시된다.

$$Y = W - aP - (1-a)X$$

이제 보험계약자는 다음과 같이 $H(a)$로 정의되는 기대효용의 극대화를 목표로 최적보험계수 $a(0 \leq a)$를 선택하게 된다.

$$H(a) \equiv E[u(Y)] = \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} u[\omega - aP - (1-a)x] \; f(x,\omega)\, dx\, d\omega$$

H를 극대화하는 데 필요한 1차조건과 2차조건은 각각 아래의 식으로 나타난다.

$$H'(a) = \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} u'[\omega - aP - (1-a)x](-P+x) f(x,\omega)\, dx d\omega$$

$$= E[u'(Y)(-P+X)]$$

$$H''(a) = \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} u''[\omega - aP - (1-a)x](-P+x)^2 f(x,\omega)\, dx d\omega$$

$$= E[u''(Y)(-P+x)^2]$$

$$< 0$$

위의 2차조건에서 확인할 수 있는 것처럼, $u'' < 0$의 가정에 의해 H는 a에 관한 엄격한 오목함수 또는 '잘 정의된 오목함수(well-defined concave function)'가 되므로, 이제 1차조건 $H'(a^*)=0$을 충족하는 a^*는 기대효용 H를 극대화시키는 유일근(unique solution)이 된다. 우리는 이런 1차조건과 기대의존성의 개념을 활용하면, 다음 〈정리〉에서와 같이, 베르누이원칙이 성립 또는 위배되는 경우의 필요 · 충분조건을 유도할 수 있다.

〈정리〉

(1) 보험계약자는, X가 W에 대해 엄격한 음(-)의 기대의존성인 경우에 한해서만, 초과보험을 구입한다.

$$\text{Strict } NED(X|W) \leftrightarrow a^* > 1$$

(2) 보험계약자는, X가 W에 대해 기대의존성이 없는 경우에 한해서만, 전부보험을 구입한다.

$$\text{Not } ED \leftrightarrow a^* = 1$$

(3) 보험계약자는, X가 W에 대해 엄격한 양(+)의 기대의존성인 그 경우에 한해서만, 일부보험을 구입한다.

$$\text{Strict } PED(X|W) \leftrightarrow a^* < 1$$

〈증명〉 H는 a에 관해 '잘 정의된 오목함수'이므로(즉, $H'' < 0$), $a^* > 1$는 $H'(1) > 0$인 경우에 한해서만 성립한다. 그리고 $H'(1) > 0$의 부등식은 다음과 같이 X가 W에 대해 '음(−)의 기대의존성 즉, $NED(W|X)$인 경우에 한해서만 성립하게 된다.

$$\begin{aligned} H'(1) &= \int_{\omega=-\infty}^{\infty}\int_{X=0}^{\infty} u'(\omega-P)(-P+x)f(x,\omega)dxd\omega \\ &= E[u'(W-P)(-P+X)] \\ &= E[u'(W-P)]\cdot[-P+E(X)]+Cov[X,u'(W-P)] \\ &= Cov[X,u'(W-P)] \end{aligned}$$

위의 식 우변에서 $u'' < 0$이므로 u'는 W에 대해 엄격한 감소함수가 된다. 또한 엄격한 감소함수 u'에 대해 $Cov[X,u'(W-P)] > 0$인 것은, 〈기대의존성의 정리〉 (1)에서의 엄격한 증가함수 g에 대해 $Cov[X,g(W)] < 0$과 동등하다[Hildreth · Tesfatsion (1977), Theorem 1의 (i)을 참조바람]. 결국 $H'(1) > 0$, 즉 모든 엄격한 감소함수 u'에 대해 $Cov[X,u'(W-P)] > 0$는 X가 W에 대해 '엄격한 음(−)의 기대의존성[Strict $NED(W|X)$]' 인 경우에 한해서만(if and only if) 성립하는 내용이 된다. 이것으로 위의 〈정리〉 (1)의 증명은 완결된다.

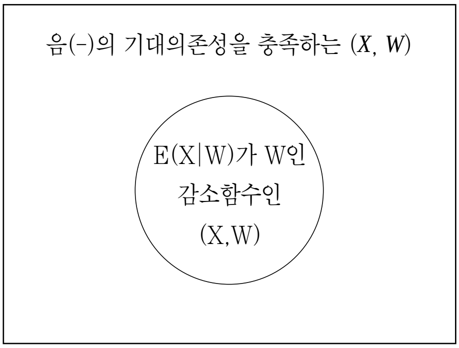
또한 X가 W에 대해 기대의존성이 없으면(Not ED), 그 경우에 한해 모든 증가함수(또는 감소함수) g에 대해 $Cov[X,g(W)]=0$이 되므로, 따라서 $Cov[u'(W-P),X]=0$이 된다. 이것은 위의 정리 (2)의 증명 내용이 된다. 정리 (3)의 증명은 정리 (1)의 증명과 거의 유사하다. Q.E.D.

위의 〈정리〉 (1)과 (2)는 순보험료의 스케쥴 하에서 보험계약자가 전부보험을 선택하는 베르누이원칙을 의미한다[10]. 단적으로, 위의 〈정리〉는 Aboudi · Thon(1995) 그리고 홍순구(2001, 2004)의 연구결과들을 보다 일반화시킨 내용이 된다. 특히 이 결과를 홍순구(2001)에서의 정리(Proposition)와 비교해 보면,

10) 물론 여기서 〈정리〉 (1)의 내용이 베르누이원칙을 의미한다는 것은 초과보험이 법적으로 제한되어 차선책으로 전부보험을 구입하는 경우를 뜻한다.

일견 외형적으로는 유사해 보일 수 있으나 실제로는 크게 개선된 내용을 제시하고 있다. 즉 홍순구(2001)에서는 단순히 베르누이원칙의 충분조건 범위를 Brumelle(1974)에 의한 음(-)의 상호의존성으로, 즉 $\frac{\partial}{\partial \omega} E(X|W=\omega) < 0$ 또는 ω에 대해 감소하는 $E(X|W=\omega)$으로, 국한시켰지만 본 〈정리〉에서는 그보다 광범위하게 정의되는 음(-)의 상호의존성 개념인 $NED(X|W)$으로 필요 · 충분조건을 규정한 점이다(〈그림 2〉 참조바람). 요컨대 'ω에 대해 감소하는 $E(X|W=\omega)$' 의 요건을 충족하지 못하는 (X, W)의 결합확률분포 중에는 음(-)의 기대의존성 $NED(X|W)$을 충족하는 (X, W)의 결합확률분포가 존재한다. 이에 관한 예는 Ⅳ장의 〈예시 1〉에서 소개된다.

〈그림 2〉 기대의존성과 Brumelle(1974)의 상호의존성



부연하면, 아직 보험관련논문에서 언급된 적은 없지만, 또 다른 음(-)의 상호의존성 척도인 '음(-)의 사분의존성(Negative Quadrant Dependence)' 에 대해서도 위와 유사한 언급을 할 수 있다. 즉,

$$NQD \underset{\not\leftarrow}{\rightarrow} a^* \geq 1$$

즉, 배경위험과 보험위험이 서로 음(-)의 사분의존성이면 베르누이원칙은 성립한다. 하지만 음(-)의 사분의존성 역시 하나의 충분조건일 뿐으로 우리 〈정리〉에서의

‘기대의존성’ 보다는 불필요하게 제약된 개념이다(〈그림 1〉 참조바람). 다음 IV장의 예시들은 이런 내용을 보다 구체적인 확률분포로 확인시켜 준다.

IV. 기대의존성 확률분포의 예시

이번 IV장에서는 기대의존성과 관련해 몇가지 확률분포를 예시한다. 각 예시들은 Aboudi · Thon(1995) 그리고 홍순구(2001, 2004)의 연구결과가 베르누이원칙의 충분조건을 너무 제약적으로 규정했음을 가시적으로 보여주고, 또 예고된 바처럼 우리의 〈정리〉가 베르누이원칙에의 적확한 필요 · 충분조건을 제시했음을 다시 한 번 확인시켜 준다.

1. 음(-)의 기대의존성 확률분포

〈예시 1〉

$f(x,\omega)$

W \ X	$x=1$	$x=2$	$x=3$
$\omega=4$	0.15	0	0.05
$\omega=5$	0	0.25	0
$\omega=6$	0.55	0	0

결론부터 말하면, 〈예시 1〉의 와 의 결합확률분포는 다음과 같은 상호의존성 특징을 갖는다. 즉,

(1) X는 W에 대해 음(-)의 회귀의존적이 아님

(2) X와 W는 서로 음(-)의 사분의존적이 아님
(3) $E(X|W=\omega)$는 ω에 대해 감소함수가 아님; 즉 Brumelle(1974)이 정의한 음(-)의 상호의존성 요건을 충족시키지 못함
(4) 그러나, X는 W에 대해 음(-)의 기대의존적임

그러면 이제 위의 네가지 내용들을 차례로 확인해 본다. 먼저 계산의 편의를 위해 X와 W의 누적결합확률분포 $F(x,\omega)=\Pr(x\le X,\omega\le W)$및 각 확률변수의 한계확률분포 $F_X(x)=\Pr(X\le x)$와 $F_W(\omega)=\Pr(W\le\omega)$를 각각 작성해 보면 다음과 같다.

$F(x,\omega)$

W \ X	$x=1$	$x=2$	$x=3$
$\omega=4$	0.15	0.15	0.2
$\omega=5$	0.15	0.4	0.45
$\omega=6$	0.7	0.95	1

$F_X(x)$

X	$x=1$	$x=2$	$x=3$
$F_X(x)$	0.7	0.95	1

$F_W(\omega)$

W	$\omega=4$	$\omega=5$	$\omega=6$
$F_W(\omega)$	0.2	0.45	1

위의 표들을 이용하면 각 상호의존성의 충족여부는 다음과 같이 쉽게 확인할 수 있다.

■ X는 W에 대해 음(-)의 회귀의존적이 아님

먼저, X는 W에 대해 음(-)의 회귀의존적[$NRD(X|W)$]이 아니다. 그 이유는, X가 W

에 대해 음(-)의 회귀의존성을 가지려면 $\Pr(X \leq x | W = \omega)$가, 모든 x에 대해, ω의 증가함수여야 하지만, 〈예시 1〉의 확률분포에서는 $\Pr(X \leq 1 | W = \omega)$가 ω에 대해 증가함수가 되지 못하기 때문이다. 즉,

$$\Pr(X \leq 1 | \omega = 4) = \frac{0.15}{0.2} = 0.75$$

$$\Pr(X \leq 1 | \omega = 5) = \frac{0}{0.25} = 0$$

$$\Pr(X \leq 1 | \omega = 6) = \frac{0.55}{0.55} = 1$$

위의 결합확률분포표는 물론 Aboudi · Thon(1995, 39쪽)에서의, 우리의 정의와 동등한 내용이지만 다소 다른 방법으로 표현된, 음(-)의 회귀의존성 정의도 충족시키지 못한다.

■ X와 W는 음(-)의 사분의존적이 아님

〈예시 1〉의 확률분포에서 $(x, \omega) = (1, 4)$의 경우 $F(x, \omega) \leq F_X(x) F_W(\omega)$이 충족되지 않는다[II장의 음(-)의 사분의존성 정의를 참조바람]. 따라서 X와 W는 서로 음(-)의 사분의존성[NQD] 관계에 있지 못한다. 즉,

$$F(1, 4) = 0.15 > 0.14 = 0.7 \times 0.2 = F_X(1) F_W(4)$$

■ $E(X | W = \omega)$는 ω에 대해 감소함수가 아님

Brumelle(1974)은 음(-)의 회귀의존성보다는 약하지만 음(-)의 공분산보다는 강한 상호의존성의 개념으로 'ω에 대해 감소하는 $E(X | W = \omega)$' 의 개념을 도입했다.

〈예시 1〉의 결합확률분포표는 Brumelle(1974)의 이런 음(-)의 상호의존성 요건을 충족시키지 못한다. 즉,

$$E(X|\omega=4)=1\times\frac{0.15}{0.2}+3\times\frac{0.05}{0.2}=1.5$$

$$E(X|\omega=5)=2\times\frac{0.25}{0.25}=2$$

$$E(X|\omega=6)=1\times\frac{0.05}{0.05}=1$$

■ X는 W에 대해 음(-)의 기대의존적임

하지만 아래의 식들에서 확인되는 바와 같이, 〈예시 1〉의 결합확률분포는 $\omega=4$ 및 $\omega=5$에 대해 엄격한 부등식 $E(X|W\leq\omega)>E(X)$를 충족하고 또한 $\omega=6$에 대해서는 등호(=)로써 부등식 $E(X|W\leq\omega)\geq E(X)$를 충족한다. 요컨대, X는 W에 대해 '엄격한 음(-)의 기대의존성' 즉 $NED(X|W)$의 관계에 있다.

$$E(X|\omega\leq4)=1\times\frac{0.15}{0.2}+3\times\frac{0.05}{0.2}=1.5>1.35=E(X)$$

$$E(X|\omega\leq5)=1\times\frac{0.15}{0.45}+2\times\frac{0.25}{0.45}+3\times\frac{0.05}{0.45}=\frac{16}{9}=1.7778>1.35$$
$$=E(X)$$

$$E(X|\omega\leq6)=1\times\frac{0.7}{1}+2\times\frac{0.25}{1}+3\times\frac{0.05}{1}=1.35=E(X)$$

■ 베르누이원칙의 성립

Aboudi · Thon(1995)은 베르누이원칙이 성립되기 위한 충분조건으로 '음(-)의 회귀의존성'을 제시했다. 따라서, 〈예시 1〉의 결합확률분포는 '음(-)의 회귀의존성'이 아니므로 명백하게 Aboudi · Thon(1995)가 제시한 베르누이원칙의 충분조건에 속하지 않는다. 한편, 홍순구(2001, 2004)에서의 충분조건은 'ω에 대해 감소하는 $E(X|W=\omega)$'이었다. 하지만 〈예시 1〉의 결합확률분포에서 $E(X|W=\omega)$는 ω에 대해 감소함수가 아니므로 홍순구(2001, 2004)의 충분조건의 범위에서도 벗어난다. 그럼에도 불구하고 〈예시 1〉의 결합확률분포에서는 X가 W에 대해 음(-)의 기대의존성을 가지므로, 우리의 〈정리〉에서 입증된 것처럼 베르누이원칙을 충족시키게 된다. 아래의 예는 이런 사실을 확인시켜 준다.

지수효용함수 $u(y)=\sqrt{y}$의 경우 $H'(1)$은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} H'(1) &= E[u'(W-P)(-P+X)] \\ &= \frac{1}{2}\cdot E\left[\frac{X-P}{\sqrt{W-P}}\right] \end{aligned}$$

위의 식에서 $P=E(X)=1.35$임을 기억하면 위의 식 우변의 기댓값은 다음과 같이 양(+)의 값을 갖게 된다. 즉,

$$\begin{aligned} & E\left(\frac{X-P}{\sqrt{W-P}}\right) \\ &= 0.15\times\frac{-0.35}{\sqrt{2.65}} + 0.05\times\frac{1.65}{\sqrt{2.65}} + 0.25\times\frac{0.65}{\sqrt{3.65}} + 0.55\times\frac{-0.35}{\sqrt{4.65}} \\ &= -0.03225 + 0.050679 + 0.085056 - 0.089270 \\ &= 0.014215 \\ &> 0 \end{aligned}$$

요컨대 $H'(1) > 0$이므로 $a^* > 1$이 확인된다. 위의 〈예시 1〉은 X가 W에 대해 음(-)의 기대의존적[$NED(X|W)$]인 경우 베르누이원칙이 성립함을 단적으로 보여줌과 동시에, Aboudi · Thon(1995) 그리고 홍순구(2001, 2004)에서의 충분조건에 대한 부족함을 다시 일깨워 준다.

2. 양(+)의 기대의존성 확률분포

〈예시 2〉

$f(x, \omega)$

W \ X	$x=1$	$x=2$	$x=3$
$\omega=4$	0.05	0	0.15
$\omega=5$	0	0.25	0
$\omega=6$	0	0	0.55

위의 결합확률분포는 X가 W에 대한 ‘양(+)의 기대의존성’을 충족하는 경우다. 하지만 위의 결합확률분포는 X의 W에 대한 ‘양(+)의 회귀의존성’과 ‘양(+)의 사분의존성’을 모두 충족시키지 못하고 또한 ‘ω에 대해 증가하는 $E(X|W=\omega)$’의 성향도 보이지 않는다. 확인 절차는 〈예시 1〉의 경우와 동일하므로 결과만 간단히 스케취하기로 한다.

먼저, $Pr(X \le 2|W=\omega)$는 ω에 대해 감소함수가 아니므로 X는 W에 대한 양(+)의 회귀의존성[$PRD(X|W)$]을 충족하지 못한다. 즉,

$$Pr(X \le 2|\omega=4) = 0.25$$
$$Pr(X \le 2|\omega=5) = 1$$
$$Pr(X \le 2|\omega=6) = 0$$

또한 X와 W는, 예컨대 $(x,\omega)=(2, 4)$에서 $F(x,\omega)\geq F_X(x)F_W(\omega)$의 조건이 충족되지 않으므로, 양(+)의 사분의존성 관계에 있지 않다. 즉,

$$F(2, 4)=0.05<0.06=F_X(2)F_W(4)$$

아울러 〈예시 2〉의 결합확률분포에서 $E(X|W=\omega)$는 ω의 증가함수도 아니다. 즉,

$$E(X|\omega=4)=2.5$$
$$E(X|\omega=5)=2$$
$$E(X|\omega=6)=3$$

하지만 위의 결합확률분포표는 $\omega=4$와 $\omega=5$에 대해서는 엄격하게(<) 그리고 $\omega=6$에 대해서는 등호(=)로 $E(X|W\leq\omega)\leq E(X)$를 충족하므로 X는 W에 대해 엄격한 '양(+)의 기대의존성 $PED(X|W)$ 의 관계에 있다. 즉,

$$E(X|\omega\leq 4)=2.5<2.65=E(X)$$
$$E(X|\omega\leq 5)=\frac{20}{9}\fallingdotseq 2.22<2.65=E(X)$$
$$E(X|\omega\leq 6)=2.65=E(X)$$

한편 홍순구(2001, 2004)는 $E(X|W=\omega)$가 ω에 대해 증가하는 함수이면 보험계약자는 순보험료 하에서라도 일부보험($a^*<1$)을 구입한다는 정리를 유도했다. 하지만 〈예시 2〉의 결합확률분포는 $E(X|W=\omega)$가 ω에 대해 증가함수가 아니더라도, 우리의 〈정리〉에서 처럼 X가 W에 대해 양(+)의 기대의존성[$PRD(X|W)$]을 가지면 일부보험($0\leq a^*<1$)이 최적보험이 된다는 사실을 확인시켜 준다. 예컨대 앞에서 처럼 지수효용함수 $u(y)=\sqrt{y}$의 경우, $P=E(X)=2.65$임에 유의하면, $H'(1)<0$ 즉 $a^*<1$이 된다.

$$H'(1) = \frac{1}{2} \cdot E\left[\frac{X-P}{\sqrt{W-P}}\right] = \frac{1}{2} \cdot (-0.026709) < 0$$

3. 기대의존성이 없는 확률분포

〈예시 3〉

$f(x,\omega)$

W \ X	$x=1$	$x=2$	$x=3$
$\omega=4$	$\frac{1}{72}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{72}$
$\omega=5$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$
$\omega=6$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

독립적 확률분포를 하는 X와 W에서는, II장에서 언급된 바와 같이, 어떤 기대의존성도 없다. 하지만 X와 W가 서로 독립분포를 하지 않는 경우라도 기대의존성이 없는 결합확률분포는 무수히 존재한다. 〈예시 3〉은 그런 예의 하나가 된다.

즉 모든 ω에 대해 $E(X|W\leq\omega)=E(X)$가 충족되는 결합확률분포의 예이다.

$$E(X|\omega\leq4)=E(X|\omega\leq5)=E(X|\omega\leq6)=E(X)=2$$

또한, 위의 확률분포를 지수효용함수 $u(y)=\sqrt{y}$에 적용하면 $H'(1)=0$이 되어, 이 경우의 유일무이한 최적보험은 전부보험($a^*=1$)이 됨도 다시금 확인할 수 있다.

4. 사분의존성과 Brumelle(1974)에 의한 상호의존성 간의 무관성

이번 항목에선 II장에서 예고된 것처럼 사분의존성과 Brumelle(1974)의 상호의존성 간에는 어떤 직접적인 관련성도 없다는 것을 확인한다. 즉, 우리는 두가지 구체적인 확률분포의 예시를 들어 두 상호의존성의 개념 중 어느 것도 다른 하나를 포함하지 않는다는 것을 보이기로 한다.

〈예시 4〉

$f(x, \omega)$

W \ X	$x=0.1$	$x=2$	$x=3.8$
$\omega=4$	0.1	0	0.1
$\omega=5$	0	0.1	0
$\omega=6$	0.7	0	0

〈예시 4〉의 결합확률분포는 '음(-)의 사분의존성'이 Brumelle(1974)의 'ω에 대해 감소하는 $E(X|W=\omega)$'를 포함하는 개념이 아니라는 사실을 단적으로 보여준다. 먼저 〈예시 4〉의 결합확률분포는 모든 (x, ω)에 대해 $F(x, \omega) \le F_X(x)F_W(\omega)$를 충족하므로 X와 W는 서로 '음(-)의 사분의존성' 관계에 있게 된다. 즉,

$$F(0.1, 4)=0.1<0.16=F_X(0.1)F_W(4)$$
$$F(2, 4)=0.1<0.18=F_X(2)F_W(4)$$
$$F(0.1, 5)=0.1<0.24=F_X(0.1)F_W(5)$$
$$F(2, 5)=0.2<0.27=F_X(2)F_W(5)$$

한편, 다른 모든 (x, ω)에 대해서는 $F(x, \omega)=F_X(x)F_W(\omega)$

하지만 〈예시 4〉의 결합확률분포에서 $E(X|W=\omega)$는 ω의 감소함수가 되지 못한다.

$E(X|W=4)=1.95$
$E(X|W=5)=2$
$E(X|W=6)=0.1$

요컨대 〈예시 4〉는 '음(-)의 사분의존성' 이 'ω에 대해 감소하는 $E(X|W=\omega)$' 를 의미하지 않는다는 것을 확인시켜 준다. 즉,

$$NQD \nrightarrow \omega\text{에 대해 감소하는 } E(X|W=\omega)$$

〈예시 5〉

$f(x,\omega)$

W \ X	$x=1$	$x=2$	$x=6$
$\omega=7$	0.15	0	0.05
$\omega=8$	0	0.25	0
$\omega=9$	0.55	0	0

〈예시 5〉의 결합확률분포에서, $E(X|W=\omega)$는 ω의 엄격한 감소함수지만, $(x,\omega)=(1, 7)$에 대해 $F(x,\omega)\leq F_X(x)F_W(\omega)$를 충족시키지 못하므로 X와 W는 서로 '음(-)의 사분의존성' 관계에 있지 않다. 즉,

$E(X|W=7)=2.25$
$E(X|W=8)=2$
$E(X|W=9)=1$

$$F(1,\ 7)=0.15>0.14=F_X(1)F_W(7)$$

요컨대 〈예시 5〉는 'ω에 대해 감소하는 $E(X|W=\omega)$' 가 '음(-)의 사분의존성' 을 의

미하지(imply) 않음을 명시적으로 보여준다. 즉,

ω에 대해 감소하는 $E(X|W=\omega) \not\rightarrow NQD$

물론, 〈그림 1〉에서 보여진 것처럼, '음(-)의 회귀의존성' 성향을 갖는 경우 등 일부의 결합확률분포에선 '음(-)의 사분의존성'과 'ω에 대해 감소하는 $E(X|W=\omega)$'의 두 상호의존성이 동시에 충족될 수 있다. 다음 〈예시 6〉의 결합확률분포표는 이런 경우에 해당한다.

〈예시 6〉

$f(x,\omega)$

X \ W	$x=1$	$x=2$	$x=3$
$\omega=4$	0	0	0.3
$\omega=5$	0	0.4	0
$\omega=6$	0.3	0	0

위의 결합확률분포표는 X가 W에 대해 '음(-)의 회귀의존성' 성향을 갖는 경우다. 따라서 '음(-)의 사분의존성' 및 'ω에 대해 감소하는 $E(X|W=\omega)$'의 두 상호의존성을 동시에 충족하게 된다. 이에 대한 확인은 독자들에게 미루기로 한다. 참고로, 지금까지의 〈예시 4〉와 〈예시 5〉 및 〈예시 6〉은 모두 음(-)의 상호의존성에 관한 예였다. 물론 필요한 경우 양(+)의 상호의존성에 관한 관련예도 쉽게 만들어질 수 있겠다.

V. 요약 및 맺음말

우리의 논문은 순수위험과 함께 외생적 배경위험이 동시적으로 존재하는 상황에서 베르누이원칙을 재조사했다. 우리의 분석모형에서, 외생적 배경위험은 위험자산

을 포함하는 초기의 부(富)를 의미하고 또 이 위험자산은 순수위험과 상호의존성의 가능성이 있는 가장 일반적 상황으로 모델링되었다. 이런 보험분석모형과 관련해, 최근 Schlesinger(2000)는 다음과 같은 난문제를 제기한 바 있다.

> "보험가능위험과 통계학적 상호의존성이 있는 외생적 배경위험이 존재하는 경우, 그 배경위험이 보험수요에 미치는 효과를 명확히 분석해 내기는 어렵다. 그 주된 이유는, 아직 보험수요의 분석에서 요구되는 수준만큼, 배경위험과 보험위험간의 상호의존도를 측정할 수단이 충분히 개발되어 있지 않기 때문이다[11)]"

Schlesinger(2000)의 이같은 의구심에 대해 우리 논문은, 적어도 베르누이원칙에 관해서는, Wright(1987)의 기대의존성을 적용해 명쾌한 해결안을 내놓는다. 즉, 우리는 Aboudi · Thon(1995)에서의 '음(-)의 회귀의존성' 이나 홍순구(2001, 2004)에서의 'ω에 대해 감소하는 $E(X|W=\omega)$' 는 모두 베르누이원칙이 성립되기 위한 조건으로서 불필요하게 너무 제약적인 상호의존성의 개념임을 구체적으로 입증했고, 아울러 우리는 보다 광범위한 상호의존성의 개념인 '음(-)의 기대의존성' 이 베르누이원칙에의 보다 적확한 필요 · 충분조건이 됨을 제시했다. 요컨대 우리 논문의 〈정리〉는 동일한 주제를 분석했던 Doherty · Schlesinger(1983a, 1983b)는 물론 Aboudi · Thon(1995) 및 홍순구(2001, 2004)의 연구결과를, 정도의 차이가 아니라, 근본적으로 개선해 놓았다.

'기대의존성' 의 개념은 다른 보험경제학의 분야에서도 대단히 유용한 개념으로 활용될 수 있겠다. 하지만 이 '기대의존성' 은, 저자가 아는 한, 이 논문을 제외하면 아직은 보험경제학 문헌에서 거의 언급되지 아니한 우리 보험학도에게는 다소 생소한 개념이다. 기대의존성은 향후에도, 그 연관되는 개념인 '상대적 기대의존성

11) 저자는 문맥을 순조롭게 하기 위해 다소간 의역을 했다. 참고로 원문을 소개하면 다음과 같다. "For more general cases of noninterdependent background risk, it becomes difficult to predict the effects on insurance purchasing. Part of the problem is that there is no general measure of dependency that will lead to unambiguous effects on insurance demand." (Schlesinger 2000, 148쪽)

(Relatively Expectation Dependence, Wright 1997)' 과 함께, 특히 다수의 위험들을 동시적으로 고려해야 하는 보험분석모형에서 큰 역할을 해낼 것으로 예상해 본다.

위험자산 투자에의 기회비용을 반영하는 적정보험료의 개념이나 소비자의 최적 보험구입행태 또는 외생적 배경위험이 존재하는 보험수요모형에서의 비교정태분석(comparative static analysis) 등등의 분야는 그 예가 될 것이다. 이에 관한 연구는 후일을 기약해 본다.

참 고 문 헌

홍순구, 「A Reexamination of the Bernoulli Principle Under Initial Wealth Uncertainty」, 『보험학회지』제59집, 2001, pp. 295~306.

홍순구, 「A Mean Preserving Spread Interpretation of the Bernoulli Principle under Initial Wealth Uncertainty」, 『리스크관리연구』 제15권 제2호, 2004 가을, pp. 29~52.

Aboudi, R. and Thon, D., "Second-Degree Stochastic Dominance Decisions and Random Initial Wealth with Applications to the Economics of insurance", *Journal of Risk and Insurance*, 62, No. 1, 1995 March, pp. 30~49.

Brumelle, Shelby L., "When does Diversification Between two Investments Pay?", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, June 1974, pp. 473~482.

Cummins, J. D. and Mahul, O., "The Demand for Insurance With an Upper Limit on Coverage," *Journal of Risk and Insurance*, 71, 2004, pp. 253~264.

Dionne, G. and Gollier, C., "Comparative Statics Under Multiple Sources of Risk With Applications to Insurance Demand," *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory* 17, 1992, pp. 21~33.

Doherty, Neil A., "Efficient Insurance Buying Strategies for Portfolios of Risky Assets", *Journal of Risk and Insurance*, 51, 1984, pp. 205~224.

_______, "Chapter 2 Risk and Utility: Economic Concepts of Decision Rules," *Integrated Risk Management: Techniques and Strategies for Managing Corporate Risk*, 2000, McGraw-Hill Companies, Inc., pp. 17~60,

Doherty, Neil A. and Schlesinger, H., "The Optimal Deductible for an Insurance Policy When Initial Wealth is Random", *Journal of Business*, 1983a, pp. 555~565.

_______, "Optimal Insurance in Incomplete Markets," *Journal of Political Economy*, 1983b, pp. 1045~1054.

Eeckhoudt, Louis and Gollier, C., "Chapter 10 The Demand for Insurance", in *Risk Evaluation, Management and Sharing*, 1995, Harvester Wheatsheaf Publishers, pp. 153~186.

Eeckhoudt, L. and Kimball M. S., "Background Risk, Prudence and the Demand for Insurance," *in Contributions to Insurance Economics*, ed. by G. Dionne, Boston: Kluwer, 1992, pp. 239~254.

Epstein, L. and Tanny, S., "Increasing Generalized Correlation: A Definition and Some Economic Consequences", *Canadian Journal of Economics* 8, 1980, pp. 16~34.

Esary, F., Proschan, F. and Walkup, D., "Association of Random Variables, With Applications", *Annals of Mathematical Statistics* 38, 1967, pp. 1466~1474.

Hildreth, C. and Tesfatsion, S., "A Note on Dependence between a Venture and a Current Prospects", *Journal of Economic Theory*, 15, 1977, pp. 381-391.

Lehmann, E. L., "Some Concepts of Dependence", *Annals of Mathematical Statistics* 37, 1966, pp. 1137~1153.

Mayers, D. and Smith, C. W., "The Interdependence of Individual Portfolio decisions and the Demand for Insurance", *Journal of Political Economy*, 1983, pp. 304~311.

Meyer, J., "Beneficial Changes in Random Variables Under Multiple Sources of Risk and Their Comparative Statics," *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory* 17, 1992, pp. 7~19.

Meyer, J. and Ormiston, M. B., "Demand for Insurance in a Portfolio Setting", *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 20, 1996, pp. 203~212.

Mossin, J., "Aspects of Rational Insurance Purchasing," *Journal of Political Economy*, 1968, pp. 553~568.

Schlesinger, H., "The Theory of Insurance Demand", in G. Dionne (Ed.), *The Handbook of Insurance*, 2000, Boston: Kluwer Academic Publishers, pp. 131~151.

_______,"Mossin's Theorem for Upper-Limit Insurance Policies." *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 73, 2006, pp. 297~301.

Schlesinger, H. and Doherty, N. A., "Incomplete Markets for Insurance: An Overview," *Journal of Risk and Insurance*, September 1985, pp.

402~423.

Schulenburg, J. M., "Optimal Insurance Purchasing in the Presence of compulsory Insurance and Insurable Risks," *Geneva Papers on Risk and Insurance*, 1986, pp. 5~16.

Turnbull, S., "Additional Aspects of Rational Insurance Purchasing", *Journal of Business*, 1983, pp. 217~229.

Wright, R., "Expectation Dependence of Random Variables, With an Application in Portfolio Theory", *Theory and Decision*, 22, 1987, pp. 111~124.

Abstract

This paper examines the Bernoulli Principle when an individual faces both a background risk and an interdependent insurable risk. The background risk is modelled as an initial random wealth. Within this model, using "expectation dependence" developed by Wright(1987), we provide the necessary and sufficient conditions for the Bernoulli Principle to hold or violate. That is, it is shown that the rational individual would buy less than, full or more than full insurance if and only if the expectation dependence is positive, zero or negative, respectively. These results extend the recent conclusion of, for example, Aboudi · Thon(1995) or Hong(2001, 2004) in two ways:

1. The notions of expectation dependence are less restrictive than those of regression dependence in Aboudi · Thon(1995) or those of Brumelle(1974)'s interdependence in Hong(2001, 2004)
2. We give conditions that are both necessary and sufficient, while Aboudi · Thon(1995) or Hong(2001, 2004) suggested only the sufficient, but not necessary, conditions for the Bernoulli Principle.

※ Key Words: Expectation Dependence, Necessary and Sufficient Conditions, Stochastic Interdependence, The Bernoulli Principle