보험개발연구 第19권 第2호 2008년 7월

자기부담금 보험계약과 Mossin 정리*

- 자산가치변동위험과 손실위험이 공존하는 경우 -

Mossin's Theorem for Deductible Insurance Policies When Initial Wealth is Random

홍순구**

Hong Soon-Koo

이 논문에서는 외생적 배경위험이 순수손실위험과 공존하는 경우, Doherty · Schlesinger(1983a) 및 Aboudi · Thon(1995)의 자기부담금 보험계약을 적용해, 순보험료 하의 Mossin 정리가 성립할 수 있는 충분조건들을 제시한다. 우리의 정리는 기존의 Doherty · Schlesinger(1983a)는 물론 Aboudi · Thon(1995)의 회귀의존성을 포함하는 보다 일반적인 결과를 산출한다. 요컨대 우리는 Brumelle(1974)의 상호의존성 및 Wright(1987)의 기대의존성 개념을 적용해 자기부담금 계약에서 성립하는 Mossin 정리에의 충분조건을 유도한다. 특히 자기부담금계약 하의 우리 논문은 Brumelle(1974)과 Wright(1987)의 상호의존성 개념을 비례보험계약에 적용한 홍순구(2001, 2004, 2007)의 최근 연구결과와 상이한 점이 주목된다. 그 차이는 단적으로 두 상호의존성이 모두 비대칭적인 개념이라는 데 기인한다. 예컨대, 우리 논문의 충분조건 하에서 성립하는 자기부담금 계약의 모씬 정리는 홍순구(2001, 2004, 2007)의 충분조건 하에서는 일반적으로 성립되지 않는다. 물론 그 역도 마찬가지다. 우리는 두 논문의 충분조건이 중복되지 않고 서로 상이한 충분조건이 됨을 이론적으로 그리고 확률분포의 예시를 통해 차례로 입증한다.

※ 국문색인어: 모씬의 정리, 순보험료, 자기부담금, 평균 · 분산모형
학술진흥재단 분류 연구분야 코드 : B051605

* 이 논문은 서울산업대학교 학술연구비 지원에 의하여 연구되었음.
** 서울산업대학교 경영학과 교수(soonkooh@snut.ac.kr)
논문 투고일: 2008. 06. 22, 논문 게재 확정일: 2008. 07. 24

I. 머리말

보험경제학에서 그 유명한 'Mossin의 정리(Mossin's Theorem; Mossin 1968)'는 '보험료가 순보험료만으로 책정되는 경우 보험계약자는 위험을 100% 완전히 제거시켜 주는 전부보험을, 부가보험료가 포함되면 일부보험을 구입한다'는 정리를 말한다[1]. 이 논문은, 순보험료의 전제하에 Doherty · Schlesinger(1983a) 및 Aboudi · Thon(1995) 등이 분석한 자기부담금 보험계약 하에서, 외생적 배경위험 또는 자산가치 변동위험이 순수손실위험과 함께 공존하는 경우 Mossin의 정리가 성립할 수 있는 충분조건을 제시해 본다. 요컨대 우리의 논문은 보험계약자가 자기부담금계약을 하는 경우 Brumelle(1974)이 개발한 음(-)의 상호의존성 및 Wright(1987)의 음(-)의 기대의존성(Negative Expectation Dependence)을 적용해 Mossin 정리의 충분조건을 유도한다.

먼저 논의 전개의 편의를 위해 여러 상호의존성의 개념들을 정리해 본다. 우리는 다음 기호를 이용하면 각 상호의존성 개념을 간편하게 정의할 수 있다[2].

W ≡ 보험계약자의 배경위험 또는 보험계약자가 보유하고 있는 초기의 위험자산
; 확률변수

ω ≡ 위험자산 W의 실현가능한 값; $-\infty < \omega < \infty$

X ≡ 보험구입이 가능한 순수위험; 확률변수

x ≡ 순수위험 X의 실현가능한 값; $0 \le x < \infty$

$\Pr(\cdot)$ ≡ 사건 '·'가 발생할 확률

$f(x,\omega)$ ≡ X와 W의 결합확률밀도함수

1) 'Mossin의 정리'는 흔히 'Bernoulli Principle'이라고도 불리어진다(Doherty-Schlesinger 1983a, 1983b; Doherty 2000 Chapter 2). 우리는 이 분야에서 비교적 최근의 논문인 Schlesinger (2005)을 따라 'Mossin의 정리'로 부르기로 한다.

2) 보다 상세한 회귀의존성이나 기대의존성 등 각 상호의존성의 정의는 Lehmann(1966), Wright(1987), Aboudi · Thon(1995), 또는 홍순구(2007) 등에서 찾아볼 수 있다.

$f_X(x) \equiv X$의 한계확률밀도함수; $f_X(x) = \int_{\omega=-\infty}^{\infty} f(x,\omega)d\omega$

$g(\omega|x) \equiv W$의 조건부확률밀도함수; $g(\omega|x) = \dfrac{f(x,\omega)}{f_X(x)}$

$F(x,\omega) \equiv X$와 W의 누적결합확률분포함수; 즉 $F(x,\omega) = \Pr(x \le X, \omega \le W)$

$F_X(x) \equiv X$의 한계확률분포함수; 즉 $F_X(x) = \Pr(X \le x) = \int_{t=0}^{x} f_X(t)dt$

$D \equiv$ 자기부담금의 크기

$P(D) \equiv$ 자기부담금이 D로 설정된 경우의 보험료

$Y \equiv$ 보험계약자의 기간 말(期間 末) 부(富); 랜덤변수

$y \equiv Y$의 실현가능한 값; $-\infty < y < \infty$

$u(y) \equiv$ 효용함수; 단조증가하는 엄격한 오목함수를 가정, 즉 $u'(y) > 0$,.
$u''(y) < 0$

1. 상호의존성의 여러 개념

우리는 음(-)의 상호의존성만을 정의하기로 한다. 필요한 경우, W(또는 X) 대신 $-W$(또는 $-X$)를 각 음(-)의 상호의존성 정의에 적용하면 양(+)의 상호의존성을 정의할 수 있다.

가. X는 W에 대해 음(-)의 회귀의존성(Negative Regression Dependence)

$\Pr(X \le x | W = \omega)$가, 모든 x에 대해, ω의 증가함수이면 X는 W에 대해 '음(-)의 회귀의존성'이 있다고 정의하고, $NRD(X|W)$라고 표기한다(Lehmann, 1966).

위의 정의에서 유의할 점은 회귀의존성은 일반적으로 X와 W가 서로 대칭적인(Symmetric) 관계에서 성립되는 개념이 아니라는 사실이다. 예컨대 음(-)의 회귀의존성 관계에서, $NRD(X|W)$이더라도 $NRD(W|X)$은 얼마든지 성립하지 않을 수 있다. 물론 양(+)의 회귀의존성도 마찬가지 경우에 해당한다. 즉,

$$NRD(X|W) \nleftrightarrow NRD(W|X).$$

한편 Brumelle(1974)은 다음과 같이 기댓값을 이용해 음(-)의 상호의존성을 정의하고 있다.

나. X의 W에 대한 음(-)의 상호의존성(Negative Interdependence)

모든 ω에 대해 $E(X|W=\omega)$가 감소함수, 즉 $\frac{\partial E(X|W=\omega)}{\partial \omega} \le 0$이면, X는 W에 관해 '음(-)의 상호의존성' 에 있다고 정의한다.

Brumelle(1974)의 상호의존성에서도, 회귀의존성의 경우처럼, 일반적으로 X와 W는 서로 대칭적(symmetric) 개념이 아니다. 즉,

$$\frac{\partial E(X|W=\omega)}{\partial \omega} \le 0 \nleftrightarrow \frac{\partial E(W|X=x)}{\partial x} \le 0.$$

이번엔 우리 논문의 주요 관심사인 기대의존성의 정의를 살펴본다. 이 기대의존성은 회귀의존성보다 넓은 범위에서 정의되고 있으며, 또한 Brumelle(1974)의 상호의존성 개념보다도 완화되어 있는 개념이다.

다. X의 W에 대한 음(-)의 기대의존성(Negative Expectation Dependence)

모든 ω에 대해 $E(X|W\le\omega) \ge E(X)$이고 임의의 ω에 대해 $E(X|W\le\omega) > E(X)$이면, X는 W에 관해 '음(-)의 기대의존성' 에 있다고 정의하고, $NED(X|W)$라고 표기한다(Wright, 1987).

일반적으로 기대의존성에서도 역시 X와 W는 서로 대칭적(symmetric) 개념이 아니다. 즉,

$$NED(X|W) \;\; \not\leftrightarrow \;\; NED(W|X).$$

이제 위의 정의와 기호들을 이용하면 우리는 기존의 연구논문들에서 유도된 Mossin 정리에 대한 충분조건을 다음과 같이 정리할 수 있겠다.

2. 자기부담금계약에서의 Mossin 정리

Mossin(1968) 또는 Smith(1968) 이래, Mossin의 정리는 자기부담금 보험계약 하에서도 단계적으로 연구되어 왔다. 예컨대 Schlesinger(1981)는 순수손실위험 하나만을 분석위험의 대상으로 상정하는 전통적인 보험수요모형에서 Mossin의 정리를 입증한 대표적인 예가 될 것이다. 그 후 이 모형은 더욱 발전되어 Doherty · Schlesinger(1983a)는 외생적 배경위험(random intial wealth)이 존재하는 경우, 그 외생적 배경위험과 순수손실위험이 통계학적으로 서로 독립되어 있거나(statistically independent), 또는 두 위험간의 확률분포가 음(-)의 상관계수(correlation coefficient)를 가진 정규분포(bivariate normal distribution)를 하는 경우 Mossin의 정리가 성립함을 보였다.

하지만, Doherty · Schlesinger(1983a, Proposition 3, pp. 561-563)의 분석은 정규분포를 가정했기 때문에, 외형적으로는 기대효용극대화의 모형을 취했으나 실질적으로는 평균 · 분산이론으로 보험수요를 분석하는 결과가 되어, 2요인(two parameter) 모형의 단점을 그대로 노출시킨다. 그 이유는 이미 Doherty · Schlesinger 자신들과(Doherty · Schlesinger 1983a, 1983b, Schlesinger · Doherty 1985, Schlesinger 2000) 다른 재무경제학자들에 의해(Brumelle 1974, Hildreth · Tesfatsion 1977, Epstein · Tanny 1980, Wright 1987, Aboudi · Thon 1995) 여러 차례 지적된 바 있다. 즉 통계학적 상관계수는 상호의존성을 측정하는 가장 포괄적인 개념으로써, 평균 · 분산모형의 한계점을 극복하는 확률지배모형 또는 기대효용모형 하에서는, 두 확률변수간의 상호의존성을 측정하는 정확한 수단이 되지 못하는 것이다. 요컨대 보다 엄밀하게 정의되는 상호의존성의 측정수

단이 요구된다.

이제 이런 필요성에 부응하여, Aboudi · Thon(1995)는 제2차 확률지배이론 하에서 음(-)의 통계학적 상관계수보다 훨씬 제약적으로 정의된 Lehmann(1966)의 '음(-)의 회귀의존성(Negative Regression Dependence)'을 적용해 외생적 배경위험이 상존하는 자기부담금계약에서도 Mossin의 정리가 성립할 수 있는 충분조건을 유도했다. 하지만 홍순구(2007) 등에 의해 이미 언급된 것처럼, Aboudi · Thon(1995)에서의 음(-)의 회귀의존성이라는 충분조건은 Mossin의 정리가 성립하는데 요구되는 수준 이상으로 너무 제약적이다. 우리의 논문은 보험계약자가 자기부담금계약을 하는 경우 음(-)의 회귀의존성보다 완화된 상호의존성의 측정수단인 Brumelle(1974)의 음(-)의 상호의존성 및 Wright(1987)의 음(-)의 기대의존성(Negative Expectation Dependence)이 Mossin의 정리의 충분조건이 됨을 입증한다.

3. 비례보상계약과의 비교

Mossin의 정리와 관련된 최근의 국내연구로는 홍순구(2001, 2004, 2007)를 들 수 있겠다. 홍순구(2001, 2004, 2007)는 우리 논문에서 처럼 Brumelle(1974) 및 Wright(1987)의 음(-)의 상호의존성 개념으로 Mossin 정리의 충분조건을 제시하고 있다. 하지만 이들 연구와 우리의 논문은 우선 분석모형에서 부터 뚜렷한 차이점을 보인다. 즉 홍순구(2001, 2004, 2007)에서는 비례보험계약(coinsurance contract)으로 Mossin 정리를 분석한 반면 우리의 연구는 자기부담금계약의 모형을 적용하고 있다. 실제로 이런 분석모형의 차이로 인해 이 논문에서 유도한 자기부담금 계약의 결과는, 홍순구(2001, 2004, 2007)에서 처럼 Brumelle(1974) 및 Wright(1987)의 상호의존성 개념을 활용했음에도 불구하고, 비례보상계약의 홍순구(2001, 2004, 2007)와 명백히 상이해진다. 그 차이는 단적으로 Lehmann(1966)의 '회귀의존성' 및 Brumelle(1974)의 상호의존성 그리고 Wright(1987)의 '기대의존성' 모두 비대칭적인 (Asymmetric) 상호의존성 개념이라는 데 기인한다. 이

내용은 구체적으로 다음과 같이 정리될 수 있겠다.

보험계약자가 보유하고 있는 위험자산 내지는 외생적 배경위험을 W로, 보험구입이 가능한 순수위험을 X로 표기하면, Doherty · Schlesinger(1983a, Proposition 3)가 자기부담금계약에서 유도한 Mossin 정리의 충분조건은 $Cov(W, X) < 0$이다. 물론 이 공분산은 상호대칭적인 개념이므로 $Cov(W, X) = Cov(X, W)$이 된다. 한편, Aboudi · Thon(1995)은 역시 자기부담금 보험계약 하에서 Mossin 정리의 충분조건으로 W의 X에 대한 음(-)의 회귀의존성 즉 $NRD(W|X)$를 유도했다. 이 W의 X에 대한 음(-)의 회귀의존성 $NRD(W|X)$은 확률 $\Pr(W \le \omega | X = x)$가, 모든 ω에 대해, x의 증가함수가 되는 경우로 정의되는데, 결코 대칭적인 개념이 아니기 때문에 $NRD(W|X) \overset{\nrightarrow}{\nleftarrow} NRD(X|W)$이 된다[3].

한편 홍순구(2001, 2004)의 연구는 Aboudi · Thon (1995)의 회귀의존성의 제약에서 벗어나 보다 광범위하게 적용될 수 있는 상호의존성을 충분조건으로 이끌어낸다. 하지만 우리는 여기서 Aboudi · Thon (1995)와 홍순구(2001, 2004)의 결과를 비교하는데 유의해야 할 점이 있다. 무엇보다 이 논문들은 서로 다른 형태의 보험계약으로 Mossin 정리를 분석했고, 또한 그 결과도 통계학적으로 서로 무관한(irrelevant), 즉 비교가 무의미한, 두 결과를 산출했다는 사실이다. 그 내용은 다음과 같다.

먼저 Brumelle(1974; Theorem 5, p. 481)은 두 음(-)의 상호의존성 척도 간에 '$NRD(W|X)$이면 $E(W|X=x)$는 x에 대해 감소함수'가 되는 관련성을 증명했다. 그 후 Aboudi · Thon(1995)는 자기부담금계약에서 Mossin 정리의 충분조건으로 $NRD(W|X)$를, 홍순구(2001, 2004)는 비례보상계약 하에서 Brumelle(1974)의 'ω에 대해 감소하는 $E(X|W=\omega)$'를 충분조건으로 제시했다. 그런데 NRD는 물론 Brumelle(1974)의 상호의존성 개념 역시 비대칭적이다. 따라서 'ω에 대해 감소하는 $E(X|W=\omega)$'는 'x에 대해 감소하는 $E(X|W=x)$'와는 서로 다른 내용이 된다는 점이 중요하다. 그 결과, Aboudi · Thon(1995)와 홍순구(2001, 2004)의 충분조

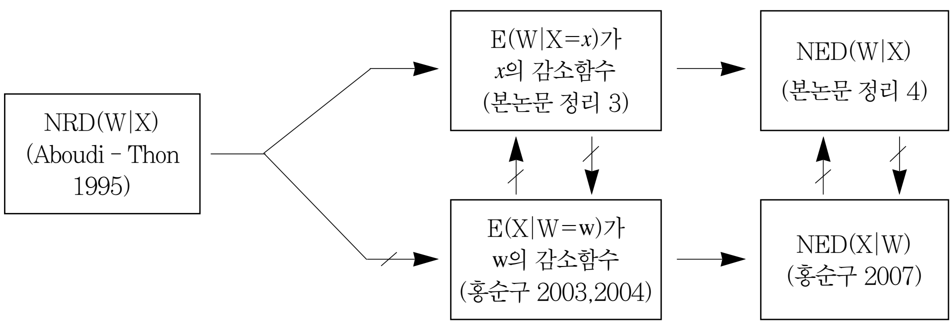
3) 이에 관한 확률분포의 두 예는 Aboudi · Thon(1995; p. 32 그리고 p. 38)에서 찾아 볼 수 있다.

건을 비교해 보면 서로 직접적인 통계학적 관련성이 없음을 확인할 수 있다(〈그림 1〉참조바람). 요컨대, 홍순구(2001, 2004)의 충분조건이 Aboudi · Thon(1995)의 $NRD(W|X)$개념을 포함하기 위해선 'x에 대해 감소하는 $E(W|X=x)$'이 돼야 하지만, 실제로 홍순구(2001, 2004)에서는 'ω에 대해 감소하는 $E(X|W=\omega)$'가 유도됐다. 다시 한 번 강조하면, Aboudi · Thon(1995)의 $NRD(W|X)$와 홍순구(2001, 2004)의 'ω에 대해 감소하는 $E(X|W=\omega)$'는 서로 내포 또는 외연의 관계에 있지 못한다[4].

즉, $NRD(W|X) \underset{\not\leftarrow}{\not\rightarrow} \frac{\partial}{\partial\omega}E(X|W=\omega) < 0$. 요컨대 두 논문의 결과를 서로 비교한다는 것은 의미를 상실하는 작업이 된다.

아울러, 홍순구(2007)의 연구결과도 같은 맥락에서 이해할 수 있겠다. 홍순구(2007)의 충분조건인 $NED(X|W)$은 비례보상계약을 상정한 홍순구(2001, 2004)에서의 'ω에 대해 감소하는 $E(X|W=\omega)$'의 연장선상에 있는 개념이다. 하지만 이 $NED(X|W)$는 우리 논문의 〈정리 3〉에서 자기부담금계약으로부터 유도되는 'x에 대해 감소하는 $E(W|X=x)$'와는 무관한 개념이 되고, 또한 기대의존성의 비대칭성으로 인해 우리 논문의 〈정리 4〉에서 제시하는 $NED(W|X)$와도 직접적인 관련성이 결여된다. 지금까지의 내용들은 아래의 〈그림 1〉로 요약할 수 있겠다.

〈그림 1〉 Mossin 정리의 충분조건 비교



4) 두 상호의존성간의 이런 '무관련성'은 본문 IV장에서 구체적인 확률분포의 예로써 다시 한 번 확인해 본다.

요컨대, 우리의 논문에서는, 비례보험계약의 홍순구(2001, 2004, 2007)과는 달리, Doherty · Schlesinger(1983a) 및 Aboudi · Thon(1995)에서의 연장선상에서 자기부담금 계약을 적용해 Mossin 정리가 성립하기 위한 충분조건을 유도한다. 즉, 우리는 자기부담금계약에서 Mossin의 정리의 충분조건으로 Aboudi · Thon (1995)의 $NRD(W|X)$를 직접 포함하는 'x에 대해 감소하는 $E(W|X=x)$' 및 Wright(1987)의 음(-)의 기대의존성 $NED(W|X)$을 제시하고, 또한 이 연구결과가 홍순구(2001, 2004, 2007)의 연구결과인 'ω에 대해 감소하는 $E(X|W=\omega)$' 또는 $NED(X|W)$와 중복되지 않고 서로 보완적인 역할을 수행함도 함께 확인한다.

이 논문은 다음과 같은 순서로 진행된다. II장에서는 이 논문의 주된 연구결과들을 보인다. 즉 확률지배이론으로 분석한 Aboudi · Thon (1995)의 연구결과를 우리의 기대효용모형으로 재확인한 다음, Brumelle(1974)의 상호의존성 및 Wright(1987)의 기대의존성을 도입해 Aboudi · Thon(1995)의 연구결과를 보다 일반화시킨다. 다음 III장에서는 우리는 이 논문의 연구결과들을 구체적으로 확인하기 위해 가상적 확률분포의 예를 제시했다. 특히 이 예들은 이 연구가 홍순구(2001, 2004, 2007)와 중복되지 않고 서로 보완적인 결과물이 됨을 확인시켜 준다. 끝으로 IV장에서는 요약과 함께 이 논문을 마무리진다.

II. 분석모형

1. 가정 및 기대효용

가. 보험료

보험료는, 우리 논문의 연구목적에 부합하게끔, 순보험료로만 책정됨을 가정한다. 즉, 보험계약자가 자기부담금 수준 D를 결정했을 때 그 보험료 $P(D)$는 다음과 같이 순수손실위험의 보험계리적 가치(actuarial value of insurance policy)가 된다. 즉,

$$P(D) = \int_{D}^{\infty} (x-D) f_X(x)\, dx.$$

이 때 위의 식에서 $P'(D) = \dfrac{dP(D)}{dD}$ 를 정의하면, $P'(D)$는 보험계약자가 자기부담금액을 D에서 $D+1$로 한단위 높였을 때 절약되는 한계보험료(Marginal Insurance Premium)를 나타낸다. 달리 표현해 보면, $-P'(D)$는 자기부담금액을 D에서 $D-1$로 한 단위 낮춰 부보량을 한 단위 늘리고자 할 때 보험계약자가 추가로 지불해야 하는 한계보험료를 뜻한다. '라이프니쯔 공식(Leibnitz's Rule)'을 적용하면[5]한계보험료 $P'(D)$와 한계보험료의 미분값 $P''(D)$는 다음과 같이 구해진다. 즉,

$$P'(D) = -\int_{x=D}^{\infty} f_X(x)\, dx,$$

또는

$$P'(D) = -[1-F_X(x)] < 0, \tag{II-1}$$

$$P''(D) = fx(D) > 0. \tag{II-2}$$

나. 보험계약자의 부

우리는 초기의 富(Initial Wealth)로 위험자산 $W(-\infty < \omega < \infty)$를 보유하고 있는 보험계약자가 $X(0 \le x < \infty)$만큼의 손실을 줄 수 있는 재산 및 배상책임위험에 노출되어 있다고 가정한다. 이 보험계약자는 재산 · 배상책임위험에 대비해 자기부

5) 라이프니쯔 공식은 다음과 같이 요약된다.

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx = b'(t)\, f[b(t),t] - a'(t) f[a(t),t] + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\, dx$$

라이프니쯔 공식에 관한 보다 자세한 내용은 정필권(1997)을 참고바람.

담금 계약을 통해 보험을 구입할 수 있다고 가정한다. 즉, 보험계약자가 $D=0$을 선택하면 손실액 100%를 보상받는 전부보험(Full Insurance)을 구입하는 것이고, $D>0$이면 일부보험(Partial Insurance)을 사는 것이 된다. 물론 무보험(No Coverage)인 경우는 D가 ∞에 접근하는 것으로 나타난다. 요컨대 자기부담금 보험계약 후 보험계약자가 보유하게 되는 부 Y는 다음과 같은 값을 가진다.

$$Y = \begin{cases} y_0 = W-P(D)-X & (x \leq D) \\ y_1 = W-P(D)-D & (x > D). \end{cases} \tag{II-3}$$

다. 기대효용

우리는 보험계약자가 단조증가하는 엄격한 오목함수를 $u(y)$가지고 있다고 가정한다〔즉 $u'(y)>0$, $u''(y)<0$〕. 이제 보험계약자는 다음과 같이 $H(D)$로 정의되는 기대효용의 극대화를 목표로 최적수준의 자기부담금 $D(0 \leq D < \infty)$를 선택하게 된다. 즉,

$$\begin{aligned} H(D) &\equiv E[u(Y)] \\ &= \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \int_{x=0}^{D} u[\omega-P(D)-x]\, f(x,\omega)\, dx d\omega \\ &+ \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \int_{x=D}^{\infty} u[\omega-P(D)-D]\, f(x,\omega)\, dx d\omega, \end{aligned}$$

또는

$$\begin{aligned} H(D) &= \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \{\int_{x=0}^{D} u[\omega-P(D)-x]\, f_X(x)\, dx\}\, g(\omega|x)\, d\omega \\ &+ [1-F_X(D)] \int_{\omega=-\infty}^{\infty} [\omega-P(D)-D]\, g(\omega|x)\, d\omega. \end{aligned} \tag{II-4}$$

라. 최적조건

위의 기대효용 식 (II-4)에 라이프니쯔 정리를 적용하면 H를 극대화하는 데 필요한 1차조건 $H'(D)=0$ 은 아래의 식으로 나타난다.

$$H'(D) = \int_{\omega=-\infty}^{\infty}\{u[\omega-P(D)-D]f_X(D)\}g(\omega|x)d\omega$$

$$-P'(D)\int_{\omega=-\infty}^{\infty}\{\int_{x=0}^{D}u'[\omega-P(D)-x]f_X(x)dx\}g(\omega|x)d\omega$$

$$-f_X(D)\int_{\omega=-\infty}^{\infty}u[\omega-P(D)-D]\,g(\omega|x)d\omega$$

$$+\ [-P'(D)-1]\,[1-F_X(D)]\int_{\omega=-\infty}^{\infty}u'[\omega-P(D)-D]\,g(\omega|x)d\omega,$$

또는

$$H'(D) = -P'(D)\int_{\omega=-\infty}^{\infty}\{\int_{x=0}^{D}u'[\omega-P(D)-x]f_X(x)dx\}g(\omega|x)d\omega$$

$$+\ [-P'(D)-1]\,[1-F_X(D)]\int_{\omega=-\infty}^{\infty}u'[\omega-P(D)-D]\,g(\omega|x)d\omega$$

$$=0.$$

비례보상계약과는 달리, 자기부담금 모형에서는 일반적으로 보험계약자의 위험회피성향〔$u''<0$〕이 H전체를 D에 관해 엄격한 오목함수로 만들어 주지는 못한다 (Mossin 1968, Schlesinger 1981). 하지만 우리는 $H'(D^*)=0$를 충족시키는 D^*가 국지적인 극대값(local maximaum)이 됨은 $H''(D^*)<0$이 되는 것으로 확인할 수 있다[6].

6) $H''(D^*)<0$의 증명과정은 어렵지는 않지만 다소 길다. 이 내용은 본 논문의 직접적인 논리전개와는 다소간 거리가 있으므로 여기서는 생략하기로 한다. 증명내용을 구체적으로 확인하고 싶은 독자는 저자에게 연락하면 쉽게 구해 볼 수 있다.

2. 보조정리

먼저 우리는 다음 〈보조정리〉를 소개하기로 한다. 이 〈보조정리〉는 향후 우리의 정리들을 증명하는데 유용하게 사용된다.

〈보조정리〉

(1) k가 x에 대해 증가함수이면 $\int_{x=0}^{D} \{k(x)-E[k(X)]\} f_X(x)dx < 0.$
(2) k가 x에 대해 감소함수이면 $\int_{x=0}^{D} \{k(x)-E[k(X)]\} f_X(x)dx > 0.$

〈보조정리〉의 (1)은 다음과 같이 확인할 수 있다. 먼저 우리는 $k(x)-E[k(X)]$가 x에대해 증가함수이기 때문에 $k(x^*)-E[k(X)]=0$ 즉 $k(x^*)=E[k(X)]$로 정의되는 x^*가 존재해야만 함에 유의한다. 그 이유는, 만약 그런 x^*가 존재하지 않는다면 x의 전구간 $0 \le x < \infty$에 대해 $k(x)-E[k(X)] < 0$ 또는 $k(x)-E[k(X)] > 0$이 되어야 하는데, 이런 경우 x의 전범위에 걸쳐 $k(x)-E[k(X)]$를 적분하면 $E[k(X)]-E[k(X)] < 0$ 또는 $E[k(X)]-E[k(X)] > 0$이 되는 모순이 발생하기 때문이다. 따라서 우리는 x^*의 존재를 확신할 수 있고, 그 결과 $x < x^*$의 범위에서는 $k(x)-E[k(X)] < 0$ 그리고 $x > x^*$의 범위에서는 $k(x)-E[k(X)] > 0$이 된다.

이제 우리는 (1)의 정리가 성립하는 것을 두 경우로 나누어 확인할 수 있다. 첫 번째로 $D < x^*$인 경우를 보면 $0 \le x \le D$의 범위에서는 항상 $k(x)-E[k(X)] < 0$이 되므로 그 적분값도 음(-)이 된다. 즉 $D < x^*$이면 (1)은 항상 성립한다. 두 번째로 $D \ge x^*$의 경우를 보면, $x^* \le D < \infty$의 범위에서는 $k(x)-E[k(X)] > 0$이 되므로 $\int_{x=0}^{D} \{k(x)-E[k(X)]\} f_X(x)dx$는 D의 증가함수가 된다. 우리는 이 내용을 보다 엄격하게 다음과 같이 수식으로도 확인할 수 있다. 즉,

$$\frac{\partial}{\partial D} \int_{x=0}^{D} \{k(x)-E[k(X)]\} f_X(x)dx = \{k(D)-E[k(X)]\} f_X(D) > 0.$$

위의 식에서 부등호($>$)는 $D \geq x^*$이므로 $k(D)-E[k(X)]>0$가 되기 때문에 성립한다. 따라서 우리는 $D \geq x^*$인 경우, $\int_{x=0}^{D} \{k(x)-E[k(X)]\} f_X(x)dx$가 D에 관해 증가함수이기 때문에, 다음과 같이 (1)의 결과가 산출됨을 확인할 수 있다. 즉,

$$\int_{x=0}^{D}\{k(D)-E[k(X)]\} f_X(x)dx < \int_{x=0}^{\infty}\{k(D)-E[k(X)]\} f_X(x)dx = 0.$$

〈보조정리〉 (2)의 내용도 동일한 방법으로 증명된다. 이제 우리는 이 〈보조정리〉를 이용하면 우리의 정리들을 쉽게 유도할 수 있게 된다.

3. Doherty · Schlesinger의 정리

다음 〈정리 1〉에서 μ는 평균벡터 즉 $\mu=[E(W),\ E(X)]$, 그리고 $\sum$는 분산 · 공분산행렬을 의미한다.

〈정리 1: Doherty · Schlesinger (1983a) Theorem〉[7]

> 순보험료로 책정되는 자기부담금 보험계약에서, 외생적 배경위험과 순수손실위험이 음(-)의 공분산관계에서 정규분포를 하면 보험계약자는 전부보험을 구입한다. 즉,
>
> $$\left.\begin{array}{c}(W,\ X)\sim N(\mu, \Sigma)\\ Cov(W,\ X)<0\end{array}\right\} \rightarrow D = 0.$$

위의 Doherty · Schlesinger(1983a)의 정리는 기대효용모형으로 분석되기는 했지만, 〈정리 1〉에서 서술된 것처럼 정규분포를 가정함으로써, 결국은 평균 · 분산모형의 범주를 벗어나지 못한다. 위험을 평가할 때 가장 간편하게 활용할 수 있는 수단이 분산이기는 하지만, 잘 알려진 것처럼, ‘분산이 적절한 위험측정수단으로서의

7) 〈정리 1〉의 증명은 Doherty · Schlesinger (1983a)에서 확인된다.

역할을 수행하는가' 에는 의문의 여지가 있다. 증가하는 절대위험회피(increasing absolute risk aversion)의 성향을 지닌 2차효용함수를 가정하지 않는 한은, 각 위험들의 정규분포를 가정해야 하기 때문이다. 특히 손실위험은 확률분포의 모양이 왼쪽으로 왜곡되어 있는 것이 대부분이고 이런 경우 분산은 올바른 위험측정수단으로서의 제 기능을 다하기 어렵다.

이제 우리는 정규분포의 제약에서 벗어나 우리 논문의 가장 중요한 목적인 세 정리를 유도한다. 〈정리 2〉에서는 Lehmann(1966)의 음(-)의 회귀의존성 $NRD(W|X)$개념으로, 〈정리 3〉에서는 Brumelle(1974)이 정의한 'x에 대해 감소하는 $E(W|X=x)$' 의 개념으로, 그리고 끝으로 〈정리 4〉에서는 Wright(1987)의 음(-)의 기대의존성 $NED(W|X)$개념을 적용에 Mossin 정리가 성립하기 위한 충분조건들을 제시한다.

우리는 세 정리를 각각 따로이 서술하고 증명하지만 실제로는 〈정리 4〉의 내용이 〈정리 2〉와 〈정리 3〉을 포함하는 가장 포괄적인 내용이 된다. 요컨대 각 정리의 충분조건들 간에 '$NRD(W|X) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}E(W|X=x) < 0 \rightarrow NED(W|X)$' 의 관계가 있기 때문이다. 하지만 세 정리는 지면의 큰 낭비없이 거의 동시적으로 증명할 수 있고, 또한 우리는 각 정리의 증명과정에서 세가지 상호의존성의 의미와 특성을 좀 더 명확하게 구분지어 파악할 수 있는 장점도 취할 수 있다.

4. Aboudi · Thon의 정리

다음 〈정리 2〉로 서술되는 결과는 이미 Aboudi · Thon (1995)에서 이산확률분포(discrete probability distribution)를 적용해 제2차 확률지배이론(The Second Degree Stochastic Dominance Theory)으로 증명된 내용이다. 그런데 Aboudi · Thon(1995)은 논문 전편에 걸쳐 하나의 정리를 입증한 만큼 그 증명내용도 상당히 길고 복잡하다. 우리는 동일한 정리를 연속확률분포(continuous probability distribution)와 기대효용모형 하에서 간결하게 증명할 수 있다.

〈정리 2: Aboudi · Thon(1995) Theorem〉

순보험료로 책정되는 자기부담금 보험계약에서, 외생적 배경위험이 순수손실위험에 대해 음(-)의 회귀의존성 관계에 있으면 보험계약자는 전부보험을 구입한다. 즉,

$$NRD(W|X) \rightarrow D = 0.$$

그러면 지금부터 〈정리 2〉의 내용을 입증해 본다. 즉 우리는 $NRD(W|X)$인 경우 모든 양(+)의 값 D(>0)에 대해 $H'(\mathrm{D})<0$이 되는 것을 확인함으로서 보험계약자가 $D^*=0$을 선택하는 것을 보인다. 먼저 1차조건 $H'(\mathrm{D})$의 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} H'(D) &= -P'(D)\int_{\omega=-\infty}^{\infty}\int_{x=0}^{D} u'[\omega-P(D)-x]f(\omega,x)dxd\omega \\ &\quad + [-P'(D)-1]\int_{\omega=-\infty}^{\infty}\int_{x=D}^{\infty} u'[\omega-P(D)-D]f(\omega,x)dxd\omega \\ &= [1-F_X(D)]\int_{\omega=-\infty}^{\infty}\int_{x=0}^{D} u'[\omega-P(D)-x]f(\omega,x)dxd\omega \\ &\quad -F_X(D)\int_{\omega=-\infty}^{\infty}\int_{x=D}^{\infty} u'[\omega-P(D)-D]f(\omega,x)dxd\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\omega=-\infty}^{\infty}\int_{x=0}^{D} u'[\omega-P(D)-x]f(\omega,x)dxd\omega \\ &\quad -F_X(D)\int_{\omega=-\infty}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty} u'[\omega-P(D)-D]f(\omega,x)dxd\omega \\ &< \int_{\omega=-\infty}^{\infty}\int_{x=0}^{D} u'[\omega-P(D)-D]f(\omega,x)dxd\omega \\ &\quad -F_X(D)\int_{\omega=-\infty}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty} u'[\omega-P(D)-D]f(\omega,x)dxd\omega \end{aligned}$$

$$= \int_{x=0}^{D} \{ \int_{\omega=-\infty}^{\infty} u' [\omega - P(D) - D] g(\omega|x) d\omega \} f_X(x) dx$$

$$- F_X(D) E\{ u' [W - P(D) - D] \}.$$

위의 $H'(D)$식 우변에서 부등호($<$)가 성립하는 것은 우변 첫째항 안에서 $\omega - P(D) - x = y_0$를 그보다 작은 값인 $\omega - P(D) - D = y_1$로 대체했고 또한 $u'' < 0$ 이기 때문이다. 이제 위의 식 마지막 등호의 우변에서 $F_X(D) = \int_{x=0}^{D} f_X(x) dx$임을 상기하면 결국 $H'(D)$의 우변은 다음 부등식 (II-5)로 귀결된다.

$$H'(D) < \int_{x=0}^{D} E\{ u' [W - P(D) - D] | X = x \} f_X(x) dx$$

$$- \int_{x=0}^{D} E\{ u' [W - P(D) - D] \} f_X(x) dx. \qquad \text{(II-5)}$$

여기서 우리는 $NRD(W|X)$의 개념을 적용하면 위의 식 (II-5)의 우변이 '0' 보다 작게 되는 것을 간단히 보일 수 있다. 즉, $NRD(W|X)$의 여러 특성 중 특히 우리에게 중요한 내용은, '$NRD(W|X)$인 경우 모든 감소함수 ϕ에 대해 $E[\phi(W)|X=x]$는 x에 대해 증가한다' 는 점이다[8]. 따라서 우리의 식 (II-5)에서 $NRD(W|X)$이면 u'는 W의 감소함수($u'' < 0$)이므로 $E\{ u' [W - P(D) - D] | X = x \}$는 x의 증가함수가 되고, 또한 반복기대치의 법칙(law of iterated expectation)에 의해 $E(E\{ u' [W - P(D) - D] | X = x \}) = E\{ u' [W - P(D) - D] \}$가 된다. 즉, $k(x) \equiv E\{ u' [W - P(D) - D] | X = x \}$로 정의하면 〈보조정리〉의 (1)에 의해 (II-5)의 우변은 음(-)의 값을 가진다. 즉,

8) 이 내용은 Wright(1987, p. 113)에 의해 명확히 풀이되어 있다.
즉, $x_2 > x_1$인 경우, $NRD(W|X)$는 $F_W(\omega|X=x_1)$가 $F_W(\omega|X=x_2)$를 제1차 확률지배함을 의미하고, 따라서 임의의 감소함수 ϕ에 대해 $E[\phi(W)|X=x]$는 x에 관한 증가함수가 된다. 참고로 원문에 의하면 같은 의미를 다음과 같이 표현하고 있다. 즉, "..., and hence $E[\zeta(X)|Y=y]$ is decreasing in y for any increasing function ζ." 특히 이 원문의 내용은 II장의 후반부에서 또 한 번 요긴하게 활용된다.

$$H'(D)$$

$$< \int_{x=0}^{D} \left(E\{u'[\omega - P(D) - D] \mid X = x\} - E\{u'[\omega - P(D) - D]\} \right) f_X(x)\,dx$$

$$< 0 \,.$$

이것으로 〈정리 2〉의 증명은 종결된다. 우리의 증명은 간결하다는 점 외에도 Aboudi · Thon(1995)의 이산확률분포를 연속확률분포로 일반화시켰다는 장점도 갖추고 있다고 하겠다.

5. 충분조건의 확장

이제 다음의 〈정리 3〉과 〈정리 4〉에서는 Aboudi · Thon(1995)의 충분조건 $NRD(W|X)$를 보다 포괄적인 음(-)의 상호의존성 개념인 $\frac{\partial}{\partial x} E(W|X=x) < 0$ 및 $NED(W|X)$로 확장시킨다. 다시 한 번 강조하면, 홍순구(2001, 2004)에서의 충분조건 'ω에 대해 감소하는 $E(X|W=\omega)$'는 Aboudi · Thon (1995)의 $NRD(W|X)$를 포함하는 결과가 되지 못한다. 두 상호의존척도의 비대칭성이 배타적으로 작용하기 때문이다.

〈정리 3〉

순보험료로 책정되는 자기부담금 보험계약에서, 순수손실위험의 증가에 대해 외생적 배경위험의 조건부기댓값이 감소하면 보험계약자는 전부보험을 구입한다. 즉,

$$\frac{\partial}{\partial x} E(W|X=x) < 0 \ \rightarrow D = 0.$$

〈정리 4〉

순보험료로 책정되는 자기부담금 보험계약에서, 외생적 배경위험이 순수손실위험에 대해 음(-)의 기대의존성 관계에 있으면 보험계약자는 전부보험을 구입한다. 즉,

$$NED(W|X) \rightarrow D = 0.$$

위의 두 정리는 함께 묶어서 증명하기로 한다. 즉, 우리는 $E(W|X=x)$가 x에 대해 감소하거나 또는 $NED(W|X)$인 경우 앞의 식 (II-5)의 우변이 '0' 보다 작게 되는 것을 보인다. 먼저 〈정리 3〉의 경우, $E(W|X=x)$가 x에 대해 감소함수이면, 〈보조정리〉의 (2)에 의해 다음 부등식이 성립된다.

$$\int_{x=0}^{D} E(W|X=x) f_X(x) dx > \int_{x=0}^{D} E(W) f_X(x) dx. \qquad \text{(II-6)}$$

그런데 위의 부등식 (II-6)은 〈정리 4〉의 충분조건인 $NED(W|X)$의 경우에도 동일하게 성립하게 된다. 즉, $NED(W|X)$이면 그 정의(definition)에 의해 모든 x에 대해 $E(W|X \le x) \ge E(W)$이 되고 따라서 (II-6)을 포함하는 다음 부등식이 성립되기 때문이다.

$$\int_{x=0}^{D} E(W|X=x) f_X(x) dx = E(W|X \le D)$$
$$\ge E(W) = \int_{x=0}^{\infty} E(W) f_X(x) dx > \int_{x=0}^{D} E(W) f_X(x) dx.$$

물론 위의 부등식은 $E(W) > 0$이 가정된 결과다. 요컨대, 부등식 (II-6)은 〈정리 3〉 또는 〈정리 4〉의 충분조건이 충족되면 성립하고, 또 이 식은 다음과 같이 부등식 (II-5)의 우변이 음(-)이 되는 것과 동등한(equivalent) 조건이 된다. 즉,

$$\int_{x=0}^{D} E(W|X=x)\, f_X(x)\,dx > \int_{x=0}^{D} E(W)\, f_X(x)\,dx$$

$\leftrightarrow$

$$\int_{x=0}^{D} E[W-P(D)-D|X=x)]f_X(x)\,dx > \int_{x=0}^{D} E[W-P(D)-D)]f_X(x)\,dx$$

$\leftrightarrow$

$$\int_{x=0}^{D} \left\{ \int_{\omega=-\infty}^{\infty} [\omega-P(D)-D]g(\omega|x)\,d\omega \right\} f_X(x)\,dx$$

$$> \int_{x=0}^{D} \left\{ \int_{\omega\equiv\infty}^{\infty} [\omega-P(D)-D]f_w(\omega)\,d\omega \right\} f_X(x)\,dx$$

$\leftrightarrow$

$$\int_{x=0}^{D} \left\{ \int_{\omega=-\infty}^{\infty} u'[\omega-P(D)-D]g(\omega|x)\,d\omega \right\} f_X(x)\,dx$$

$$< \int_{x=0}^{D} \left\{ \int_{\omega-\infty}^{\infty} u'[\omega-P(D)-D]f_w(\omega)\,d\omega \right\} f_X(x)\,dx \quad (\because\ u''<0)$$

$\leftrightarrow$

$$\int_{x=0}^{D} E\{u'[W-P(D)-D|X=x]\}f_X(x)\,dx$$

$$< \int_{x=0}^{D} E\{u'[W-P(D)-D]\}f_X(x)\,dx.$$

위의 식들에서 부등호의 방향이 한 번 바뀐 이유는 u'가 감소함수이었기 때문이다. 이것으로 (II-5)의 식 우변은 음(-)의 값, 즉 $H'(D)<0$이 되어 〈정리 3〉과 〈정리 4〉의 증명은 모두 종결된다.

우리가 지금까지 〈정리 2〉에서 〈정리 4〉에 걸쳐 사용한 각 음(-)의 상호의존성들 간의 관계는 다음과 같다[Aboudi · Thon (1995, p. 37) 참조바람].

$NRD(W\|X)$ 〈정리 2〉	→	$\frac{\partial}{\partial x}E(W\|X=x)<0$ 〈정리 3〉	→	$NED(W\|X)$ 〈정리 4〉

물론 위의 관계에서 화살표의 역은 성립되지 않는다. 또한 공분산이 가장 넓은 범위의 두 확률변수에 적용되는 개념이지만 정규분포를 가정하지 않는 한 Doherty · Schlesinger(1983a)의 $Cov(W,X)<0$은 일반적으로 확률지배모형이나 기대효용모형에서 Mossin 정리에의 충분조건이 되지 못함에도 유의하자[9].

III. 확률분포의 예시

이번 Ⅲ장에서는 확률분포의 예시를 통해, 우리의 연구결과가 홍순구(2001, 2004, 2007)의 연구결과와 중복되지 않고 서로 보완적 역할을 수행할 수 있음을 다시 한 번 확인한다. 또한 자기부담금 계약을 적용한 Aboudi · Thon(1995)의 직접적 연장선상에서 그 결과를 일반화시킨 것은, 홍순구(2001, 2004, 2007)가 아닌, 바로 우리의 연구결과가 됨을 보인다.

1. 기대의존성의 비대칭성

아래의 확률분포는 〈정리 4〉의 충분조건인 $NED(W|X)$은 충족하지만 홍순구(2007)의 충분조건인 $NED(X|W)$은 성립되지 않는 경우다.

9) 이에 관한 확률분포의 예시는 홍순구(2003)에서 찾아볼 수 있다.

〈확률분포 1〉

$f(x, \omega)$

$W \backslash X$	$x=7$	$x=8.99$	$x=9$
$\omega=10$	0.15	0	0.55
$\omega=20$	0	0.25	0
$\omega=30$	0.05	0	0

〈확률분포 1〉은 아래에서 확인할 수 있는 것처럼 모든 x에 대해 $E(W|X \le x) \ge E(W)$이 되므로 〈정리 4〉의 충분조건인 $NED(W|X)$의 성향을 갖는다. 즉,

$$E(W|X \le 7) = 15 > 13.5 = E(W),$$
$$E(W|X \le 8.99) = \frac{8}{0.45} = 17.7777\cdots > 13.5 = E(W),$$
$$E(W|X \le 9) = 13.5 = E(W).$$

하지만 이 확률분포는 예컨대 $\omega=10$인 경우, $E(W|\omega \le 10) < E(W)$가 되어 홍순구의 충분조건인 $NED(X|W)$를 충족시키지 못한다. 즉,

$$E(X|W \le 10) = \frac{6}{0.7} = 8.5714\cdots < 8.5975 = E(X).$$

따라서, 자산위험 W와 손실위험 X가 〈확률분포 1〉을 하는 보험계약자의 경우 자기부담금 보험계약을 하면 〈정리 4〉의 충분조건 $NED(W|X)$가 충족되므로 $D=0$즉 명백한 전부보험을 구입한다. 하지만 동일한 보험계약자가 비례보험계약을 하는 경

우 그 결과는 얼마든지 달라질 수 있다. 홍순구(2007)가 제시한 비례보험계약에서의 전부보험(혹은 가능하다면 초과보험) 충분조건인 $NED(X|W)$가 충족되지 않기 때문이다. 실제로, 홍순구(2007)에서의 방법처럼, 비례보험계약을 가정하고 무리효용함수 $u(y)=\sqrt{y}$ 를 사용해 보험계약자의 최적비례보험계수 a^*를 구해보면 다음과 같이 $H'(1)<0$ 즉, $a^*<1$의 일부보험이 최적이 된다.

$$H'(1) = E[u'(W-P)(-P+X)]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot E\left(\frac{X-P}{\sqrt{W-P}}\right)=\frac{1}{2}\cdot(-0.0036)<0 \rightarrow \text{일부보험.}$$

즉, $H'(1)<0$이므로 $a^*<1$이 확인된다. 요컨대, 〈확률분포 1〉을 가진 보험계약자는 자기부담금계약을 하는 경우는 전부보험($D^*=0$)을 최적으로 선택하지만, 홍순구(2007)의 비례보험계약에선 일부보험($a^*<1$)을 최적으로 선택한다. 홍순구(2007)의 비례보험계약 모형에선 전혀 그 역할이 없던 $NED(W|X)$이 우리의 자기부담금모형에선 충분조건이 되는 것이다. 물론 그 역의 경우도 마찬가지로 성립된다. 즉 이 예는 $NED(W|X)$는 홍순구(2007)의 $NED(X|W)$와 서로 보완적인 관계에 있음을 단적으로 보여 준다.

2. 회귀의존성과 Brumelle의 상호의존성

Aboudi · Thon(1995)는 자기부담금 계약에서 $NED(W|X)$이 Mossin 정리의 충분조건이 됨을 입증했고, 홍순구(2003, 2004)는 비례보험계약의 결과 'ω에 대해 감소하는 $E(X|W=\omega)$' 이 충분조건임을 확인했다. 하지만 보험계약의 형태가 달라진 것 만큼이나 두 결과도 완전히 별개의 것이 된다.

〈확률분포 2〉

$f(x, \omega)$

W \ X	$x=1$	$x=2$	$x=3$
$\omega=4$	0	$\frac{0.9}{24}$	$\frac{12.6}{24}$
$\omega=5$	$\frac{0.6}{24}$	$\frac{1.8}{24}$	0
$\omega=6$	$\frac{1.8}{24}$	$\frac{4.5}{24}$	$\frac{1.8}{24}$

〈확률분포 2〉는 원래 Aboudi · Thon(1995, p. 32)에서 양(+)의 회귀의존성 $PRD(W|X)$으로 제시된 예를 우리의 목적에 적합하게끔 음(-)의 회귀의존성 $NRD(W|X)$으로 변형시킨 것이다. 이 확률분포는 아래의 식에서 확인할 수 있는 것처럼 $\Pr(W \le \omega|X=x)$가, 모든 ω에 대해, x의 증가함수가 되므로 그 정의에 의해 $NRD(W|X)$가 된다. 즉,

ω=4인 경우,

$$\Pr(W \le 4|X=1) = \frac{0}{2.4} = 0$$

$$\Pr(W \le 4|X=2) = \frac{0.9}{7.2} = 0.0125$$

$$\Pr(W \le 4|X=3) = \frac{12.6}{14.4} = 0.875.$$

ω=5인 경우,

$$\Pr(W \le 5|X=1) = \frac{0.6}{2.4} = 0.25$$

$$\Pr(W \le 5|X=2) = \frac{2.7}{7.2} = 0.375$$

$$\Pr(W \leq 5 | X=3) = \frac{12.6}{14.4} = 0.875.$$

$\omega=6$인 경우,

$$\Pr(W \leq 6 | X=1) = \Pr(W \leq 6 | X=2) = \Pr(W \leq 6 | X=3) = 1.$$

하지만, 위의 확률분포에서 $E(X|W=\omega)$는 ω에 대한 감소함수가 되지 못한다. 즉,

$$E(X|\omega=4) = 2\times\frac{0.9}{13.5} + 3\times\frac{12.6}{13.5} = \frac{39.6}{13.5} = 2.933\ldots$$

$$E(X|\omega=5) = 1\times\frac{0.6}{2.4} + 2\times\frac{1.8}{2.4} = \frac{4.2}{2.4} = 1.75$$

$$E(X|\omega=6) = 1\times\frac{1.8}{8.1} + 2\times\frac{4.5}{8.1} + 3\times\frac{1.8}{8.1} = \frac{16.2}{8.1} = 2.$$

부연하면, Brumelle(1974, Theorem 5, p. 481)은 $NRD(W|X)$이면 $E(W|X=x)$는 x에 대해 감소함수임을 증명했다. 위의 확률분포는 $NRD(W|X)$이기 때문에, Brumelle(1974)의 정리에 의해, x에 대해 감소하는 $E(W|X=x)$의 성향이 명백히 나타난다. 이 내용은 독자들 각자가 확인해 보기 바란다.

요컨대, Aboudi · Thon(1995)의 $NRD(W|X)$은 홍순구(2003, 2004)의 $\frac{\partial}{\partial\omega}E(X|W=\omega)<0$를 의미하지(imply) 못한다. 즉, Aboudi · Thon(1995)와 홍순구(2003, 2004)는 각각 다른 보험계약 하에서 통계학적 상호의존성도 중복되지 않는 서로 상이한 충분조건을 제시한 독립된 연구들이다. 하지만 우리의 〈정리 3〉과 〈정리 4〉에서의 $\frac{\partial}{\partial x}E(W|X=x)<0$과 $NED(W|X)$는 Aboudi · Thon(1995)에서의 $NRD(W|X)$가 그대로 확장된 개념이다.

Ⅳ. 요약 및 맺음말

우리의 논문은, Doherty · Schlesinger(1983a) 및 Aboudi · Thon(1995) 등의 직접적인 연계선 상에서, 외생적 배경위험이 존재하는 자기부담금 보험계약을 적용해 순보험료 하의 Mossin 정리가 성립될 수 있는 충분조건들을 유도했다. 이 충분조건들은 모두 배경위험과 순수손실위험 간의 결합확률분포에 대한 제약성으로 표현되었다. 우리의 연구결과는 다음과 같이 요약된다.

먼저 우리는 이 연구의 착수 단계로 Doherty · Schlesinger(1983a)의 정리에 주목했다. 하지만 Doherty · Schlesinger의 정리는 정규분포를 가정했다는 단점에 노출되어 있다. 그 후 Aboudi · Thon(1995)는 보다 일반적인 제2차 확률지배이론을 적용해, 배경위험이 순수손실위험에 대해 음(-)의 회귀의존성 관계에 있으면 보험계약자는 자기부담금이 '0' 인 전부보험을 구입한다는 정리를 증명하고 있다〔즉, $NRD(W|X) \rightarrow D=0$〕. Aboudi · Thon(1995)의 정리는 지금까지도 이 분야의 가장 중추적인 연구로 평가되는 중요한 결과다. 하지만 Aboudi · Thon (1995)는 각 위험들의 이산확률분포를 가정했고, 또 그 정리의 증명과정은 길고도 복잡하다. 우리는 보다 일반적인 연속확률분포를 적용해 Aboudi · Thon(1995)과 동일한 결과를 기대효용모형 하에서 간결히 증명했다.

이제 이 논문의 주된 연구결과로, 우리는 위의 두 연구결과에 근거해 Brumelle(1974)의 상호의존성 및 Wright(1987)의 기대의존성을 도입해 Aboudi · Thon(1995)의 연구결과를 보다 일반화시켰다. 요컨대 〈정리 3〉과 〈정리 4〉는 순수손실위험의 증가에 대해 외생적 배경위험의 조건부기댓값이 감소하는 경우 및 더 나아가 배경위험이 순수손실위험에 대해 음(-)의 기대의존성 관계에 있는 경우 보험계약자는 자기부담금이 '0' 인 전부보험을 구입한다는 내용을 입증했다

〔즉, $\frac{\partial}{\partial x}E(W|X=x) < 0 \rightarrow D=0,\ NED(W|X) \rightarrow D=0$〕.

특히, 우리는 이 두 정리를 비례보험계약 하에서 Mossin 정리를 분석한 홍순구(2001, 2004, 2007)의 연구결과와 비교했다. Brumelle(1974)의 상호의존성은 홍순구(2001, 2004)에서 $\frac{\partial}{\partial \omega}E(X|W=\omega) < 0$로, 그리고 Wright(1987)의 기대의

존성은 홍순구(2007)에서 $NED(X|W)$으로 이미 활용된 바 있다. 하지만, 우리의 연구결과는, 비례보험계약의 홍순구(2001, 2004, 2007)와는 달리 자기부담금 계약의 모형을 채택했다는 점 외에도, 무엇보다 그 결과물 즉 Mossin 정리에의 충분조건이 홍순구(2001, 2004, 2007)와 중복되지 않고 상이하다는 점이 중요하다. 그 이유는 Brumelle(1974)의 상호의존성과 Wright(1987)의 기대의존성이 모두 비대칭적인 상호의존 측정수단이기 때문인 것으로 귀결된다. 바로 이런 비대칭성으로 인해 홍순구(2001, 2004)의 충분조건 $\frac{\partial}{\partial \omega}E(X|W=\omega)<0$는 Aboudi · Thon(1995)의 $NRD(W|X)$를 포함하는 개념이 되지 못한다. 요컨대 Aboudi · Thon(1995)와 홍순구(2001, 2004)의 충분조건을 비교하는 것은 무의미한 시도가 된다. 하지만 이제 Aboudi · Thon(1995)의 $NRD(W|X)$는 우리 논문에서의 $\frac{\partial}{\partial x}E(W|X=x)<0$ 그리고 $NED(W|X)$를 의미하는 개념이 된다. 우리는 이런 내용을 〈그림 1〉로 요약했고 또 확률분포의 예도 제시했다.

아울러, 우리는 확률분포의 또 한 예를 들어 이 논문의 연구가 홍순구(2001, 2004, 2007)의 결과와 결코 중복되지 않음을 확인했다. 즉, 이 논문의 자기부담금계약에서 Mossin 정리 충분조건인 $NED(W|X)$는 충족되지만 비례보험계약인 홍순구(2007)에서의 충분조건 $NED(X|W)$를 충족시키지 못하는 확률분포의 예이다. 이 예에서 우리는 보험계약자가 자기부담금계약에선 전부보험($D^*=0$)을 최적으로 선택하지만, 홍순구(2007)의 비례보험계약에선 일부보험($a^*<1$)을 최적으로 선택함을 보였다. 요약하면 홍순구(2007)의 비례보험계약 모형에선 전혀 그 역할이 없던 $NED(W|X)$이 우리의 자기부담금모형에선 충분조건이 되는 것이다. 물론 그 역의 경우도 마찬가지로 성립된다. 즉 이 예는 $NED(W|X)$는 홍순구(2007)의 $NED(X|W)$와 서로 보완적인 관계에 있음을 단적으로 보여 준다.

참 고 문 헌

정필권, 『경제학에서의 최적화이론과 응용』, 세경사, 1997.

홍순구, 「A Reexamination of the Bernoulli Principle Under Initial Wealt Uncertainty」, 『보험학회지』제59집, 2001, pp. 295~306.

_______, 「베르누이원칙과 평균보유확산: 부보할 수 없는 위험이 존재하는 경우」, 『리스크관리연구』제15권 제2호, 2004 가을, pp. 29~52.

_______, 「기대의존성과 다수위험하의 베르누이원칙」, 『보험개발연구』 통권 51호, 제18권 제2호, 2007, pp. 79~114.

Aboudi, R. and Thon, D., "Second-Degree Stochastic Dominance Decisions and Random Initial Wealth with Applications to the Economics of insurance", *Journal of Risk and Insurance*, 62, No. 1, 1995 March, pp. 30~49.

Brumelle, Shelby L., "When does Diversification Between two Investments Pay?", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, June 1974, pp. 473~482.

Doherty, Neil A., "Chapter 2 Risk and Utility: Economic Concepts of Decision Rules," *Integrated Risk Management: Techniques and Strategies for Managing Corporate Risk*, 2000, McGraw-Hill Companies, Inc., pp. 17~60,

Doherty, Neil A. and Schlesinger, H., "The Optimal Deductible for an Insurance Policy When Initial Wealth is Random", *Journal of Business*, 1983a, pp. 555~565.

_______, Optimal Insurance in Incomplete Markets, *Journal of Political Economy*, 1983b, pp. 1045~1054.

Epstein, L., and Tanny, S., "Increasing Generalized Correlation: A Definition and Some Economic Consequences", *Canadian Journal of Economics* 8, 1980, pp. 16~34.

Hildreth, C. and Tesfatsion, S., "A Note on Dependence between a Venture and a Current Prospects", *Journal of Economic Theory*, 15, 1977, pp. 381~391.

Lehmann, E. L., "Some Concepts of Dependence", *Annals of Mathematical Statistics* 37, 1966, pp. 1137~1153.

Mossin, J., "Aspects of Rational Insurance Purchasing," *Journal of Political Economy*, 1968, pp. 553~568.

Schlesinger, H., "The Optimal Level of Deductiblity in Insurance Contracts," *Journal of Risk and Insurance*, 1981, pp. 465~481.

_______, "The Theory of Insurance Demand", in G. Dionne (Ed.), *The Handbook of Insurance*, 2000, Boston: Kluwer Academic Publishers, pp. 131~151.

_______, "Mossin's Theorem for Upper-Limit Insurance Policies." *Journal of Risk and Insurance*, 2005.

Schlesinger, H. and Doherty, N. A., "Incomplete Markets for Insurance: An Overview," *Journal of Risk and Insurance*, September 1985, pp. 402~423.

Smith, Vernon, L., "Optimal Insurance Coverage," *Journal of Political Economy,* 1968, pp. 68~77.

Wright, R., "Expectation Dependence of Random Variables, With an Application in Portfolio Theory", *Theory and Decision*, 22, 1987, pp. 111~124.

Abstract

This paper, assuming actuarially fair insurance, examines a Mossin's Theorem for a deductible insurance policy when initial wealth is random. Existing sufficient conditions for Mossin's Theorem in a deductible contract are extended. In essence we establish the conditions with a version of negative expectation dependence as well as Brumelle(1974)'s stochastic interdependence notion. Our results are quite general to allow for Aboudi · Thon(1995) or Doherty · Schlesinger(1983a) as a special case.

In particular, it is confirmed that our sufficient conditions are not duplicated with those of Hong(2001, 2004, 2007), which also apply for Brumelle(1974)'s and Wright(1987)'s dependence measure to a coinsurance contract. Mossin's Theorem for deductible insurance, which holds under our conditions, does not hold any more under the conditions of Hong(2001, 2004, 2007) in general, and vice versa. We clearly show how two conditions differ by theory and by hypothetical probability distributions.

※Key Words: deductible, fair insurance, mean-variance analysis, Mossin's Theorem