연기금 지급능력 안정성을 위한 장기 상각 전략 방안*

A Long-term Amortizing Strategy for Stationary Pension Fund Solvency

성주호**
Sung Joo-Ho

노동부(2003. 9. 24)는 현행 퇴직금제도와 동일한 경제적 가치를 가지는 (확정급여형 혹은 확정기여형) 퇴직연금제도의 도입을 권장하는 "근로자퇴직급여보장법(안)"을 발표하였다. 본고는 확정급여형으로 운용되고 있는 4대 공적연금(국민연금, 공무원연금, 사학연금, 군인연금) 및 향후 도입될 확정급여형 퇴직연금제도 모두에 내재하고 있는 지급능력 문제를 관리이론(control theory)관점에서 그 해결책을 모색하고 있다. 분석방법론으로 연기금 자산 및 부채의 현금흐름을 수리적으로 모형화하고, Trowbridge & Farr(1976) 및 Owadally & Haberman(1999)에서 효율적 연금재원조달방법으로 취급되는 이연상각방법(spread pension funding method)을 최적화함에 연구의 주된 목적을 두고 있다. 이연상각모수를 최적관리변수로 설정하고 지급능력위험(solvency risk)과 기여율위험(contribution rate risk)을 동시에 최소화하는 비선형계획법 문제를 도출하였다. 채택된 모형은 연기금 운영의 장기성 및 계속성(long-term & going-concern valuation basis)을 기본전제로 하고 있으며, 지급능력위험과 기여율위험 각각은 투자수익률 결과에 기인하며, 극한 분산(limiting variances) 모형으로 정의하고 있다. 주요 결론으로 첫째, 이연상각방법은 연기금의 지급능력 및 기여율의 장기적 안정성을 제고할 수 있는 연금원가의 체계적·지속적 배분계획임을 알 수 있었다. 둘째, 기여율위험 대비 지급능력위험의 상대적 위험 회피도가 최적관리변수에 가장 큰 영향을 미치고 있음을 발견할 수 있었다. 마지막으로 연기금 투자 전략 관점에서는 최소분산포트폴리오를 구성하는 것이 연기금 지급능력 및 재정의 안정성을 제고할 수 있음을 주요 시사점으로 제시하고 있다.

※ 국문 색인어 : 확정급여형, 이연상각방법, 평균-분산 모형, 관리이론, 기여율 위험, 지급능력 위험, 비선형계획법, 최소분산포트폴리오

---

* 이 연구는 2003년도 경희대학교 지원에 의해 연구되었으며(KHU-20030268), 논문의 발전을 위해 수고하신 익명의 레프리에게 감사함을 전한다.
** 경희대학교 경영대학 경영학부 부교수 (e-mail : jhsung@khu.ac.kr)

I. 서론

공적 및 사적연금제도에 있어서, Black(1992)이 언급한 것처럼, 연기금의 항시적 지급능력(continued solvency)과 가입자간 항시적 형평성(continued goodwill) 문제는 확정급여형 연금제도(defined benefit pension schemes) 운용상의 주요 관심사가 아닐 수 없다. 물론 확정기여형 연금제도(defined contribution pension schemes)는 운용상의 적법성(prudent man rules)이 확보된다면 가입자가 운용상의 제반 위험을 부담하도록 운영되기 때문에 지급능력과 형평성문제는 야기되지 않는 것으로 평가되고 있다. 최근 노동부(2003. 9. 24)는 현행 퇴직금제도와 동일한 경제적 가치를 가지는 (확정급여형 혹은 확정기여형) 퇴직연금제도로의 전환을 권장하는 "근로자퇴직급여보장법(안)"을 발표하였다[1]. 현실적으로, 공적 및 사적 확정급여형 연금제도의 지급능력 유지·관리 문제는 노사정(勞使政) 모두의 주요 관심사가 아닐 수 없다. 이러한 사회적 이슈 관점에서 본고의 논의는 확정급여형로 한정하며, 정기적 납입 기여금을 통하여 연기금을 형성함으로써 장래 연금재원으로 활용하는 정규적립방식(regular funding methods)을 분석의 도구로 활용한다[2]. 가입자간 형평성 문제 또한 지급능력 문제로 야기되는 혹은 지급능력 문제를 해결하는 과정 속에서 제기되는 상호 연관적 문제로 간주할 수 있다. 왜냐하면, 사전적(事前的)으로 결정된 급여공식에 따라 발생하는 급여채무를 담보할 수 있는 지급능력 측면만을 강조한다면 필요시마다 기여율의 수준을 상향조정함으로써 지급능력을 손쉽게 확보할 수 있으나,[3] 이는 결국 가입자간 혹은 세대간·세대내 형평성 문제를 야기하기 때문이다. 따라서, 지급능력 문제와 형평성 문제는 상호 연관성이 높은, 즉 개념적으로 상쇄효과가 존재하는 것으로 동시에 다루어져야 할 것이다. 이와 같은 측면에서, 제III장에서 가입자 및 감독당국의 최대관심사중의 하나인 지급능력 문제의 심각성 여부를 계량적으로 지급능력 위험(solvency risk)으로 정의하고 측정하며, 또한 기여자(contributors)의 최대관심사중의 하나인 형평성 문제는 기여율의 변동성(volatility)관점에서 기여율 위험(contribution rate risk)으로 정의하고 측정한다.

실제로 연금관련전문가들은 위의 두가지 위험을 최소화하는 재원조달 방법을 모색하는 노력을 경주해 왔다. 주요 업적으로는 장기적 지급능력 안정성을 기여율 위험에 초점을 맞추어 접근한 Dufresne(1988), Zimbidis & Haberman(1992) 그리고 Owadally & Haberman(1999)의 연구결과를 언급할 수 있으며, 최근 연금 및 보험분야에서 최적 가격산정을 위한 방법론으로 활발하게 연구가 진행되는 최적관리이론(optimal control theory)을 적용하여 두 위험을 동시에 최소화하는 Haberman & Sung (1994, 2002) 및 Cairns(2000)의

1) 5인 이상 사업장에 대한 퇴직연금제도 도입(2004년 7월 시행) 및 4인 이하 사업장에 대한 퇴직금제도 확대 적용 혹은 퇴직연금제도 도입(2007년 1월 시행)을 주요 일정으로 설정하고 있다.
2) 적립방식에 대한 개념, 종류 및 정의는 성주호·김진억(1998), pp153~165 참조.
3) 실제로 Collins(1992)의 수치적 시뮬레이션 결과에서도 명확히 제시되고 있다. 편의상 그의 최종적 결론을 인용하면 다음과 같다: "The higher the contributions paid the lower the number of insolvencies."

연구결과를 각각 언급할 수 있다. 그러나 후자의 연구는 연기금 운영의 단시성 및 청산(short-term & winding-up valuation basis)에 초점을 둔 연구 결과로 실무적 적용에 있어서 어려움이 있다. 본고는 위의 선행연구와는 두가지 측면에서 차별성을 두고 있다. 먼저, (제II & III장에서 구체적 모형화 과정에서) 연기금 운영의 장기성 및 계속성(long-term & going-concern valuation basis)을 전제로 하고 있어, 회계적 및 재무론적 측면에서 실무적 적용성[4]이 높다. 다음으로, (제IV장에서 구체적으로 언급한 것처럼) 지급능력 위험과 기여율 위험을 동시에 최적화하는 접근법으로써 성주호(2002)의 이해관계자 모형(stakeholder model)에서 언급된 다양한 이해갈등 요소를 모형에 충분히 반영하고 있다.

최근 Financial Times(2003. 10. 22) 기사내용에 의하면, 일본의 100대 기업들의 현행 연금재정의 적립율(funded ratio)이 약 45% 수준으로 올해의 세전당기순이익(EBT)을 전액 기금부족분 보전을 위해 사용되어도 연금재정의 불안전성은 해소되기 힘들다고 한다. 이는 연금 운영주체가 체계적이고 장기적인 관점에서 지급능력을 확보하고 동시에 기여율의 안정적 관리에 초점을 두어야 함을 시사하고 있다. 한편 정부당국은 (공적, 사적) 연금을 도입하고 감독하는 관리자의 입장이 있으므로, 지급능력 위험 및 기여율 위험을 평가하고, 이를 기초로 하여 연금제도 운영의 제반 위험을 최소화하는 효율적 관리시스템(efficient risk assessment and control system) 구축에 정책적 관심을 두어야 할 것이다.

결론적으로 본고의 논의의 초점은 "어떻게 지급능력 위험과 기여율 위험을 연금운용 주체의 현실적 관점에서 조화롭게 관리 할 수 있는가?"라는 질문에 대한 해법을 강구하는 것이다. 물론 현실 세계를 분석의 대상으로 할 수 없는 한계성이 있으므로, 계량경제학, 계량경영학 등에서 주로 제언적(提言的) 시사점을 도출하기 위해 사용하는 통계적 간편모형을 설정하고 활용한다. 본고는 다음과 같이 구성되었다.

제II장에서는 필요한 가정과 기본적 수리모형을 구축하고 있다. 제III장은 본론에 해당하는 장으로 지급능력 위험과 기여율 위험을 최소화하는 최적화 문제를 설정하고 그 최적해를 제시하고 있다. 제IV장은 수치적 결과를 제시하고 그 주요 시사점들을 언급하고 있으며, 제V장에서는 요약 및 결론을 첨부하여 이해의 편의성을 제고하고 있다. 아울러, 마지막장에서는 본 연구의 지속적 발전을 위한 향후연구과제를 제시하고 있다.

II. 기본가정 및 통계수리모형

확정급여형 연금제도의 운영상 제반 위험을 우리는 제I장에서 지급능력 위험과 기여율 위험으로 대별하였다. 이와 같은 위험은 연금제도를 운영하는 현실세계가 인구통계적 확률변수 및 경제적 확률변수 등으로 구성된 일종의 복잡계(complex world)로서, 예측의 편차(forecasting bias)에 기인한 결과로 볼 수 있다. 따라서 이러한 실제세계를 직접 다루기보다는 단순화 과정을 통하여 주요 변수만을 연구의 대상으로 설정함으로써 분석의 유용성을 제

4) 실무적 적용성은 제IV장에서 언급하고 있다.

고할 필요가 있다.

1. 기본가정

다음은 연금계리학 분야에서 주로 사용되는 분석을 위한 가정들이며, Trowbridge(1952), Bowers et al.(1979), Dufresne(1988), Owadally & Haberman(1999) 등에서도 이와 유사한 가정들이 채택되고 있다. 물론, 가장 보편적인 최종소득연금형(final income pension plans)[5]에서 노령연금만을 지급하며, 사전적립방식 중에서 개별정규적립방식(individual regular funding method)을 적용하고, 연기금 평가 결과로 발생하는 잉여금/부족금은 보조적립방식인 이연상각방식(spread pension funding method)을 적용한다[6].

(A1) 연금의 평가는 정규적으로 행해진다 (정규 평가 단위기간은 (t, t+1), t=0, 1, 2, ...로 설정하며, 실제에 있어 1년을 기준으로 평가함이 일반적임).

(A2) 현금흐름(기여금 수입 및 급여금 지출 등)은 평가 단위기간 초(初)에 발생한다.

(A3) 투자수익률을 제외한 기타 인구통계적·경제적 예측치들은 현실세계에서 100% 실현된다[7].

(A4) 평가를 위한 (인구통계적 및 경제적) 계산기초(actuarial valuation basis)는 시간에 대해 고정이다. 특히, 가입자증가율이 0%인 항상적(恒常的) 인구구조(stationary pension plan population)이며, 임금증가율이 0%이고, 아울러 기여금 산출 및 부채 평가에 적용되는 이율이 전기간에 걸쳐 동일한 단일평가이율(single valuation interest rate: i_v >0)을 적용한다.

(A5) 연기금 자산(pension fund assets)은 공정가액(F(t))으로 평가한다(즉, 시장성이 있는 자산은 시가로 평가함).

(A6) 단위기간별 (t, t+1) 투자수익률(i_{t+1})은 무위험자산 투자수익률($r > 0$) 및 투자구성비(1-α), 그리고 위험자산 투자수익률($r+\varepsilon_{t+1}$) 및 투자구성비(α)에 의해 결정된다. 단, $0\% \le \alpha \le 100\%$; $\varepsilon_{t+1} \sim iid\ N(\mu>0,\ \sigma^2<\infty)$[8].

(A7) 연기금 평가에 관련한 회계정보의 편차 및 지연(accounting bias and lags)은 없다[9].

---

5) 급여산출공식이 퇴직당시임금에 일정 %의 연금(소득)대체율(pension replacement rate)을 곱하여 연금급여를 지급하는 연금제도.

6) 이연상각방식은 아래의 식 (6)에서 정의되고, 기본 개념 또한 설명되고 있다.

7) 가정의 현실성은 투자수익률이 지급능력의 변동 더 나아가 기여율의 변동에 가장 많은 영향을 미친다는 Thornton & Wilson(1992)의 실증분석 결과에서 찾을 수 있다.

8) 시계열 $\{r+\varepsilon_{t+1}$: t=0, 1, 2, ...$\}$는 결국 랜덤워크를 나타내고 있으며, 특히 ε_{t+1}는 통계적 위험 프리미엄(stochastic risk premium)에 해당한다. 또한 가정의 논리적 타당성은 찾자면, 성주호(2002)에서 개념적으로 설명한 것처럼, 가입퇴직자를 위한 연금재원은 비교적 현금유동성 문제가 적은 국공채 투자가 필요한 반면, 가입근로자를 위한 연금재원은 공격적 주식투자 또한 필요하다는 연기금 포트폴리오 투자 전략적 관점에서 대출포트폴리오(lending portfolio)를 구성함을 의미한다.

9) 매기간 말 평가시 제시되는 회계정보는 적시성(timeliness) 및 중립성(neutrality) 을 확보한다는 가정

2. 통계재정모형(Stochastic Financial Model)

위의 기본가정에 근거하여 우리는 다음과 같은 결과를 도출할 수 있다. 기본가정 (A3) ~ (A4)을 개별적립방식에 적용하면, 급여산출공식에 의해 향후 발생할(혹은 이미 발생한) 가입(근로, 퇴직)자별 연금급여채무의 계리적 현가(actuarial present value)의 총합인 표준부채(actuarial liability or standard fund: AL(t)), 당기 근로에 의해 발생할 것으로 기대되는 가입근로자별 당기채무 발생분의 사전적립액인 당기근무원가(current service cost)의 총합, 즉 표준기여금(normal cost or standard contribution: NC(t)), 그리고 당기에 가입퇴직자에게 지출될 것으로 기대되는 총급여지출금(B(t)) 등 산출된 값들은 모두 상수임을 알 수 있다. 즉,

$$AL(t) = AL, \quad NC(t) = NC \quad \& \quad B(t) = B, \quad \forall\ t \in \{0, 1, 2, \ldots\}. \tag{1}$$

한편, 기본가정(A1)~(A2)에 의해 장기재정추계에 사용되는 표준부채의 성장모형(dynamics of actuarial liability)은 '$AL(t+1)=(1+i_v)\cdot[AL(t)+NC(t)-B(t)]$'인 1차 선형재귀방정식으로 특징 지워진다. 이와 같은 선형재귀식에 위 식(1)의 결과를 적용하면 Trowbridge(1952)가 일찍이 언급한 균형성숙방정식(equation of equilibrium or maturity)을 얻을 수 있다. 즉,

$$AL = (1+i_v) \cdot [AL + NC - B] \quad \left(\Leftrightarrow \frac{i_v}{1+i_v} \cdot AL + NC = B\right) \tag{2}$$

다음으로, (A6)에서 가정한 투자수익률 모형은 위에서 언급한 기존의 연구자와는 달리, 연기금 자산은 크게 무위험자산과 위험자산에 각각 분산 투자된다고 가정한다[10]. 부언하면, 연기금의 총투자수익률은 결국 위험 및 무위험자산 투자수익률의 가중평균(convex combination)에 의해 결정됨을 알 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} i_{t+1} &= (1-\alpha)\cdot r + \alpha \cdot (r + \varepsilon_{t+1}) \\ &= r + \alpha \cdot \varepsilon_{t+1} \sim iid\ N(r+\alpha\mu,\ \alpha^2\sigma^2) \end{aligned} \tag{3}$$

따라서, 위에서 기술한 표준부채의 성장모형에서 처럼 장기재정추계에 사용되는 연기금 자산의 성장모형(dynamics of pension fund assets)은 (A1) ~(A3), (A5) & (A6)에 의해 다음과 같다. 즉,

---

으로, 현대 IT 기술의 발전 관점에서 보면 일반적 타당성을 가진다고 볼 수 있다.

10) 기존의 투자수익률 간편모형은 위험 및 무위험 자산에 대한 차별적 투자할당(asset allocation)에 대한 고려없이 공통적으로 상호독립 및 동일분포를 갖는 확률변수(independently and identically distributed random variable: *iid*)로서 랜덤워크(random walk)를 채택하고 있다.

$$F(t+1) = (1 + r + a \cdot \varepsilon_{t+1}) \cdot [F(t) + C(t) - B] \tag{4}$$

여기에서, C(t)는 아래의 <표1>에서 알 수 있듯이 실제 납입기여금을 의미한다. 즉, {C(t): t=0, 1, 2, ...}는 개별적립방식(즉, NC(t), AL(t) 결정)과 이연상각방식(즉, AC(t) 결정)에 의해 결정된다. 따라서,

$$C(t) = NC(t) + AC(t) \tag{5}$$

위 식 (1)에 의해 $NC(t)=NC$ & $AL(t)=AL$이며, $AC(t)$는 연기금 평가결과로 나타나는 잉여금 혹은 부족금을 일정기간에 걸쳐 상각하는 사후 정산적 기여금(retrospective adjusting contribution)의 성격을 갖는다. 즉, 이연상각방식에 의한 납입 기여금 산출 모형은 다음과 같이 정의된다[11].

$$\begin{aligned} C(t) &= NC + AC(t) \\ &= NC + k \cdot [AL - F(t)], \quad k = 1/\ddot{a}_{\overline{n}|}\ ^{12)} \in (0, 1] \end{aligned} \tag{6}$$

여기에서, AL-F(t)는 미적립채무(unfunded liability: $UL(t)$)로 정의되며, '$UL(t) > 0$'이면 계리적 부족금이 발생하였음을 의미하고, '$UL(t) < 0$'이면 계리적 잉여금이 발생하였음을 의미한다. 이러한 부족금 및 잉여금을 일정기간(즉, (양의 정수) 상각기간 n)에 걸쳐 매기 균등하게 상각(actuarially fair amortization: $1/\ddot{a}_{\overline{n}|}$)하는 '$k$'를 연금계리학에서는 이연상각모수(spread parameter)라고 한다. 따라서 이연상각모수를 효율적으로 관리하는 것은 지급능력(즉, AL-F(t)) 및 기여율 변동성(즉, C(t)-NC)을 동시에 효율적으로 관리하는 결과를 가져온다. 한편, 경제적 의미는 연기금 부채와 자산간의 비대칭위험에 부과된 일종의 위험프리미음(risk premium)이라고 생각할 수 있다. 한 편 이러한 할증이 주어지는 {$UL(t)$: t=0, 1, 2, ...}의 생성 원인을 살펴볼 필요성이 있다. 위 식 (2)~(6)을 적용하면

$$\begin{aligned} UL(t+1) &\equiv AL(t+1) - F(t+1) \\ &= (1 + i_v) \cdot [UL(t) + NC - C(t)] + (i_v - i_{t+1}) \cdot [F(t) + C(t) - B] \\ &= (1 + i_v) \cdot (1 - k) \cdot UL(t) + \ L(t+1) \end{aligned} \tag{7}$$

즉, $UL(t+1)$의 생성은 당기 미상각 계리적 손·익의 누적액 '$(1 + i_v) \cdot (1 - k) \cdot UL(t)$' 및 투자수익률에 의한 당기 계리적 손익(actuarial gain or loss: $L(t+1)$) '$(i_v - i_{t+1}) \cdot [F(t) + C(t)$

11) 이연상각방식 (6)은 영국을 비롯한 유럽국가들에서 활용되고 있으며, 일본 및 국제기업연금회계기준(IAS 19) 또한 이연상각방식에 근거하고 있다(성주호(2002) 참조).
12) $\ddot{a}_{\overline{n}|} \equiv 1 + v + v^2 + ... + v^{n-1}$, $v = 1/(1+i_v)$. 특히 n = 1일 경우, $k = 1$.

- $B]$' 등으로 구성되어 있음을 알 수 있다. 여기에서 미상각 계리적 손익의 누적액이란 식 (7)을 계리적 손·익 항목으로 다시 표현하면 명확히 그 의미를 파악할 수 있다. 즉,

$$
\begin{aligned}
UL(t+1) &= (1 + i_v)\cdot(1 - k)\cdot UL(t) + L(t+1) \\
&= [(1+i_v)\cdot(1-k)]^{t+1}\cdot UL(0) + \sum_{h=0}^{t}[(1+i_v)\cdot(1-k)]^{h}\cdot L(t+1-h) \\
&\quad (k = 1/\ddot{a}_{\overline{n|}} \text{ 대입하면}) \\
&= \Phi(n)^{t+1}\cdot UL(0) + \sum_{h=0}^{t}\Phi(n)^{h}\cdot L(t+1-h) \qquad (8)
\end{aligned}
$$

여기에서, $(1 + i_v)\cdot(1 - k) = \dfrac{(1+i_v)^n - i_v - 1}{(1+i_v)^n - 1} \equiv \Phi(n) \in [0,1)$ 이므로, 이연상각방식(6)은 과거에 발생한 초기 미적립채무 $UL(0)$ 및 계리적 손·익은 시간이 경과함에 따라 (즉, $t \rightarrow \infty$), 지수적으로 감소하고 그 속도를 결정하는 매개체는 'k (혹은 상각기간 n)'이며[13] 궁극적으로는 모두 상각되도록 설계되었음을 알 수 있다[14]. 예를 들어, (0, 1)기간에 발생한 $L(1)$은 현재시점(t)에서는 $\Phi(n)^{t-1}\cdot L(1)$ 만큼 존속하지만, $\lim_{t\to\infty}\Phi(n)^{t-1}\cdot L(1) = 0$ 임을 쉽게 확인할 수 있다.

특히 주목할 사항은 '$i_{t+1} = i_v$, $\forall t$ (즉, 평가기초상의 모든 인구통계적·경제적 예측치들의 100% 실현됨)' 이면, '$UL(0) = UL(1) = UL(2) = \ldots = 0$ & $C(t) = NC$ ' 이다. 이는 우리가 <표 1>에서 도식한 것처럼, 투자수익률의 변동성에 초점을 둔다는 (A3) 가정의 논리적 타당성을 입증한 것이다. 물론 이와 같은 상황이 전개된다면 가장 이상적인 결과이지만(즉, $C(t) = NC$ & $F(t) = AL$, $\forall t$), McGill et al.(1996) 에서는 $L(t)$을 특별히 경험 계리적 손익이라고 하며, 미래의 불확실성에 기인한 필연적 결과로 인정하고 있다[15]. 결론적으로, 식 (6) & (7)에서 주어진 것처럼, C(t) 및 F(t) 각각의 이상적 목표에서 벗어나는 현금흐름의 변동성을 나타내는 시계열 $\{AC(t) \equiv C(t)-NC : t=0, 1, 2, \ldots\}$ & $\{UL(t): t=0, 1, 2, \ldots\}$를 조율할 수 있는 주요 관리변수(controlling variables)는 평가이율(i_v), 투자수익률(i_{t+1}) 및 이연상각모수(k)이다. 그러나, 본고의 제목에서 알 수 있듯이, 우리는 (A6)에 의해 연기금이 전략적으로 분산 운용되며 투자수익률은 궁극적으로 랜덤워크에 의해 지배된다고 가정을 설정하였으므로, 관리변수로 평가이율 및 이연상각모수을 설정하고 이를 활용한 최적 상각 방법의 모색에 초점을 둔다. 이상의 논의를 요약 정리한 도표는 다음과 같다.

---

13) 식 (8)에서 알 수 있듯이 '$k \rightarrow 1$ (혹은 $n \rightarrow 1$)'이면 감소 속도가 빨라진다. 즉 $\Phi(n)$은 n에 대하여 증가함수. 또한, $k = 1/\ddot{a}_{\overline{n|}}$ 이므로, k는 n에 대하여 감소함수. 따라서, k는 $\Phi(n)$에 대하여 감소함수.

14) 이는 이연상각방식의 수리적 모형이 재무제표 작성의 기본전제인 계속기업공준에 근거하고 있음을 의미한다.

15) 여기에서 당해연도 경험 계리적 손·익을 나타내는 $L(t)$를 중심으로 상각하는 방식은 당해연도 재무제표중에서 손익계산서(income statement)에 근거한 미국 및 캐나다식 접근법이지만, 계리적 잉여금·부족금을 나타내는 $UL(t)$를 중심으로 상각하는 방식은 당해연도 대차대조표(balance sheet)에 근거한 영국 및 유럽 중심의 접근법임을 주지할 필요성이 있다.

<표1> 연기금 평가와 최적 기여액 산출 요약도

평가기초 (최적 i_v 선정)	↔	[(경험)계리적 투자 손 ·익] ($L(t) \lesseqgtr 0$)	↔	실제 투자 수익률 (i_t)
↓		↓(미상각 누적액) ↓		↓
연기금 부채평가 ($AL(t)$)	↔	[계리적 잉여금 ·부족금] ($UL(t) \lesseqgtr 0$)	↔	연기금 자산평가 ($F(t)$)
↑		↓(최적 이연상각) ↓		
개별정규적립방식 ($NC(t)$)	+	최적 이연상각방식(최적 k 선정) ($AC(t)$)	=	최적 납입기여금 산정 ($C(t)$)

III. 최적화 과정(optimization process)

이상의 논의에서 최적 상각 전략의 모색은 결국 통계적 접근을 수행함을 알 수 있다. 왜냐하면, $\{i_{t+1}$: t=0, 1, 2, ...$\}$는 랜덤워크에 의해 지배되는 확률변수이므로, 식 (4)에 의해 { $F(t)$: t=0, 1, 2, ...} 또한 확률변수들의 시계열이기 때문이다. 따라서, F(t)의 함수로 정의되는 UL(t) 또한 확률변수이다. 즉, {$UL(t)$: t=0, 1, 2, ...} 또한 확률변수들의 시계열이다. 그러므로, 식 (6)에 의해 {$AC(t)$: t=0, 1, 2, ...} 또한 확률변수들의 시계열임을 알 수 있다. 이러한 연기금 확률변수들이 모두 연속변수이지만 식 (6)에서 정의된 k는 이산변수이다. 따라서, 최적화 관점에서 우리는 이하의 논의에서 k(∈(0, 1])를 연속변수로 그 의미를 확대한다. 연기금 지급능력 위험 및 기여율 위험을 정의하기 위해 우선 $UL(t)$와 $AC(t)$의 변동성 정도를 제 1차 및 2차 모멘트(first and second moments)로 측정한다.

1. 극한 평균-분산 모형(limiting mean-variance models)

가. 지급능력 위험

아래에서 전개되는 바와 같이, 극한 평균 및 분산에 기초한 분석은 통계적 시계열{UL(t): t=0, 1, 2, ...}의 불안정성(즉, 연기금의 지급능력 위험)을 모색하는 의사결정과정에서 실제적으로 적용 가능한 보편적인 방법론이다. 먼저, 위 식 (2), (7) & (8)을 활용하여 $UL(t)$의 기대값 계산의 편의성을 제공하는 다음과 같은 선형재귀방정식을 도출할 필요성이 있다. 즉,

$$UL(t) = (1 + i_v) \cdot (1 - k) \cdot UL(t-1) + L(t)$$

$$= (1 + i_t) \cdot (1 - k) \cdot UL(t-1) + \frac{i_v - i_t}{1 + i_v} \cdot AL \tag{9}$$

다음으로, 조건부 기대값 성질[16]을 이용하여, 현재 시점(t) 직전까지 발생한 모든 정보 벡터(information vector), $\Psi(t-1) = (UL(0), UL(1), \ldots, UL(t-1))$, 에 대한 1차 조건부 기대값을 취하면 아래의 선형재귀방정식이 도출됨을 알 수 있다.

$$E[UL(t)] = E\{E[UL(t) \mid \Psi(t-1)]\} \quad (\text{식(3) 의 } i_t \sim iid\ \mathrm{N}(r + \alpha \cdot \mu,\ \alpha^2 \cdot \sigma^2) \text{ 적용하면})$$
$$= (1 + r + \alpha \cdot \mu) \cdot (1 - k) \cdot E[UL(t-1)] + \frac{i_v - r - \alpha \cdot \mu}{1 + i_v} \cdot AL$$
$$\equiv \phi(k) \cdot E[UL(t-1)] + R \quad (\text{ 단 } \phi(k) = (1+r+\alpha \cdot \mu) \cdot (1-k)) \tag{10}$$

위 식 (10)에서 우리는 다음과 같은 결론들을 유도할 수 있다. 이들은 연기금 운영의 최적화를 구성하는 주요한 결과들로 순차적으로 활용될 것이다.

< Proposition 1: 균형값(equilibrium state) >

식 (10)에서 $\phi(k) \neq 1$ 인 경우, 균형값(ULE)과 값의 범위(range)는 다음과 같다. 즉,

(i) $ULE = \dfrac{R}{1 - \phi(k)}$,

(ii) '$R > 0$' 경우: $-\dfrac{R}{r + \alpha \cdot \mu} < ULE \leq R$

'$R < 0$' 경우: $R \leq ULE < -\dfrac{R}{r + \alpha \cdot \mu}$ (11)

특히, '$R = 0$ (즉, $E(i_t) = r + \alpha \cdot \mu = i_v$)' 경우: $ULE = 0$.

(증명)

식 (10)은 $ULE = \phi(k) \cdot ULE + R$ 식을 만족하며, ULE는 시간 t에 무관하기 때문이다.

또한 ULE는 $k \in (0, 1]$에 대한 ULE의 증감은 R값의 부호(+, -)에 의해 결정된다. 즉, R이 양수(음수)이면 증가(감소)함수이므로 'k=1' 일때 최대값(최소값) R, 'k=0' 일때 최소값(최대값) $-\dfrac{R}{r + \alpha \cdot \mu}$.

< Proposition 2: 균형해(equilibrium solution) >

식 (10)에서 $\phi(k) \neq 1$ 인 경우, 균형해는 다음과 같다. 즉,

$$E[UL(t)] = \{UL(0) - ULE\} \cdot \phi(k)^t + ULE \tag{12}$$

(증명)

16) X, Y가 확률변수이면, '$E[E(X \mid Y)] = E(X)$'를 만족한다(증명은 Mood et al.(1963; p158) 참조).

가정(A6)에 의해 주어진 $UL(0)$를 이용하여, 기대값에 대한 위의 선형재귀방정식 (10)을 풀면

$$E[UL(t)] = \phi(k)^{t} \cdot UL(0) + \frac{R \cdot (1 - \phi(k)^{t})}{1 - \phi(k)}$$
$$= \{UL(0) - ULE\} \cdot \phi(k)^{t} + ULE$$

< Propositon 3: 기대값의 기하학적 안정성 조건(condition for geometric stability) >
기대값 시계열 {E(UL(0)), E(UL(1)), E(UL(2)), ...}이 초기치 UL(0)에 무관하게 ULE로 수렴하기 위한 조건은 "$0 \le \phi(k) < 1$"이다. 특히, $E(i_t) = r + a \cdot \mu = i_v$ 이면 $\lim_{t\to\infty} E[UL(t)] = 0.$

(증명)
기하학적 감소율(geometric damping rate)을 나타내는 $\phi(k) \in [0, 1)$ 이면, <Proposition 2>에 의해 $\lim_{t \to \infty} E[UL(t)] = \frac{R}{1 - \phi(k)}$ = ULE (즉, UL(t)의 극한기대값이 ULE임을 알 수 있다). 또한 $E(i_t) = r + a \cdot \mu = i_v$ 이면, 식(10)에 의해 '$\lim_{t\to\infty} \phi(k)^{t} = 0$ & $R = 0$'.

따라서, <Proposition 3>에서 알 수 있듯이, 선정된 k가 극한기대값 관점에서 관리변수로서의 의미를 갖기 위한 가용 가능한 관리영역(admissible and feasible control range)은 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$0 \le \phi(k) < 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{1 + r + \alpha\mu} < k \le 1 \qquad (13)$$

다음으로, 지급능력위험을 정의하기 위하여 UL(t)의 2차 모멘트(분산)를 도출한다. 식 (9)에 대하여 조건부 분산 성질[17]을 적용하면 "$Var[UL(t)] = E\{Var[UL(t) \mid \Psi(t-1)]\} + Var\{E[UL(t) \mid \Psi(t-1)]\}$" 관계식이 성립한다. 순차적으로 간략히 하면,

(i) $E\{Var[UL(t) \mid \Psi(t-1)]\}$

$$= E\{[(1-k) \cdot UL(t-1) \cdot a \cdot \sigma]^2 + [\frac{AL}{1 + i_v} \cdot a \cdot \sigma]^2 - 2\,\frac{(1-k) \cdot UL(t-1) \cdot AL}{1 + i_v} \cdot (a \cdot \sigma)^2\}$$

$$= (\alpha \cdot \sigma)^2 \cdot \{ (1-k)^2 \cdot Var(UL(t-1)) + [(1-k) \cdot E(UL(t-1)) - \frac{AL}{1 + i_v}]^2 \}$$

$$= \tau(k)^2 \cdot Var(UL(t-1)) + \{\tau(k) \cdot E(UL(t-1)) - Q\}^2$$

여기에서, $\tau(k) = (\alpha \cdot \sigma) \cdot (1-k)\ (\ge 0)$; $Q = \frac{\alpha \cdot \sigma \cdot AL}{1 + i_v}\ (\ge 0)$.

---

17) X, Y가 확률변수이면, 'Var(Y) = E[Var(Y | X)] + Var[E(Y | X)]'를 만족한다(증명은 Mood et al.(1963; p159) 참조).

(ii) $Var\{E[UL(t) \mid \Psi(t-1)]\} = Var\{ \phi(k) \cdot UL(t-1) + R\} = \phi(k)^2 \cdot Var(UL(t-1))$

최종적으로, 기대값에 대한 재귀식 (10)에 상응하는 분산의 재귀식은 (i)+(ii)이므로 아래와 같이 도출된다.

(iii) $Var[UL(t)] = (\tau(k)^2 + \phi(k)^2) \cdot Var(UL(t-1)) + [\tau(k) \cdot E(UL(t-1)) - Q]^2$ ---(14)

재귀식 (10)과 (14)에서 실무적으로 주목할 점은 직전연도말의 잉여금 혹은 부족금을 완전 상각하는 이연상각방식(즉 k=1을 채택)인 경우, '$\tau(k)=\phi(k)=0$'이므로 당해연도말의 UL의 기대값과 분산은 각각 ULE와 Q^2임을 알 수 있다. 이러한 점이 시사하는 바는 이연상각방식이 사전적(事前的)으로 $\{UL(t)\}$의 현금흐름을 관리하는 것이 아니라 사후적(事後的)으로 관리하는 일종의 피드-백 관리 메카니즘(feed-back control mechanism)임을 의미하는 것이다.

기대값에서처럼, 이상의 논의를 식 (14)를 중심으로 정리하면 다음과 같은 결론들을 도출할 수 있다.

< Proposition 4: 이동균형값(moving equilibrium state)과 극한값 >

식 (14)에서 '$\tau(k)^2 + \phi(k)^2 \neq 1$' 인 경우, 이동균형값($ULME$)[18]과 식 (13)에서 주어진 관리변수 k의 가용가능 관리영역에서 ULME의 극한값은 다음과 같이 주어진다.

$$ULME = \frac{[\tau(k) \cdot E(UL(t-1)) - Q]^2}{1-(\tau(k)^2+\phi(k)^2)} \xrightarrow{t \to \infty} \frac{[\tau(k) \cdot ULE - Q]^2}{1-(\tau(k)^2+\phi(k)^2)} \xrightarrow{k=1} Q^2$$

(증명)

『식 (14)는 $ULME = (\tau(k)^2 + \phi(k)^2) \cdot ULME + [\tau(k) \cdot E(UL(t-1)) - Q]^2$ 관계식을 만족하지만, $ULME$는 시간 t에 따라 변동하는 특성을 가지기 때문이다. 여기에서 극한값은 < Propositon 3>에 의해(즉, $\lim_{t \to \infty} E[UL(t-1)] = ULE$) 쉽게 도출된다. 또한 '$k=1 \Leftrightarrow \tau(k) = \phi(k) = 0$'에 의해 최종적인 결과가 도출된다.』

< Proposition 5: 분산의 기하학적 안정성 조건 >

식 (14)에 의해 생성되는 분산 시계열 $\{Var(UL(0)), Var(UL(1)), Var(UL(2)), ...\}$이 $ULME$의 극한값(즉, $\frac{[\tau(k) \cdot ULE - Q]^2}{1-(\tau(k)^2+\phi(k)^2)}$)으로 수렴하기 위한 조건은 "$0 \leq \tau(k)^2+\phi(k)^2 < 1$"이다.

18) 균형값은 정태적 개념(시간에 대한 불변성)으로 차용되는 경제적 용어인데 반하여 이동균형값은 균형값은 아니지만 동태적 개념(시간에 대한 변동성)으로 차용되는 상대적 용어로서 본고에서 사용하고자 한다.

특히, $E(i_t) = r + a \cdot \mu = i_v$ 이면, $\lim_{t \to \infty} Var[UL(t)] = \dfrac{Q^2}{1 - (\tau(k)^2 + \phi(k)^2)}$.

(증명)

『먼저, 식 (14)의 일반해를 도출한다. 편의상 $\tau(k)^2 + \phi(k)^2 \equiv a$, $[\tau(k) \cdot E(UL(t-1)) - Q]^2 \equiv h(t-1)$이라 두면, $Var[UL(t)] = a \cdot Var(UL(t-1)) + h(t-1)$. 따라서, 일반해는

(i) $a=0$ (즉, $k=1 \Leftrightarrow \tau(k) = \phi(k) = 0$)인 경우

: $\lim_{t \to \infty} Var[UL(t)] = Q^2$

(ii) $0<a<1$인 경우

: $Var[UL(t)] = a^{t-1} \cdot h(0) + a^{t-2} \cdot h(1) + a^{t-3} \cdot h(2) + \ldots + a \cdot h(t-2) + h(t-1)$.

양변에 a를 곱하여 차감하면,

$$(1-a) \cdot Var(UL(t)) = -a^t \cdot h(0) + a^{t-1} \cdot [h(0)-h(1)] + a^{t-2} \cdot [h(1)-h(2)] + \ldots + a \cdot [h(t-2)-h(t-1)] + h(t-1).$$

다음으로, 양변에 극한을 취하면 주어진 조건 하에서 아래와 같은 극한분산이 도출되는데 아래의 결과가 우리가 장기적 계속 평가 관점에서 정의하고자하는 지급능력 위험이다. 즉,

$$\lim_{t \to \infty} (1-a) \cdot Var(UL(t)) = \lim_{t \to \infty} \{-a^t \cdot h(0) + a^{t-1} \cdot [h(0)-h(1)] + a^{t-2} \cdot [h(1)-h(2)] + \ldots + a \cdot [h(t-2)-h(t-1)] + h(t-1)\}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \to \infty} Var[UL(t)] = \lim_{t \to \infty} \frac{h(t-1)}{1-a} = \frac{[\tau(k) \cdot ULE - Q]^2}{1 - (\tau(k)^2 + \phi(k)^2)} = \frac{[R \cdot \tau(k) + Q \cdot \phi(k) - Q]^2}{(1-\tau(k)^2 - \phi(k)^2) \cdot (1-\phi(k))^2} \tag{15}$$

($\because$ $\forall t$, $\lim_{t \to \infty} a^t = 0$ & <Propostion 3>에 의해 $\lim_{t \to \infty} h(t) = [\tau(k) \cdot ULE - Q]^2$)

특히, $E(i_t) = r + a \cdot \mu = i_v$ 이면 < Proposition 3 >에 의해 $\lim_{t \to \infty} E[UL(t)] = 0$ 이므로, 위에서 주어진 최종식이 도출됨을 알 수 있다.』

위의 극한기대값 논의에서처럼, <Proposition 5>는 선정된 k가 극한분산 관점에서 관리변수로서의 의미를 갖기 위한 가용 가능한 관리 영역을 설정하고 있음을 알 수 있다. 즉,

$$\text{“}0 \le \tau(k)^2 + \phi(k)^2 < 1\text{”}^{19)} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{S} - 1}{\sqrt{S}} < k \le 1 \tag{16}$$

여기에서, $S \equiv [(a\sigma)^2 + (1 + r + a\mu)^2]$ (>1).

결론적으로, 연금전문가 집단이 지속가능한 이연상각 전략을 수립하고자 한다면 실제적으

19) $(\phi(k), \tau(k))$로 구성되는 이차원공간에서 중심점(0, 0), 반지름이 1인 원(circle)의 제1사분면(first quadrant)의 내부점들의 집합임을 알 수 있다($\because$ $\phi(k), \tau(k) \ge 0$).

로 평균-분산 시계열 {(E(UL(t)), Var(UL(t))}이 발산하지 않도록 일정한 관리영역 범위를 설정할 필요성이 있다. 그러므로 관리변수 k가 최종적으로 선택 가능한 관리영역은 식 (13)과 식 (15)의 공통영역 {k: 식 (13)∩식 (15)}이다. 그러나 '{k: 식 (13)}⊇{k: 식 (15)}'이므로 k의 최종적 가용 가능한 관리영역은 식 (15)에 의해 규정됨을 알 수 있다.

나. 기여율 위험

식 (9)에 의해 생성되는 통계적 시계열{UL(t): t=0, 1, 2, ...}에 1:1 대응하여 이연상각방식의 통계적 시계열$\{AC(t): t=0, 1, 2, \ldots\}$이 식 (6)에 의해 생성된다. 즉, $\{AC(t): t=0, 1, 2, \ldots\} \Leftrightarrow \{k \cdot UL(t): t=0, 1, 2, \ldots\}$. 그러므로, 평균-분산 시계열 $\{(E[AC(t)], Var[AC(t)]): t=0, 1, 2, \ldots\}$은 UL의 평균-분산에 의해 결정됨을 알 수 있다. 즉, $\{(E[AC(t)], Var[AC(t)]): t=0, 1, 2, \ldots\} \Leftrightarrow \{(k \cdot E[UL(t)], k^2 \cdot Var[UL(t)]): t=0, 1, 2, \ldots\}$. 따라서, < Proposition 3 & 5>에 의해 k의 관리영역 (16)에서의 극한 평균-분산은 아래와 같다:

< Proposition 6: 극한 평균-분산(limiting mean-variance) >
k의 관리영역 (16)에서,

$$\lim_{t \to \infty} E[AC(t)] = k \cdot \frac{R}{1 - \phi(k)} \xRightarrow{E(i_t) = i_v} 0$$

$$\lim_{t \to \infty} Var[AC(t)] = k^2 \cdot \frac{[R \cdot \tau(k) + Q \cdot \phi(k) - Q]^2}{(1 - \tau(k)^2 - \phi(k)^2) \cdot (1 - \phi(k))^2}$$

$$\xRightarrow{E(i_t) = i_v} k^2 \cdot \frac{Q^2}{1 - \tau(k)^2 - \phi(k)^2} = k^2 \cdot \frac{Q^2}{1 - S \cdot (1 - k)^2} \qquad (17)$$

(증명)
『위의 <Proposition 3 & 5>에 의해 명확히 도출됨을 쉽게 확인할 수 있다.』

제III-1-가에서 정의된 지급능력 위험과 같은 선상에서, 우리가 정의하고자 하는 기여율위험은 식 (17)의 $\lim_{t \to \infty} Var[AC(t)]$에 해당한다. 다음절에서 우리는 이상의 논의를 바탕으로 연기금의 장기적 안정성을 제고하는 최적화 상각 전략에 대하여 살펴보고자 한다.

2. 최적화 문제(optimization problem)

지금까지의 논의과정에서 이미 지적한 바와 같이, 방법론적으로 연기금의 장기적 안정성을

도모하는 상각 전략은 극한 평균-분산 기준에 근거한다. 이러한 기준을 통한 전략 수립의 과정은 먼저 평가이율(i_v)을 합리적으로 선정하고 다음으로 이연상각모수(k)의 최적화를 수립하여야 할 것이다.

우선 평가이율 선정은 제2절에서 언급한 것처럼 연기금 운영의 기준목표값이 되는 표준기여금(NC) 및 표준부채(AL)를 결정하게 되므로, 연기금 운영의 장기적 특성을 반영하여 선정되어야 한다. 전통적 연금계리학 분야에서는 이와 같은 측면을 반영하여 장기적 투자수익률의 평균(기대값)으로 평가이율을 설정함엔 이론의 여지가 없다. 왜냐하면 $E(i_t) = i_v$ 인 경우(즉, $R=0$), <Proposition 3 & 6>에 의해 " $\lim_{t\to\infty} E[UL(t)] = \lim_{t\to\infty} E[AC(t)] = 0 \Leftrightarrow E[F(\infty)] = AL \;\&\; E[C(\infty)] = NC$ "이기 때문이다. 이와 같이 합리적 평가이율이 사전적(事前的)으로 결정되었다면, 다음 단계는 관리변수(k)의 최적화 과정을 통하여 전체적으로 최적관리가 완성될 것이다.

'k'가 관리변수이므로 최적화 과정은 최적관리이론에 근거하여 성과척도지수(performance index)를 먼저 설정할 필요성이 있다. 우리의 극한 평균-분산 기준과 일치성을 제고하기 위해 가장 일반적으로 채택되고 있는 이차성과척도지수(quadratic performance index)를 도입한다. 즉,

$$\begin{aligned} PI(t) &= \Theta \cdot [C(t)-NC]^2 + (1-\Theta) \cdot [F(t)-AL]^2 \\ &= \Theta \cdot [AC(t)]^2 + (1-\Theta) \cdot [UL(t)]^2 \;\; (\text{단, } E(i_t) = i_v) \end{aligned} \tag{18}$$

여기에서 $\Theta(\in[0,\ 1])$는 해당 연금전문가 집단에 의해 결정될 가중치로서 관리오차(control errors), $[C(t)-NC]^2$ & $[F(t)-AL]^2$, 각각에 대한 상대적 관리오차 회피도(degree of relative control error aversion)라고 그 의미를 부여할 수 있다.

식 (18)의 양변에 기대값을 취한 후 극한값을 구하면, 아래의 식 (19)와 같은 극한기대성과지수를 구할 수 있다. 즉,

$$E[PI(t) \mid E(i_t) = i_v] = E\{\Theta \cdot [AC(t)]^2 + (1-\Theta) \cdot [UL(t)]^2 \mid E(i_t) = i_v\}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} E[PI(t)] &= \lim_{t\to\infty} E\{\Theta \cdot [AC(t)]^2 + (1-\Theta) \cdot [UL(t)]^2 \mid E(i_t) = i_v\} \\ &= \lim_{t\to\infty} \{\Theta \cdot [Var(AC(t))] + (1-\Theta) \cdot [Var(UL(t))]\} \;\; (\because R = 0) \\ &= [\Theta \cdot k^2 + (1-\Theta)] \cdot \frac{Q^2}{1 - S \cdot (1-k)^2} \\ &\equiv f(k) \end{aligned} \tag{19}$$

결론적으로, 우리가 채택한 성과지수는, 식 (16)에서 정의된 관리영역범위 이내에서, 관리오차(즉, 기여율 위험과 지급능력 위험)를 측정하는 척도이므로 최적화를 위한 목적함수 및 제약식은 아래와 같이 k에 대한 최적화 문제로 귀결된다. 즉,

$$\min_{k} \quad f(k)$$

$$\text{subject to} \quad \frac{\sqrt{S}-1}{\sqrt{S}} < k \le 1 \tag{20}$$

다음절에서 최적화 문제의 해를 구하도록 한다.

3. 최적 관리 변수값(optimal choice for k)

주지하는 바와 같이, 위에서 도출된 최적화 문제(20)은 비선형계획법 문제(nonlinear programming problem)이다. 따라서, 최적해를 구하기에 앞서 주어진 관리영역 k의 범위내에서 $f(k)$ (볼록 혹은 오목)함수형태에 대한 검증이 선행되어야 한다.

(i) 우선, '$\Theta=0$' 인 경우(즉, $Min \lim_{t\to\infty} Var(UL(t))$ (= $Min \frac{Q^2}{1-S\cdot(1-k)^2}$)만 고려한 경우)는 분모가 최대가 될 때 최소가 되므로 최적해 $k^* = 1$ 20) 임을 쉽게 확인할 수 있다. 즉, 관리영역 범위에서 k에 대한 감소함수임을 알 수 있다.

(ii) 다음으로, '$\Theta\in(0, 1]$' 인 경우 함수형태에 대해 검증하고자 한다.

$$\frac{d\,f(k)}{dk} = 0$$

$$\Leftrightarrow \Theta\cdot S\cdot k^2 + (S - 2\cdot\Theta\cdot S + \Theta)\cdot k - (1-\Theta)\cdot S = 0 \tag{21}$$

2차 함수 근의 공식을 적용하면 식 (21)의 해는 다음과 같다.

$$k1,\ k2 = \frac{-(S-2\Theta S+\Theta) \pm \sqrt{(S-2\Theta S+\Theta)^2 + 4\Theta(1-\Theta)S^2}}{2\Theta S} \quad \text{(단, 부호 동순)}$$

여기에서 $k1$, $k2$ 각각은 함수 $f(k)$의 국부최대점, 국부최소점 혹은 변곡점(local maximum, local minimum or inflection point)등의 임계점임을 의미한다. 따라서, f(k)함수의 복잡성으로 인하여 정확한 함수형태를 추론하기는 힘들지만, 두 개의 임계점이 주어지는 함수형태이

20) 실무적 관점에서 해석하면, 당해연도말 대차대조표상의 부족금 혹은 잉여금(UL)을 다음연도의 기여금 산정에 100% 반영함(즉, 완전상각함)을 의미한다.

므로, 3차 함수 혹은 4차 함수형태라고 추론할 수 있다.
또한 $S>1$ 및 $\Theta\in(0, 1]$ 이므로, '$k2 \le 0$' 인 반면 '$k1 \ge 0$' 이므로 관리영역 범위에서 실행 가능해는 $k1$ 임을 할 수 있다. 즉,

$$k1 = \frac{-(S-2\Theta S+\Theta) + \sqrt{(S-2\Theta S+\Theta)^2 + 4\Theta(1-\Theta)S^2}}{2\Theta S} \tag{22}$$

주지하는 바와 같이, 최적해를 구하는 알고리즘을 설정하기에 앞서 관리영역의 최대하한(infimum)을 "$k(\omega) \equiv \lim_{\omega\to 0+} \frac{\sqrt{S}-1}{\sqrt{S}} + \omega$"로 대체할 필요성이 있다(여기에서, ω는 0에 근접한 충분히 작은 임의의 양의 실수)[21].
결론적으로, 이상의 논의를 정리하면 '$\Theta\in(0, 1]$' 인 경우 최적해를 구하는 절차는 다음에 의해 결정됨을 알 수 있다.

<Step 1> "$\frac{\sqrt{S}-1}{\sqrt{S}} < k1 \le 1$" 인 경우

: 최적해 k^* = "$Min\ \{f(k1), f(1), f(k(\omega))\}$를 만족하는 k"[22].

<Step 2> "$\frac{\sqrt{S}-1}{\sqrt{S}} < k1 \le 1$" 가 아닌 경우

: 최적해 k^* = "$Min\ \{f(1), f(k(\omega))\}$를 만족하는 k". 여기에서, $f(1) < f(k(\omega))$ 이므로 $k^* = 1$[23]. (23)

다음 장에서는 위에서 설정된 최적해 탐색 절차에 따라 산출되는 수치적 최적해를 예시하고 그 의미를 분석하고자 한다.

IV. 최적해 예시

최적해 예시를 위한 기본 가정들은 다음과 같다.

(a1) 평가이율($E(i_t) = i_v$) = 3%, 5%

---

21) 왜냐하면 관리영역의 최대하한은 관리영역의 최소값이 아니지만, 그에 근접한 값은 최적해를 산출할 가능성이 있는 또 하나의 실행가능해이기 때문이다.

22) 물론, Θ=1인 특수한 경우(즉, $Min \lim_{t\to\infty} Var(AC(t))$ 만 고려한 경우) 실행가능해 "$k1 = \frac{S-1}{S}$" 로서 관리영역 내부의 점이다($\because \frac{\sqrt{S}-1}{\sqrt{S}} < k1 < 1$).

23) $\because$ "$k \to \frac{\sqrt{S}-1}{\sqrt{S}} \Rightarrow f(k) \to \infty$" 인 반면, "$k \to 1 \Rightarrow f(k) \to Q^2$".

(a2) 연기금 투자 포트폴리오의 위험자산구성비(α):무위험자산구성비(1-α) = 20%:80%; 50%:50%

(a3) 위험자산 단위당 투자수익률 표준편차(σ) = 평가이율의 50%, 100%, 200%

(a4) 상대적 관리오차 회피도를 의미하는 가중치(Θ) = 0%, 30%, 50%, 80%, 100%

위의 기본 가정(a1)~(a4) 각각을 최적해 산출 과정 (23)에 적용한 결과를 아래의 <표 2>와 <표 3>에서 예시하고 있다. 결론적으로 예시를 통하여 우리는 다음과 같은 시사점을 도출할 수 있다.

첫째, 해당 연금운영 주체의 위험회피도(Θ)는 당해연도 연기금 평가결과(UL)를 차기연도에 이연상각하는 규모를 결정하는 가장 민감한 변수로 다루어져야 한다.

둘째, 연기금 투자전략을 보수적(예를 들어, $\alpha \to 0\%$) 및 공격적(예를 들어, $\alpha \to 100\%$) 투자 전략으로 대별하는 경우 보수적 투자자는 공격적 투자자에 비해 평가이율이 높을 것이다(왜냐하면, $E(i_t) = i_v$). 아래의 예시에서 <표 2>는 <표 3>에 비하여 상대적으로 보수적 입장을 견지하는 연기금 투자자라고 볼 수 있다. 부언하면, 보수적 투자전략을 견지할수록 최적관리변수값이 상대적으로 작음을 알 수 있다. 이는 연기금 재정의 안정성을 제고할 수 있음을 의미한다.

셋째, 위험자산에 대한 자산할당이 결정되었다면, 가용 가능한 위험자산 투자기회집합(investment opportunity set) 중에서 최소분산 포트폴리오[24]를 구성하는 경우 최적관리변수값이 최소가 됨을 알 수 있다. 즉, 최소분산 포트폴리오 전략이 연기금 재정의 안정성을 제고할 수 있음을 시사하고 있다.

마지막으로, 연기금 운영의 주체에 따라 다양한 최적 상각 전략이 수립될 수 있지만, 확정급여형 (기업 및 공적) 연금 산업 전체적 관점에서 살펴보면, 평가이율이 약 3%~5% 수준이라면 당기의 미적립채무(UL)의 약 60% 수준을 차기의 재정방식에 반영하여야 장기적 지급능력 및 재정의 안정성을 제고할 수 있음을 보여주고 있다.

24) 마코위츠의 지배원리(H. Markowitz's dominance principle)에 의해 선정된 효율적 포트폴리오집합(efficient frontier or portfolio set)중에서 위험(분산)이 가장 작은 포트폴리오를 의미한다.

<표 2> 최적관리변수값(k*) 예시 I

α:(1-α) = 20%:60%		Θ = 0%	Θ = 30%	Θ = 50%	Θ = 80%	Θ = 100%	k^*의 평균
i_v = 3%	σ= 0.015	1.0	0.766846	0.634201	0.412894	0.057412	≒ 0.57
	σ= 0.030	1.0	0.766851	0.634207	0.412904	0.057436	
	σ= 0.060	1.0	0.766870	0.634235	0.412943	0.057532	
i_v = 5%	σ= 0.025	1.0	0.774061	0.644524	0.427621	0.092991	≒ 0.58
	σ= 0.050	1.0	0.774074	0.644542	0.427647	0.093053	
	σ= 0.100	1.0	0.774124	0.644614	0.427751	0.093299	

<표 3> 최적관리변수값(k*) 예시 II

α:(1-α) = 50%:50%		Θ = 0%	Θ = 30%	Θ = 50%	Θ = 80%	Θ = 100%	k^*의 평균
i_v = 3%	σ= 0.015	1.0	0.766854	0.634213	0.412911	0.057454	≒ 0.57
	σ= 0.030	1.0	0.766884	0.634256	0.412972	0.057604	
	σ= 0.060	1.0	0.767005	0.634427	0.413215	0.058203	
i_v = 5%	σ= 0.025	1.0	0.774083	0.644556	0.427667	0.093099	≒ 0.58
	σ= 0.050	1.0	0.774162	0.644669	0.427829	0.093484	
	σ= 0.100	1.0	0.774477	0.645121	0.428480	0.095023	

V. 요약 및 결론

본고는 확정급여형으로 운용되고 있는 4대 공적연금(국민연금, 공무원연금, 사학연금, 군인연금) 및 근로자퇴직급여보장법(안)에 의해 도입될 확정급여형 퇴직연금제도 모두에 내재하고 있는 지급능력 문제를 관리이론관점에서 그 해결책을 모색하고 있다. 제II장에서는 연기금 자산 및 부채의 현금흐름을 모형화함으써 분석의 용이성을 제고하였으며, Trowbridge & Farr(1976) 및 Owadally & Haberman(1999)에서 효율적 재원조달방법으로 언급하고 있는 이연상각방법을 최적화함에 연구의 목적을 두고 있다. 제III장에서는 최적관리변수값을 모색하는 최적화 과정을 다루고 있으며, 최적화 목적함수는 이연상각모수(k)를

관리변수로 설정하고 지급능력위험과 기여율위험의 가중평균을 최소화하는 비선형계획법 문제를 도출하였다. 여기에서 정의되는 위험은 투자수익률을 랜덤워크)로 가정하고 있음에 기인한다. 또한 연기금 운영의 장기성 및 계속성을 기본전제로 설정하고 있으므로, 지급능력위험과 기여율위험 각각은 모두 극한 분산으로 정의되고 있음에 주목하여야 한다. 이는 운영주체(기업, 정부 혹은 공공단체)에게 매 회기년도말에 순차적으로 산출되는 미적립채무를 가장 효율적으로 이연상각함으로써 예측가능한 연금비용을 산정할 수 있는 메카니즘을 제공하고 있다. 결론적으로, 제IV 장에서는 수치적 예시를 통하여 다음과 같은 주요 시사점들을 도출하고 있다.

첫째, 이연상각방법은 연기금의 지급능력 및 기여율의 장기적 안정성을 제고할 수 있는 연금원가의 체계적·지속적 배분계획으로 이해할 수 있다. 방법론적으로는 회계학에서 말하는 감가상각방법 중에서 정률법과 그 유사성이 있다고 볼 수 있으므로 산출 메카니즘의 용이성이 있다.

둘째, 연금제도 운영상에는 노사정을 비롯한 다양한 이해관계자가 존재하므로, 이해관계자들의 선호에 따라 선호변수(예를 들어, θ, α, σ, μ 등)를 결정할 수 있는 최적관리변수를 설정하고 있다. 이들 선호변수들 가운데 기여율위험 대비 지급능력위험의 상대적 위험회피도를 나타내는 θ값이 최적관리변수에 가장 큰 영향을 미치고 있음을 발견할 수 있었다.

마지막으로, 연기금 투자 전략 관점에서는 최소분산포트폴리오를 구성하는 것이 연기금 지급능력 및 재정의 안정성을 제고할 수 있음을 주요 시사점으로 제시하고 있다.

이상에서 살펴본 것처럼, 본고의 실무적 기여성은 연기금 감독기관 혹은 운영주체가 지급능력을 유지관리하기 위하여 어떠한 메카니즘을 통하여 연금비용을 장래에 효율적으로 배분할 것인지에 대한 중요한 가이드라인을 제시함에 있다고 할 수 있다.

VI. 향후 연구과제

본 연구는 기본가정(A1)~(A7)에 근거한 통계적 재정모형을 설정하고 최적관리이론에 근거한 최적화과정을 수행함으로써 최적관리변수값(k^*)을 도출하고 있다. 주지하는 바와 같이 이러한 모형에 따른 분석은 궁극적으로 현실적 적합성과 상당부분 괴리가 발생한다. 이러한 한계점을 극복하기 위한 학문적·실무적 기여가 예상되는 향후 주요 연구과제를 제시함으로써, 연구의 연속성 및 발전을 기대하는 바이다. 첫째, 랜덤 워크 투자수익률모형(3)을 현실적 적합성이 높은 금융시계열모형으로 대체하여 발전시키는 연구(예를 들어 Box & Jenkins에 의해 제시된 ARIMA 모형 등). 둘째, (본고에서 다루고 있지 않는) 인구증가율 및 임금상승율의 금융시계열성을 고려하여 발전시키는 연구. 셋째, 4대 공적연금 및 향후 도입될 퇴직연금 등에 실제적으로 적용하는 연구분야. 마지막으로, 위의 연구과제를 총체적으로 적용하는 연구 혹은 다양한 시나리오에 의한 시뮬레이션 연구 등을 언급할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

국찬표 · 구본열, 『현대재무론』, 비봉출판사, 제3판, 2001.

성주호, 「국제기업 연금회계기준의 연금계리적 평가」, 『보험개발연구』, 제13권 제2호, 2002. 9.

성주호 · 김진익, 『퇴직연금 계리 및 재정』, 보험개발원, 보험연구소, 1998. 6.

Bowers et al., "The Dynamics of of Pension Funding: Contribution Theory," *Transactions of the Society of Actuaries* 31, 1979, pp.93～122.

Cairns, A., "Some Notes on the Dynamics and Optimal Control of Stochastic Pension Fund models in Continuous Time," *ASTIN Bulletin*, Vol. 30, No. 1, 2000, pp.19～55.

Collins, A., "Funding and Solvency Levels for Pension Schemes," Paper presented to the Staple Inn Actuarial Society, 1992, London.

Dufresne, D., "Moments of Pension Fund Contributions and Fund Levels when Rates of Return are Random," *Journal of Institute of Actuaries* 115, 1988, pp.535 ～ 544.

Haberman, S. & Sung, J.H., "Dynamic Approaches to Pension Funding," *Insurance: Mathematics and Economics* 13, 1994, pp.45～56.

Haberman, S. & Sung, J.H., "Dynamic Programming Approaches to Pension Funding: The case of incomplete state information," *ASTIN Bulletin*, Vol. 32, No. 1, 2002, pp.129～142.

Hillier, F.S. & Lieberman, G.J. *Introduction to Operational Research*, 3rd ed., Holden-Day, Inc. 1980.

McGill et al., *Fundamentals of Private Pensions, 7th ed.*, Philadelphia: University of Pennsylvania Press, 1996.

Mood, A.M. & Graybill, F.A. *Introduction to the Theory of Statistics*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1963.

Owadally, M.I. & Haberman, S., "Pension Fund Dynamics and Gains/Losses Due to Random Rates of Investment Return," *North American Actuarial Journal*, Vol. 3, No. 3, 1999, pp.105～117.

Thornton, P.N. & Wilson, A.F., "A Realistic Approach to Pension Funding," *Journal of Institute of Actuaries* 119, 1992, pp.229～286.

Trowbridge, C.L., "Fundamentals of Pension Funding," *Transactions of the Society of Actuaries* 4, 1952, pp.17～43.

Trowbridge, C.L., & Farr, C.E., *The Theory and Practice of Pension Funding,* Illinois: Richard D. Irwin, 1976.

Whittle, P., *Optimization over Time: Dynamic Programming and Stochastic Control*, Vol. II, Chichester: John Wiley & Sons, 1983.

Zimbidis, A. & Haberman, S., "Delay, Feedback and Variability of Pension Contribution and Fund Levels," *Insurance: Mathematics and Economics* 13, 1993, pp.271～285.

Abstract

In a defined benefit pension plan, the benefits to be paid out to qualified members are defined according to pre-determined benefit formula. Hence, funding and investment strategy plays a key role in managing pension plans. In this research, we focus on deriving an optimal spread pension funding plan in view of the long-term and going concern valuation basis. In general, the spread funding plan has such a meaning as a process of allocating pension costs smoothingly in a systematic and rational manner. Recently, one of the critical issues in pension profession is how to design the pension funding plan providing simultaneously the pension contribution stability and fund solvency in a defined benefit pension plan. This paper could give an efficient and admissible solution to this issue in view of optimal control. Methodology used in this paper is that firstly, a model is used to represent the financial cash-flow structure of a defined benefit pension plan; secondly, ultimate mean-variance model is derived in view of optimal control theory; and lastly, we adopt the nonlinear programming approach for optimal solution.

Our results would be a new application of control theory and an admissible extension to the current pension funding theory and practice.

※ Key Words: Spread (Pension Funding) Method, Mean-Variance Model, Control Theory, Nonlinear Programming, Contribution Rate Risk, Solvency Risk, Global Minimum Variance Portfolio.