보험계약자의 최적 손실포트폴리오 및 자산포트폴리오에 미치는 부의 효과

Wealth Effects on the Insured's Optimal Loss Portfolio and Asset Portfolio

홍 순 구*
Hong Soon-Koo

Mossin(1968) 이래, *DARA*의 가정 하에서, 보험은 부(wealth)가 증가할수록 그 수요가 감소하는 열등재가 된다는 것은 잘 알려진 사실일 것이다. 우리의 논문은, Mossin(1968)의 결과를 근간으로 해, 추가적으로 부의 증감이 보험계약자가 선택하는 최적 손실포트폴리오 및 자산포트폴리오에 주는 영향을 조사해 본다.

우리의 연구 결과는 현대 경제학의 표준가설인 *DARA*의 경우 다음과 같이 요약된다. 부가 증가하면 *DARA*의 보험계약자는 열등재인 보험구매를 줄이게 된다(Mossin, 1968). 그 결과 보험료지출과 자기부담손해의 합계액인 손실포트폴리오는 분산위험은 물론 Rothschild · Stiglitz(1970)의 관점에서도 더욱 그 위험성이 높아지지만, 보험계약자가 궁극적으로 보유하게 되는 전체 기말 자산포트폴리오는 부가보험료의 절감으로 인해 그 기댓값 및 확실성등가(certainty equivalent)가 부의 증가보다도 빠른 속도로 향상된다. 아울러, 우리의 연구는 *CARA* 및 *IARA*에서의 결과물도 함께 제시한다.

국문 색인어: 부의 효과, 손실포트폴리오, 열등재, 자산포트폴리오, 정상재, 확실성등가
학술진흥재단 분류 연구분야 코드: B051605

* 서울산업대학교 경영학과 교수(soonkooh@snut.ac.kr)
논문 투고일: 2009. 08. 17, 논문 최종 수정일: 2009. 10. 01, 논문 게재 확정일: 2009. 11. 24

www.kci.go.kr

I. 머리말

현대 경제학의 표준가설인 *DARA*(감소하는 절대위험회피, Decreasing Absolute Risk Aversion; 이하 *DARA*)의 가정 하에서, 위험자산(risky asset)은 부가 증가할수록 그 수요도 함께 증가하는 정상재(normal good)이고(Arrow, 1965), 반대로 보험은 그 수요가 감소하는 열등재(inferior good)가 된다는 것(Mossin, 1968)은 잘 알려진 사실일 것이다.

특히 재무경제학에서는 이 분야의 효시가 되는 Arrow(1965)의 연구 이래 투자포트폴리오에 미치는 부의 효과가 다양한 형태로 분석되어 왔다. 주요한 예를 들어보면, Levy · Sarnat(1971) 및 Levy · Kroll(1978)에서는 기존의 무위험자산인 초기 부(initial wealth)를 투자위험과 상호의존성이 있는 확률변수로 보다 일반화시켜 투자포트폴리오에 미치는 부의 효과를 분석했고, Cass · Stiglitz(1972)와 Long(1975)에서는 부의 증감이 투자자의 최적포트폴리오 구조 즉 투자포트폴리오의 평균과 분산 및 그 위험성 그리고 확실성등가에 미치는 효과를 광범위하게 조사하고 있다. 부의 효과는, 이 밖에도, 재무경제학의 여러 분야에서 최근까지도 광범위하고 다양하게 연구되고 있는 주제이다.(Kyle · Xiong 2001, Boucher et al. 2008, Pantos 2008)

하지만 재무학에서와는 달리 보험학에서는 Mossin(1968) 이후, 저자가 아는 범위에선, 부의 효과에 관해 심도있게 진전된 연구가 거의 없는 것으로 보인다. 굳이 관련연구에 관한 지적을 하자면, 부의 효과가 아닌, 가격효과(price effect)를 분석한 Hoy · Robson(1981) 그리고 Briys · Dionne · Eeckhoudt(1989) 등이 있는 정도다. 하지만, 이 두 연구는 모두 보험상품이 기펜재(Giffen good)가 될 수 있는 가능성의 여부에 초점을 맞추고 있다. 즉, Hoy · Robson(1981)은 효용함수가 일정한 상대위험회피(Constant Relative Risk Aversion: CRRA)의 성향을 보이면 보험이 기펜재가 될 수 있음을 보였고, 또 다른 각도에서 Briys · Dionne · Eeckhoudt(1989)는 보험이 기펜재가 될 수 없는 필요충분조건(necessary and sufficient conditions)을 제시하고 있다. 하지만 기펜재에의 관심을 떠나면 부의 효

www.kci.go.kr

과를 보험수요에 접목시킨 논문은 더 이상 찾아보기 힘들다.[1)]

이제 우리의 논문은, Hoy · Robson(1981) 그리고 Briys · Dionne · Eeckhoudt(1989)와는 관점을 달리 해서, 순수한 부의 효과(wealth effect)를 분석한다. 요컨대, Mossin(1968)의 연구결과 즉, ***DARA***에서의 보험은 열등재 그리고 ***IARA***(증가하는 절대위험회피, Increasing Absolute Risk Aversion)에서의 보험은 정상재가 되는 것을 근간으로 해, 보험계약자의 부의 증감과 보험계약자가 보유하게 되는 최적 손실포트폴리오(보험료 지출과 자기부담손해액의 합계) 및 자산포트폴리오 간에 성립되는 여러 관련식들을 유도한다. 구체적으론, Rothschild · Stiglitz(1970, 1971)이 정의한 위험성 증가의 개념과 투자포트폴리오를 분석하는 Cass · Stiglitz(1972) 그리고 Eeckhoudt · Gollier(1995a) 등에서의 방법론을 활용해, 보험계약자의 최적 손실포트폴리오의 위험성 변화에 미치는 부의 효과, 부의 증감과 보험계약자가 감수하는 위험(risk-taking) 간의 상호연관성, 그리고 궁극적으로 부의 증가가 보험계약자의 자산포트폴리오에 주는 영향을 위험성과 확실성등가(certainty equivalent) 등의 관점에서 파악해 본다.

요컨대, 우리의 논문은, 부의 효과와 관련해, 기존의 보험수요모형에서는 연구되지 않았던, 다음과 같은 새로운 내용들을 입증한다. 첫째로, *DARA*(*IARA*)의 위험성향을 지닌 보험계약자의 부가 증가하면 납입보험료와 자기부담손실액의 합계액인 손실포트폴리오의 기대값은 감소(증가)하고 표준편차는 증가(감소)하며, 따라서 손실포트폴리오의 변동성계수는 높아지게 된다. 둘째로, 평균 · 분산모형에서 벗어나, 보다 일반적으로, 손실포트폴리오의 손실 1단위당 위험성의 증가를 Rothschild · Stiglitz(1970)의 개념으로 정의하면, *DARA*(*IARA*)의 경우 부의 증가에 대해 손실포트폴리오의 손실 단위당 지출은 그 변동위험성이 더욱 높아지는 평균보유확산(평균보유응축)이 된다. 셋째로, 보험계약자의 부가 증가하면 ***DARA(IARA)***의 경우 보험계약자가 보유하게 되는 전체 자산포트폴리오의 기댓값 그

1) 참고로 말하면 , 비교적 최근까지의 보험수요이론들을 요약 · 정리해 놓은 리뷰우 페이퍼(review paper)인 Schlesinger(2000, pp.135-137)에서도, 부의 효과에 관해선, 단순히 보험이 열등재임을 재확인하고 있을 뿐이다.

www.kci.go.kr

리고 확실성등가는 부의 증가보다 빠른(느린) 속도로 향상되지만, 보험계약자가 감수해야 하는 전체 위험은 더 커지게(감소하게) 된다.

끝으로, 이 논문은 다음과 같은 순서로 진행된다. II장에서는 우리의 연구를 진행하는데 필요한 사용기호와 분석모형 그리고 보험료 조건을 정의한다. III장에서는 최적보험을 한계리스크프리미엄으로 해석하고 아울러 부의 증감이 한계리스크프리미엄에 주는 효과를 규명한다. IV장은, III장에서의 분석을 근거로, Mossin(1968)의 정리 즉, 보험이 *DARA*에선 열등재 그리고 *IARA*에선 정상재가 됨을 다시 한 번 확인하고, 아울러 그 이유를 한계리스크프리미엄을 통해 재해석해 본다. 이후 V장에선 손실포트폴리오로 정의되는 손실관련비용의 집합체 즉 보험료와 보험계약자의 자기부담 손해액의 합계에 미치는 부의 효과를, 특히 Rothschild · Stiglitz(1970, 1971)의 위험성 증가 관점에서, 파악해 보고, VI장에선 부의 증감이 보험계약자가 궁극적으로 보유하게 되는 자산포트폴리오에 미치는 영향을 평균과 분산 그리고 확실성등가를 중심으로 확인한다. 끝으로 VII장에선 요약과 함께 우리의 논문을 마무리한다.

II. 보험수요모형

우리의 분석은 다음과 같은 기대효용모형 하에서 수행된다.

1. 분석모형

초기의 부 w를 보유하고 있는 보험계약자가 $a(0\leq a\leq 1)$만큼 비례보험을 구입하는 경우, 기간 말 보험계약자의 富(wealth) Y는 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$Y=w-aP-(1-a)L. \qquad (\text{II-1})$$

www.kci.go.kr

위의 식에서, 전부보험(a=1)인 경우 $Y=w-P$가 되고, 여기서 우리는 편의상 보험계약자의 부 w는 전부 보험료 P보다는 크다고 가정한다. 즉,

$$w-P > 0. \tag{II-2}$$

이제 위의 기호를 이용하면, 우리는 보험계약자가 최적보험 α를 선택하기 위한 기대효용 $H(a)$는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} E[u(Y)] &= \int_0^\infty u[w-aP-(1-a)L]f(L)dL \\ &\equiv H(a). \end{aligned} \tag{II-3}$$

또한 우리는 위의 식 H를 극대화하는 데 필요한 1차조건 $H'(\alpha^*)=0$과 2차조건 $H''(\alpha^*)<0$을 각각 아래의 식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} H'(\alpha) &= \int_0^\infty u'[w-aP-(1-a)L](-P+L)f(L)dL \\ &= E[u'(Y)(-P+L)] \\ &= 0, \end{aligned} \tag{II-4}$$

$$\begin{aligned} H''(\alpha) &= \int_0^\infty u''[w-aP-(1-a)L](-P+L)^2 f(L)dL \\ &= E[u''(Y)(-P+L)^2] \\ &< 0. \end{aligned} \tag{II-5}$$

위의 식 (II-5)에서, 보험계약자의 위험회피성향($u''<0$)에 의해 항상 $H''(\alpha)<0$이 성립하므로, H는 a에 관해 '잘 정의된 오목함수(well-defined concave function)'가 되고, 따라서 $H'(\alpha^*)=0$를 충족하는 α^*에서 H는 유일한 극대값(maximum)을 갖는다.

www.kci.go.kr

2. 보험료조건

우리의 분석모형에서, 보험료는 보상금액의 기대값인 순보험료와 그에 비례하는 양(+)의 값을 가진 부가보험료로 결정됨을 가정한다. 즉, λ를 '부가보험료 요인'으로 정의하면, $\lambda > 0$이 되고, 또한 보험료는 다음과 같은 크기가 된다.

$$\begin{aligned} \alpha = 1 \text{(전부보험)} \quad &\rightarrow \quad P = (1+\lambda) \cdot E(L), \\ 0 \le \alpha < 1 \text{(일부보험)} \quad &\rightarrow \quad \alpha P = (1+\lambda) \cdot \alpha \cdot E(L). \end{aligned}$$

따라서 위의 기호를 이용하여 우리는 다음과 같은 보험료의 가정 하에 분석을 계속한다.

$$\lambda > 0 \text{ 또는 } P > E(L). \tag{II-6}$$

이 단계에서 우리는 최적보험계수 a^*의 특성 하나를 확인하고 넘어간다. 보험료 (II-6)의 가정 하에서는 항상 $H'(1) < 0$이 되어 보험계약자가 선택하는 최적보험은 항상 엄격한 일부보험 (strictly partial coverage) $a^* < 1$이 된다는 사실이다. 이 내용은 다음과 같이 확인된다. 즉,

$$\begin{aligned} H'(1) &= \int_0^\infty u'[w-P)(-P+L)f(L)dL \\ &= u'(w-P)(-P+E(L)] \\ &< 0. \qquad [\because u' > 0,\ P > E(L)] \end{aligned}$$

이번엔 보험료 (II-6)의 가정 하에서, 보험계약자가 무보험(no insurance) 상태에서 벗어나 조금이라도 보험을 구입하게 되는 (즉,$\alpha^* > 0$) 보험료 조건을 찾아본다. 즉 우리는 $H'(0) > 0$를 충족시키는 λ의 범위를 다음과 같이 확인해 볼 수 있다.

www.kci.go.kr

$$H'(0) = E[u'(Y)][-P + E(L)] + Cov[u'(Y), L] > 0.$$

위의 식에서 $\alpha = 0$이므로 $Y = w - L$이 된다. 또한 여기서 $P = (1+\lambda) \cdot E(L)$ 그리고 $\lambda > 0$임에 유의하면 우리는 $\alpha^* > 0$ 또는 $H'(0) > 0$의 조건으로부터 다음 식을 유도할 수 있다.

$$\lambda < \frac{Cov[u'(w-L), L]}{E[u'(w-L)] \cdot E(L)}. \qquad \text{(II-7)}$$

이 때, 우리는 위의 부등식 우변의 분자인 $Cov[u'(Y), L]$가 $u'' < 0$의 가정 하에선 항상 양(+)의 값을 가짐에 유의해야 한다. 그 이유는 $Y = w - L$이므로 L과 Y는 서로 負(-)의 관계에 있으며, 또한 $u'' < 0$이므로 $u'(Y)$와 L은 항상 正(+)의 관계를 갖게 되어 $Cov[u'(Y), L] > 0$이 되는 까닭이다.

이제 우리는 위의 두 결과 즉 $H'(0) > 0$ 그리고 $H'(1) < 0$을 종합해, 부가보험료가 양(+)의 값을 갖지만 너무 과도하지 않은 다음 범위에 있다고 가정한다. 즉,

$$0 < \lambda < \frac{Cov[u'(w-L), L]}{E[u'(w-L)] \cdot E(L)}. \qquad \text{(II-8)}$$

다시 한 번 강조하면, 이제 우리가 가정하는 보험료 조건 (II-8) 하에서는 보험계약자가 선택하는 최적보험은 항상 엄격한 일부보험($0 < \alpha^* < 1$)이 된다. 그리고 보험료 가정 (II-8)은 이후로 이 논문 전체에 엄격히 적용된다.

3. 절대위험회피도에 관한 추가적 가정과 보험수요의 관련식

우리는 효용함수 $u(Y)$의 '절대위험회피도'를 $ARA(Y)$로 표기하기로 한다. 즉,

.

www.kci.go.kr

$$ARA(Y) = -\frac{u''(Y)}{u'(Y)}.$$

또한 부(wealth)가 증가함에 따라 '감소하는 절대위험회피(Decreasing Absolute Risk Aversion)'의 효용함수는 *DARA*, '증가하는 절대위험회피(Increasing Absolute Risk Aversion)'의 효용함수는 *IARA*, 그리고 '일정한 절대위험회피(Constant Absolute Risk Aversion)'의 효용함수는 *CARA*로 표기하면, 각 효용함수의 내용은 다음과 같이 요약된다.

$$\frac{d}{dY}ARA(Y) < 0 \quad \rightarrow \quad DARA,$$

$$\frac{d}{dY}ARA(Y) = 0 \quad \rightarrow \quad CARA,$$

$$\frac{d}{dY}ARA(Y) > 0 \quad \rightarrow \quad IARA.$$

우리는 위의 세 효용함수의 개념을 이용하면 앞으로 우리의 목적한 바 각 정리들을 증명하는데 요긴하게 사용될 두가지 '도움정리'를 유도할 수 있다. 먼저 우리는 여기서 일부보험의 최적조건 즉 식 (II-4)의 $H'(\alpha)=0$을 이용해 다음의 〈도움정리 1〉을 확인한다.

〈도움정리 1〉

$$\begin{aligned} DARA \quad &\rightarrow \quad E[u''(Y)(-P+L)] < 0, \\ CARA \quad &\rightarrow \quad E[u''(Y)(-P+L)] = 0, \\ IARA \quad &\rightarrow \quad E[u''(Y)(-P+L)] > 0. \end{aligned}$$

www.kci.go.kr

(증명) 실제로 사용기호는 조금 다르지만, 이 〈도움정리 1〉의 증명과 유사한 내용은 Mossin(1968) 그리고 Schlesinger(1981, 2000) 등에서 찾아볼 수 있으므로 여기서는 생략하기로 한다.

이번엔 효용함수 u의 역함수(inverse function)를 이용하는 〈도움정리 2〉를 유도해 본다. 먼저 우리는 불포만성의 가정 $u'(Y)>0$에 의해 u가 Y의 엄격한 단조증가함수(strictly monotonic increasing function)가 됨에 유의한다. 그러면, 원래는 u가 Y의 함수이지만 〔즉, $u=u(Y)$〕, 우리는 Y를 u의 역함수(inverse function) $Y=Y(u)$로도 생각할 수 있다. 이런 경우, $u'(Y)=u'[Y(u)]$가 되기 때문에, 결국 u'는 u의 함수가 된다. 이런 역함수의 개념을 이용하면 우리는 다음 〈도움정리 2〉를 유도할 수 있다.

〈도움정리 2〉

감소 절대위험회피이면 그 경우에 한해 u'는 u의 엄격한 볼록함수가 되고,
일정 절대위험회피이면 그 경우에 한해 u'는 u의 선형함수가 되며,
증가 절대위험회피이면 그 경우에 한해 u'는 u의 엄격한 오목함수가 된다.
즉,

$$DARA \quad \leftrightarrow \quad \frac{d^2u'}{du^2} > 0,$$

$$CARA \quad \leftrightarrow \quad \frac{d^2u'}{du^2} = 0,$$

$$IARA \quad \leftrightarrow \quad \frac{d^2u'}{du^2} < 0.$$

(증명) 우리는 위의 증명과 유사한 내용을 Cass · Stiglitz(1972)의 투자포트폴리오 모형에서도 찾아볼 수 있다. 여기서는 생략하기로 한다.

위의 두 도움정리는 앞으로 Ⅳ장 이후의 본정리 증명에 요긴하게 사용된다.

www.kci.go.kr

III. 부의 증감과 리스크프리미엄

1. 부의 증감과 리스크프리미엄

우리는 Arrow-Pratt의 리스크프리미엄 Δ를 다음 식에서처럼 내재적으로 정의할 수 있다.

$$E[u(Y)]=u[E(Y)-\Delta]. \qquad \text{(III-1)}$$

그리고, 불확실성의 경제학에서 잘 알려진 바처럼, 부의 증감에 대해 이 리스크프리미엄 Δ는 보험계약자의 위험성향에 따라 다르게 반응한다. 다음 〈도움정리 3〉은 이 내용을 요약한다.

〈도움정리 3〉

보험계약자의 효용함수가
감소 절대위험회피이면 그 경우에 한해 리스크프리미엄은 부의 감소함수가 되고, 일정 절대위험회피이면 그 경우에 한해 리스크프리미엄은 부의 증감과 무관하며, 증가 절대위험회피이면 그 경우에 한해 리스크프리미엄은 부의 증가함수가 된다.
즉,

$$DARA \quad \leftrightarrow \quad \frac{d\Delta}{dw} < 0,$$

$$CARA \quad \leftrightarrow \quad \frac{d\Delta}{dw} = 0,$$

$$IARA \quad \leftrightarrow \quad \frac{d\Delta}{dw} > 0.$$

www.kci.go.kr

(증명) 이 〈도움정리 3〉의 증명은, Gollier(2001, pp. 24-25) 또는 Chavas (2004, pp. 40-42) 등을 비롯해, 여러 문헌에서 확인해 볼 수 있다. 여기서는 생략하기로 한다.

2. 한계리스크프리미엄

한편, 우리의 모형에선, 부가보험료 (II-8)의 가정 하에서 최적보험은 $0\langle\alpha^*\langle 1$이 되고, 또한 이 때 1차 조건 (II-4)의 $H'(\alpha)=0$으로 부터 다음 관계식을 유도할 수 있다.

$$P=E(L)+\frac{Cov[u'(Y),\ L]}{E[u'(Y)]}. \qquad \text{(III-2)}$$

그런데 여기서 위의 식 우변의 두 번째 항은 한계리스크프리미엄(Marginal Risk Premium) 즉 $\frac{d\Delta}{d\alpha}\equiv\Delta_\alpha$으로 해석된다. 그 이유는 다음과 같다. 리스크 프리미엄 Δ는 α의 함수임에 유의해, 최적보험계수 α^*를 구하기 위해 (III-1)의 식 우변을 α에 관해 미분하면 그 1차조건은 다음과 같이 나타난다.

$$\frac{d}{d\mathrm{a}}u[E(Y)-\Delta]=u'[E(Y)-\Delta]\cdot[-P+E(L)-\Delta_\alpha]=0.$$

물론 위의 식에서 Δ_α는 한계리스크프리미엄 즉 $\frac{d\Delta}{d\alpha}$를 나타낸다. 이 때, 불포만성에 의해 항상 $u'\rangle 0$이므로 위의 1차조건은 간단히 다음 식으로 줄여진다.

$$P=E(L)+\Delta_\alpha\ . \qquad \text{(III-3)}$$

따라서 우리는 두 1차조건의 식 (III-2)와 (III-3)을 비교하면, 한계리스크프리미

www.kci.go.kr

엄 Δ_a가 다음과 같은 값을 갖게 됨을 확인할 수 있다. 즉,

$$\Delta_a = \frac{Cov[u'(Y), L]}{E[u'(Y)]}. \qquad \text{(III-4)}$$

한편, 위의 식에서 부가보험료 조건 (II-8)에 의해 $0<\alpha^*<1$이므로 $Y=w-aP-(1-a)L$이 되고, 또 이 때 $Cov[u'(Y), L]>0$이 되므로 (III-4)의 한계리스크프리미엄 Δ_a는 항상 양(+)의 값을 갖게 된다,

3. 한계리스크프리미엄과 최적보험

다음 〈도움정리 4〉는 최적보험구입량 a와 한계위험프리미엄 Δ_a간에 성립하는 중요한 관련식 하나를 요약하는 내용이다.

〈도움정리 4〉

한계리스크프리미엄은 최적보험구입량의 감소함수이다. 즉,

$$\frac{d\Delta_a}{d\alpha} < 0.$$

(증명) 위의 정리는 류근옥 · 홍순구(2002)에 증명되어 있으므로 여기서는 생략하기로 한다.

요컨대, $0<\alpha^*<1$에서 한계리스크프리미엄 Δ_a는 항상 양(+)의 값을 갖게 되는데, 이 때 한계리스크프리미엄 Δ_a는 α의 감소함수가 되고, 특히 $\alpha=1$에서는 $\Delta_a=0$으로 귀결된다.[2)]

2) $\alpha=1$이면 $Y=w-P$는 상수가 된다. 따라서 식 (III-4)의 분자에서 공분산항은 '0' 이 된다.

www.kci.go.kr

4. 부의 증감과 한계리스크프리미엄

이번엔 부(w)의 증가가 한계 리스크프리미엄(Δ_a)의 크기에 미치는 영향을 확인해 본다. 이 내용은 다음 〈도움정리 5〉로 요약된다.

〈도움정리 5〉

보험계약자의 효용함수가
감소 절대위험회피이면 한계리스크프리미엄은 부의 감소함수가 되고,
일정 절대위험회피이면 한계리스크프리미엄은 부의 증감과 무관하며,
증가 절대위험회피이면 한계리스크프리미엄은 부의 증가함수가 된다.
즉,

$$DARA \quad \rightarrow \quad \frac{d\Delta_a}{dw} < 0,$$

$$CARA \quad \rightarrow \quad \frac{d\Delta_a}{dw} = 0,$$

$$IARA \quad \rightarrow \quad \frac{d\Delta_a}{dw} > 0.$$

(증명) Eeckhoudt · Gollier(1995a, pp. 128-133 및 p. 331)는 투자포트폴리오의 모형에서 위험의 한계비용(marginal cost of risk)에 미치는 부의 효과를 유도하고 있다. 이들의 증명방법은 우리의 보험포트폴리오 모형에서도 쉽게 적용되므로 우리는 지면 관계상 생략하기로 한다.[3)]

3) 보다 구체적인 증명과정을 원하는 독자는 e-mail 등으로 저자에게 연락을 취하면 쉽게 확인해 볼 수 있겠다.

www.kci.go.kr

IV. 부의 증감과 최적보험

Mossin(1968)은 *DARA*에서 보험이 열등재임을 보였다. 이 Mossin(1968)의 정리는 우리의 분석모형에서 다음 〈정리 1〉로 요약된다.

〈정리 1〉

보험계약자의 부가 증가하는 경우,
감소 절대위험회피의 성향이면 보험구입량은 감소하게 되고,
일정 절대위험회피의 성향이면 보험구입량은 변함이 없으며,
증가 절대위험회피의 성향이면 보험구입량은 증가하게 한다. 즉,

$$DARA \quad \rightarrow \quad \frac{d\alpha}{dw} < 0,$$

$$CARA \quad \rightarrow \quad \frac{d\alpha}{dw} = 0,$$

$$IARA \quad \rightarrow \quad \frac{d\alpha}{dw} > 0.$$

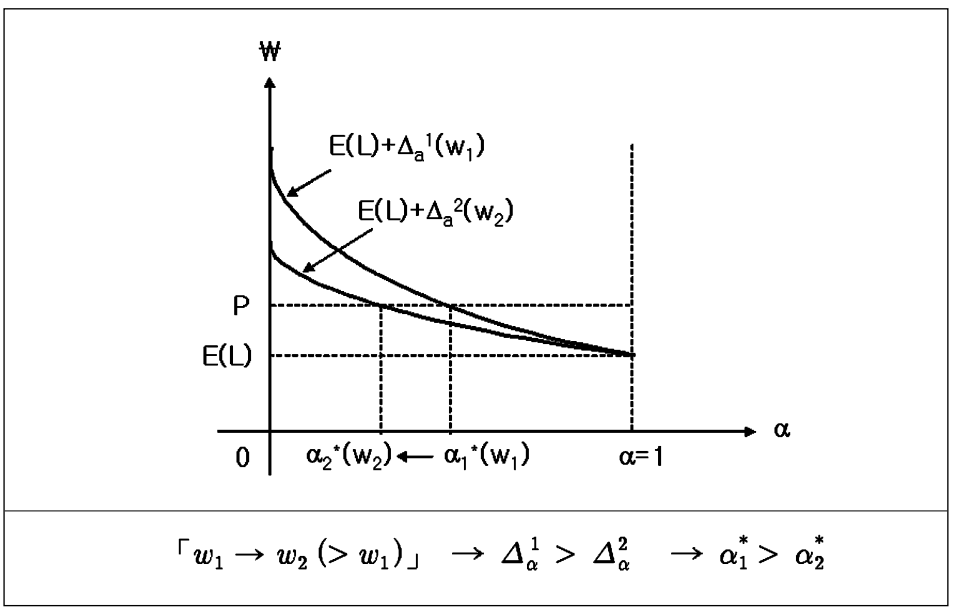
(증명) 우리는 한계리스크프리미엄의 〈도움정리〉들을 이용하면 직관적이고 가시적인 방법으로 〈정리 1〉을 입증할 수 있다[4]. 〈도움정리 4〉에 의해 우리는 *DARA*의 경우 $d\Delta_a/da<0$임을 확인했다. 즉, 한계리스크프리미엄 Δ_a는 보험구입량 a의 단조감소함수가 된다. 아울러, $a=1$에서 $\Delta_a=0$이 됨에도 유의하면, 우리는 한계리스크프리미엄 Δ_a와 최적보험구입량 α^*간의 함수관계를 다음 〈그림 1〉에서와 같이

4) *DARA*의 경우 보험이 열등재가 되는 것은 여러 논문에, 예컨대 Mossin(1968) 또는 Schlesinger(1981, 2000) 등등에, 유사한 방법으로 증명되어 있다. 이들 논문은 주로 직접적인 수학적 계산에 의존했지만, 예외적으로 Eeckhoudt · Gollier(1995b)는 리스크프리미엄을 이용한 우회적인 방법을 제시하고 있다. 우리의 증명은 기본적으로 Eeckhoudt · Gollier(1995b)의 방법을 활용한다.

www.kci.go.kr

나타낼 수 있다. 즉, 보험계약자는 한계손해액 $E(L)$과 한계리스크프리미엄 Δ_a의 합이 한계보험료 P에 도달하는 점에서 최적보험 α^*를 구입한다(식 (III-3) 참조바람). 여기서 초기의 부가 w_1에서 $w_2(>w_1)$로 증가하는 외부조건의 변화가 발생하면, 기대손해액 $E(L)$이나 보험료 P에는 변화가 없지만, *DARA*의 경우 〈도움정리 4〉에 의해 한계리스크프리미엄 Δ_a자체가 감소하게 되고, 따라서 $E(L)+\Delta_a$의 곡선 전체가 좌표점 $[1, E(L)]$을 중심으로 좌회전하는 형태로 이동하게 되며, 그에 따라 최적보험구입량도 α_1^*에서 $\alpha_2^*(<\alpha_1^*)$로 감소한다(〈그림 1〉참조). *CARA*의 경우는 부가 증가하더라도 한계리스크프리미엄 Δ_a가 변하지 않으므로 최적보험구입량 α^*의 크기에는 변동이 없으며, *IARA*의 경우는 같은 논리로 부의 증가에 대해 최적보험구입량 α^*도 증가하게 된다. QED.

〈그림 1〉 부의 증가와 최적보험의 변화 (*DARA*의 경우)



요컨대, *DARA*이면 보험은 열등재, *IARA*이면 보험은 정상재가 된다. 이제 우리는 이 결과를 근간으로 해, 우리 논문의 목적한 바인, 부의 증감이 보험계약 후 보험계

www.kci.go.kr

약자가 보유하게 되는 최적 손실포트폴리오 및 자산포트폴리오에 주는 영향을 파악할 수 있겠다.

Ⅴ. 손실포트폴리오에 미치는 부의 효과

보험계약 후 보험계약자가 보유하는 기말자산은 식 (II-1)에서처럼 $Y=w-[\alpha P+(1-\alpha)L]$로 표현된다. 이 중에서 αP는 납입보험료로 지급되는 위험관리비용이고 $(1-\alpha)L$는 손실발생시 보험계약자가 직접 부담해야 하는 금액이 된다. 우리는 손실과 관련된 이 두가지 비용의 집합체, 즉 납입보험료와 자기부담손실액의 합계액을 '손실포트폴리오(loss portfolio)'라고 정의하고 '$\mathcal{L}$'로 표기하기로 한다. 즉, 손실포트폴리오 $\mathcal{L}$은 다음과 같이 정의된다.

$$\mathcal{L} \equiv \alpha P+(1-\alpha)L. \qquad (V\text{-}1)$$

정의 (V-1)을 이용하면 이제 우리는 부의 증감이 손실포트폴리오 $\mathcal{L}$에 주는 영향을, 즉 손실과 관련되어 보험계약자가 부담해야 하는 전체 비용지출에 미치는 영향을, 상당히 명확하게 분석할 수 있다.

1. 부의 증감과 손실포트폴리오의 평균 · 분산

먼저 부의 증가가 손실포트폴리오의 기대값에 미치는 영향은 다음과 같이 정리된다.

www.kci.go.kr

〈정리 2〉

보험계약자의 부가 증가하면,
감소 절대위험회피의 경우 손실포트폴리오의 기대값은 감소하고,
일정 절대위험회피의 경우 손실포트폴리오의 기대값은 일정하며,
증가 절대위험회피의 경우 손실포트폴리오의 기대값은 증가한다.
즉,

$$DARA \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dw}E(\mathcal{L}) < 0,$$

$$CARA \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dw}E(\mathcal{L}) = 0,$$

$$IARA \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dw}E(\mathcal{L}) > 0.$$

(증명) 식 (V-1)의 우변을 w에 관해 미분하면 다음 식 (V-2)가 유도된다.

$$\frac{d}{dw}E(\mathcal{L}) = \frac{d}{dw}[\alpha P + (1-\alpha)E(L)] = \frac{d\alpha}{dw}[P - E(L)]. \qquad (V\text{-}2)$$

우리는 (II-8)에서 $\lambda > 0$또는 $P > E(L)$을 가정했고, 또한 $DARA$의 경우 〈정리 1〉에 의해 $\frac{d\alpha}{dw} < 0$ 이므로 $\frac{d}{dw}E(\mathcal{L}) < 0$이 된다. $CARA$및 $IARA$의 경우도 같은 방법으로 증명된다. QED.

이번엔 부의 증가가 손실포트폴리오 $\mathcal{L}$의 위험성에 미치는 영향을 $\mathcal{L}$의 표준편차의 변화를 통해 확인해 본다. 먼저 $\mathcal{L}$의 표준편차 $\sigma_{\mathcal{L}}$은 다음 식으로 나타난다. 즉,

www.kci.go.kr

$$\sigma^2_{\pounds} = (1-\alpha)^2\sigma^2_L,$$
$$\sigma_{\pounds} = (1-\alpha)\sigma_L. \qquad \text{(V-3)}$$

위의 식 (V-3)에서, 우리는 부가보험료의 가정 (II-8)에 의해 보험계약자가 선택하는 최적보험은 항상 엄격한 일부보험($0<\alpha^*<1$)이 되고 따라서 $1-\alpha>0$이 됨에 유의해야 한다. 이제 위의 식 (V-3)을 이용하면 우리는 다음 〈정리 3〉을 쉽게 확인해 볼 수 있다.

〈정리 3〉

보험계약자의 부가 증가하면,
감소 절대위험회피의 경우 손실포트폴리오의 표준편차는 증가하고,
일정 절대위험회피의 경우 손실포트폴리오의 표준편차는 변함이 없으며,
증가 절대위험회피의 경우 손실포트폴리오의 표준편차는 감소한다.
즉,

$$DARA \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dw}\sigma_{\pounds} > 0,$$
$$CARA \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dw}\sigma_{\pounds} = 0,$$
$$IARA \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dw}\sigma_{\pounds} < 0.$$

(증명) 식 (V-2)의 우변을 w에 관해 미분하면 다음 식 (V-4)가 유도된다.

$$\frac{d}{dw}\sigma_{\pounds} = \frac{d}{dw}\left[(1-\alpha)\sigma_{\mathrm{L}}\right] = -\frac{d\alpha}{dw}\sigma_{\mathrm{L}}. \qquad \text{(V-4)}$$

위의 식에 〈정리 1〉의 결과를 적용하면 〈정리 3〉은 입증된다. QED.

www.kci.go.kr

〈정리 2〉와 〈정리 3〉의 결과는 상식적으로도 쉽게 해석된다. 즉, *DARA*의 경우를 예로 보면, 보험계약자의 부가 증가할 때 그 보험계약자는 보험구입량을 감소시키게 된다(〈정리 1〉). 그런데 우리의 분석모형에선 $\lambda > 0$또는 $P > E(L)$를 가정했으므로, 보험 구입량이 감소되면 손실액의 보험계리적 가치 이상으로 보험료가 절감되므로 손실포트폴리오의 전체 기대손실액은 줄어들게 되는 것이다(〈정리 2〉). 하지만 보험구입량의 감소로 인해 손실포트폴리오의 전체 변동성은 증가한다(〈정리 3〉). 물론 *CARA* 및 *IARA*의 경우도 같은 방법으로 해석된다.

2. 부의 증감과 손실포트폴리오의 변동성계수

이번에는 〈정리 2〉와 〈정리 3〉의 결과를 종합해 부의 증가가 손실포트폴리오의 단위당 위험성(riskiness of loss portfolio)에 미치는 영향을 확인해 본다. 이 분석을 용이하게 할 수 있는 방법의 하나는 평균과 표준편차에 의해 정의되는 손실포트폴리오의 변동성계수(coefficient of variation; 이하 *CV*)를 활용하는 것이다. 먼저 우리는 손실포트폴리오의 변동성계수를 다음과 같이 정의한다.

$$CV(\mathcal{L}) \equiv \frac{\sigma_{\mathcal{L}}}{E(\mathcal{L})} \ . \qquad \text{(V-5)}$$

요컨대, 우리의 정의에서 변동성계수는 손실포트폴리오의 단위당 기대지출비용에 수반되는 변동가능성 즉 위험도를 측정한다. 재무학에서 여러 투자안들의 위험성 비교에 종종 활용되는 이 변동성계수는 위험을 '상대적으로' 측정하는 수단이 된다. 예를 들어, 평균과 분산이 서로 다른 두 위험상황을 비교할 때 변동성계수가 크면(작으면) 손실과 관련된 예상지출액 1단위에 대한 변동위험성이 더 높은(낮은) 상황으로 인식된다.

우리는 〈정리 3〉에서, 대표적으로 *DARA*의 경우를 보면, 보험계약자의 부가 증가하는 경우 손실포트폴리오의 표준편차가 증가하는 것을 확인했다. 요컨대, 보험계약자가 *DARA*의 성향을 가지면, 부의 증가는 손실포트폴리오 전체의 변동가능성을

www.kci.go.kr

증가시킨다. 그런데, 여기에 〈정리 2〉의 결과를 함께 고려하면, 즉 *DARA*에서 보험계약자의 부가 증가할 때, 손실포트폴리오의 기댓값은 감소하는 반면 표준편차는 증가하게 된다. 보험계약자가 *DARA*의 성향을 가지면, 부의 증가는 손실포트폴리오 전체의 변동성을 증가시킴은 물론이고, 아울러 손실포트폴리오의 단위당 기대손해액을 기준으로 볼 때도 더 큰 변동위험성을 수반하게 된다. 이 내용은 보다 엄격하게 다음 〈정리 4〉로 확인해 볼 수 있다.

〈정리 4〉

보험계약자의 부가 증가하면,
감소 절대위험회피의 경우 손실포트폴리오의 변동성계수는 증가하고,
일정 절대위험회피의 경우 손실포트폴리오의 변동성계수는 변함이 없으며,
증가 절대위험회피의 경우 손실포트폴리오의 변동성계수는 감소한다. 즉,

$$DARA \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dw} CV(\mathcal{L}) > 0,$$

$$CARA \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dw} CV(\mathcal{L}) = 0,$$

$$IARA \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dw} CV(\mathcal{L}) < 0.$$

(증명) 식 (V-5)의 우변을 w에 관해 미분하면 다음 식 (V-6)이 유도된다. 즉,

$$\frac{d}{dw} CV(\mathcal{L}) = \frac{d}{dw}\left[\frac{(1-\alpha)\sigma_L}{E(L)+\alpha[P-E(L)]}\right]$$

$$= \frac{-\sigma_L \cdot \frac{d\alpha}{dw} \cdot \{E(L)+\alpha[P-E(L)]\} - \sigma_L(1-\alpha)[P-E(L)] \cdot \frac{d\alpha}{dw}}{\{E(L)+\alpha[P-E(L)]\}^2}$$

www.kci.go.kr

$$= \frac{-\sigma_L \cdot P \cdot \frac{d\alpha}{dw}}{\{E(L)+\alpha[P-E(L)]\}^2}. \qquad \text{(V-6)}$$

위의 식 분자에 〈정리 1〉의 결과를 적용하면 〈정리 4〉는 입증된다 . QED.

〈정리 4〉는 손실포트폴리오의 단위당 위험성의 증가를 표준편차로 분석한 내용이 된다. 하지만 Rothschild · Stiglitz(1970)에 의해 지적된 바처럼 분산 및 표준편차가 위험성의 척도로 사용되는 데는 그 한계점을 드러낸다. 다음 항목에서는 Rothschild · Stiglitz(1970)의 보다 강력한 '위험성 증가(increase in riskiness)'의 개념을 적용해 〈정리 4〉의 내용을 일반화시킨다.

3. 부의 증감과 Rothschild · Stiglitz(1970)에 의한 손실포트폴리오의 위험성 변화

Rothschild · Stiglitz(1970)는, 제한적 위험측정수단인 표준편차 또는 분산에 의존하지 않고, 보다 일반적인 상황 하에서 확률분포의 특성을 통해 두 위험상황을 비교할 수 있는 방안을 제시했다. 즉, Rothschild · Stiglitz(1970)는 '평균보유확산' 및 '평균보유응축'이란 개념을 도입해 '위험변화(mean preserving change in risk)'를 정의했고, 또 이런 위험성 변화의 개념은 바로 '제2차 확률지배이론(The Second Degree Stochastic Dominance)'과도 그대로 연계된다(Huang · Litzenberger, 1988, Ch 2.). 이제 우리는, 위험성(Riskiness)의 증가를 Rothschild · Stiglitz(1970)의 '평균보유확산(mean preserving spread; 이하 MPS)', 그리고 위험성의 감소를 '평균보유응축(mean preserving contraction; 이하 MPC)'으로 정의한다. 우리는 이런 MPS 및 MPC의 개념을 우리의 손실포트폴리오 모형에 적용하면 앞의 〈정리 4〉보다 더욱 일반화된 연구결과를 도출할 수 있다. 이 작업을 위해 먼저 우리는 K를 다음과 같이 정의한다.

www.kci.go.kr

$$K \equiv \frac{\mathcal{L}}{E(\mathcal{L})} = \frac{\alpha P + (1-\alpha)L}{\alpha P + (1-\alpha)E(L)}. \qquad \text{(V-7)}$$

그러면 이 K는 손실포트폴리오의 예상지출비용 1단위에 대한 변동가능성을 의미하게 된다. 그런데 우리는 K의 정의에서 유의해야 할 점이 하나있다. 즉, $E(K)=1$이 되므로, 따라서 $\frac{d}{dw}E(K)=0$이 된다는 사실이다. 부연하면, 초기 부 w의 증감에 관계없이 K는 항상 일정한 기댓값 '1'을 유지하므로 초기 부 w가 증감은, K의 기댓값과는 무관하게, 그 변동성 내지 위험성에만 영향을 주게 된다. 예를 들어, 초기 부가 w_1인 경우의 K를 K_1, 그리고 초기 부가 w_2인 경우의 K를 K_2 라고 구분해 표기하기로 하고, 초기 부 w가 w_1에서 $w_2(\rangle w_1)$로 증가할 때 K가 K_1에서 K_2로 변화하는 경우를 가정해 본다. 이 때, 만약 K_2가 K_1의 평균보유확산(MPS)이, 또는 상등한 의미로 K_1이 K_2의 평균보유응축(mean preserving contraction; 이하 MPC)이, 된다고 하면 이것은 K_1이 K_2를 '제2차 확률지배' 하는 것과 같은 뜻으로, 확률분포의 관점에서는 두 확률분포의 기대값은 서로 같지만 K_2의 위험상황에는 K_1의 위험상황 이외에도 다음과 같이 정의되는 추가적인 변동성 ε가 존재한다는 것을 뜻하게 된다. 즉,[5]

$$K_2 =^{d} K_1 + \varepsilon,\ E(\varepsilon \mid K_1) = 0. \qquad \text{(V-8)}$$

요약하면, 식 (V-8)이 성립하면 K_2의 확률밀도함수 꼬리부분이 K_1의 확률밀도함수 꼬리부분보다 더 두텁다는 의미가 되고, 따라서 K_1은 K_2를 '제2차 확률지배' 하게 되므로, K_2는 K_1보다 Rothschild · Stiglitz(1970)의 관점에서 위험성이 더 높아지는 것이다.

이런 K의 정의는 이제 우리의 분석모형에서 Rothschild · Stiglitz(1970)의 평균을 유지하는 위험성의 변화(mean preserving change in risk)를 조사하는데 충분

5) 아래의 「$=^{d}$」는 '동일한 확률분포'를 가진다는 의미로 사용된다 (Rothschild · Stiglitz, 1970: p. 99).

www.kci.go.kr

하다. 이 내용은 다음 〈정리 5〉로 요약된다.

〈정리 5〉

> 보험계약자의 부가 증가하면,
> 감소 절대위험회피의 경우 K는 평균보유확산(MPS)이 되고,
> 일정 절대위험회피의 경우 K는 변함이 없으며,
> 증가 절대위험회피의 경우 K는 평균보유응축(MPC)이 된다.

〈증명〉 식 (V-7)의 우변을 w에 관해 미분하면 다음 식 (V-9)가 유도된다. 즉,

$$\frac{dK}{dw} = \frac{d}{dw}\left[\frac{\alpha P+(1-\alpha)L}{\alpha P+(1-\alpha)E(L)}\right] \tag{V-9}$$

$$= \frac{(P-L)\cdot\frac{d\alpha}{dw}\cdot\{E(L)+\alpha[P-E(L)]\}-[P-E(L)]\cdot\frac{d\alpha}{dw}\cdot[\alpha P+(1-\alpha)L]}{\{E(L)+\alpha[P-E(L)]\}^2}.$$

위의 식 (V-9)의 우변 분자를 정리하면 다음과 같이 식 (V-10)로 간단히 줄여진다. 즉,

$$\frac{dK}{dw} = \frac{\frac{d\alpha}{dw}\cdot P\cdot[E(L)-L]}{\{E(L)+\alpha[P-E(L)]\}^2}. \tag{V-10}$$

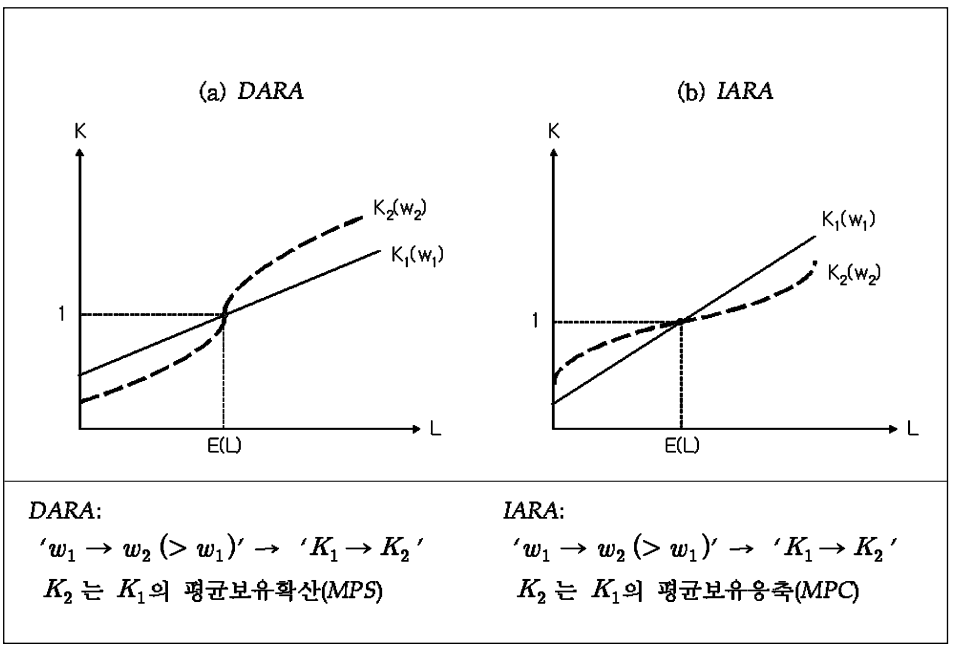
위의 식 우변에서 분모는 항상 양(+)의 값을 가지므로 dK/dw의 부호는 분자의 부호와 일치하게 된다. 우리는 분자의 부호를 *DARA*, *CARA* 그리고 *IARA*의 경우로 나누어 평가할 수 있다. 먼저, *DARA*의 경우는 〈정리 1〉에 의해 $d\alpha/dw<0$이 되므로, $L<E(L)$인 범위에서 분자는 음(-)의 값이 되고 $L>E(L)$인 범위에서 분자는 양(+)의 값을 가진다. 즉, *DARA*이면

www.kci.go.kr

$$L\langle E(L) \rightarrow \frac{dK}{dw} \langle 0,$$
$$L\rangle E(L) \rightarrow \frac{dK}{dw} \rangle 0. \qquad \text{(V-11)}$$

요컨대, *DARA*의 경우 w가 증가하면, $L\langle E(L)$의 범위에서 K는 작아지고, 반대로 $L\rangle E(L)$의 범위에서 K는 커지게 된다(〈그림 2-9 (a)〉 참조). 여기서 우리는 w의 증가와 관계없이 $E(K)$는 항상 '1'로써 일정하다는 사실에 다시 한 번 유의하면, K는, w가 증가하기 이전에 비해, 그 변동위험성이 더욱 높아지는 평균보유확산(MPS)이 됨을 확인할 수 있다. *CARA*와 *IARA*의 경우도 같은 방법으로 증명된다(〈그림 2 (b)〉 참조). Q.E.D.

〈그림 2〉 부의 증가와 K의 위험성 변화



www.kci.go.kr

위의 증명 내용은 〈그림 2〉에서 가시적으로 확인할 수 있다. 먼저, (II-8)의 보험료 가정에 의해 $0\langle\alpha^*\langle 1$이므로, (V-7)의 정의로 부터 우리는 K가 L의 증가함수로 그려짐에 유의한다. 그러면, 예컨대 *DARA*의 성향을 지닌 보험계약자의 초기 부가 w_1에서 $w_2(\rangle w_1)$로 증가하는 경우, K_2는 다음과 같이 표현될 수 있다[6].

$$K_2=K_1+\theta[K_1-E(K_1)] \qquad (\theta\geq 0). \qquad \text{(V-12)}$$

위의 정의에서, 물론 $E(K_1)=E(K_2)=1$가 된다. 이제, 초기 부가 w_1에서 $w_2(\rangle w_1)$로 증가하는 경우는 θ가 '0'에서 양(+)의 값으로 증가하는 경우와 동등하고, 이 때 $K_1\langle 1$즉, $L\langle E(L)$인 범위에서는 $K_2\langle K_1$이 된다. 한편 , $K_1\rangle 1$, 즉 $L\rangle E(L)$의 범위에선 $K_2\rangle K_1$이 된다 . 이것은, 두 확률분포 K_1 및 K_2의 기대값은 서로 같지만, K_2의 위험상황에는 K_1의 위험상황과 함께 식 (V-8)에서의 $\epsilon\equiv\theta[K_1-E(K_1)]$로 정의되는 추가적인 변동성이 존재한다는 것을 뜻하게 된다. 요컨대, 이것은 K_2의 확률밀도함수의 양(兩) 꼬리부분이 K_1의 확률밀도함수의 양 꼬리부분보다 더 두텁다는 의미가 되고, 따라서 K_2가 K_1보다 위험성이 높아지는 Rothschild · Stiglitz(1970)의 평균보유확산(MPS)이 되는 것이다. 물론 *IARA*의 경우도 같은 방법으로 해석된다.

VI. 자산포트폴리오에 미치는 부의효과

이번 VI장에선 부의 증감이 손실포트폴리오를 포함하는 기말자산 즉 자산포트폴리오에 미치는 효과를 평균 및 확실성등가의 관점에서 파악해 본다. 참고로 말하면, V장의 손실포트폴리오 $\mathcal{L}$에 관한 분석은 이번 VI장의 자산포트폴리오 Y의 분석보다는 상대적으로 간단하고 그 결과도 명쾌하다. 그 이유는 손실포트폴리오 $\mathcal{L}$의 경우 부의 효과가 단지 보험구입량 α를 통해서만 구현되기 때문이다. 하지만 자산포트폴리오 Y의 경우는 부 w 자체의 증감과 함께 손실포트폴리오 $\mathcal{L}$에 대한 부의 효

6) 식 (V-12)는 동등한 의미로 종종 $K_2=(1+\theta)K_1-\theta E(K_1)$으로도 표현된다.

www.kci.go.kr

과를 동시적으로 취급해야 한다. 그 결과, 관련 정리들의 유도과정과 내용 및 해석도 다소 복잡해진다.

1. 부의 증감과 자산포트폴리오의 평균 · 분산

초기 부 w의 증가는 당연히 자산포트폴리오의 기댓값 $E(Y)$의 증가를 유도할 것으로 예상된다. 하지만 그 결과의 확인이 단순하지만은 않다. 이 내용은 다음 정리로 요약된다.

〈정리 6〉

보험계약자의 부가 증가하면,
감소 절대위험회피의 경우 자산포트폴리오의 기대값은 부의 증가보다 빠르게,
일정 절대위험회피의 경우 자산포트폴리오의 기대값은 부의 증가와 같은 속도로,
증가 절대위험회피의 경우 자산포트폴리오의 기대값은 부의 증가보다 느리게,
증가한다. 즉,

$$DARA \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dw} E(Y) > 1,$$

$$CARA \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dw} E(Y) = 1,$$

$$IARA \quad \rightarrow \quad 0 < \frac{d}{dw} E(Y) < 1.$$

(증명) $\frac{d}{dw} E(Y)$의 직접적인 계산은 다음 결과를 유도한다.

$$\frac{d}{dw} E(Y) = \frac{d}{dw} [w - \alpha P - (1-\alpha)E(L)]$$

www.kci.go.kr

$$= 1 + \frac{d\alpha}{dw} \cdot [-P + E(L)],$$

또는

$$\frac{d}{dw} E(Y) - 1 = \frac{d\alpha}{dw} \cdot [-P + E(L)]. \qquad \text{(VI-1)}$$

가정 (II-8)로부터 P〉E(L)임에 유의하여, 위의 결과 (VI-1)에 〈정리 1〉의 결과를 적용하면 *DARA*와 *CARA*의 경우는 완전히 증명되고, 또한 *IARA*에서의 $\frac{d}{dw} E(Y) < 1$ 까지는 쉽게 확인된다. 이제 남은 과정은, *IARA*의 경우 $\frac{dE(Y)}{dw} > 0$이 됨을 보이는 것이다. 그런데 이 내용은 식 (VI-1)에서는 직접 확인되지 않는다. 외형상, 식 (VI-1)에서는 P가 $E(L)$보다 충분히 클 경우 $\frac{dE(Y)}{dw} < 0$의 가능성도 배제할 수 없다. 하지만 우리는 다소 우회적인 방법을 사용하면, *IARA*경우 보험계약자가 선택하는 '최적 자산포트폴리오'에서는 다음과 같이 $\frac{d}{dw} E(Y) > 0$이 됨을 확인할 수 있다. 먼저 리스크프리미엄의 정의인 식 (III-1)의 양변을 w에 관해 미분하면 다음 식이 유도된다.

$$E[u'(Y)(1 - \frac{d\alpha}{dw}(P-L))] = u'[E(Y) - \Delta]\left(\frac{dE(Y)}{dw} - \frac{d\Delta}{dw}\right).$$

위의 식 좌변에서, 1차조건 (II-4)에 의해 $\frac{d\alpha}{dw} E[u'(Y)(P-L)] = 0$이 됨에 유의하면, 위의 식은 다음 식(VI-2)로 간단히 정리
된다.

$$\frac{dE(Y)}{dw} = \frac{d\Delta}{dw} + \frac{E[u'(Y)]}{u'[E(Y) - \Delta]} \cdot \qquad \text{(VI-2)}$$

위의 식 (VI-2) 우변에서, 첫째항은 〈도움정리 3〉에 의해 *IARA*경우 양(+)의 값을 갖고, 또한 둘째항도 불포만성의 성향 $u' > 0$에 의해 항상 양(+)의 값을 갖게 되므로, $\frac{dE(Y)}{dw} > 0$이 확인된다. QED.

〈정리 6〉은 다음과 같이 쉽게 해석된다. 보험계약자의 위험회피성향이 *DARA*이면, 초기 부 w의 증가는, 그 자체의 증가와 함께, 동시에 보험계약자로 하여금 보험

www.kci.go.kr

구매를 감소시키는 역할도 수행한다. 이 때 $P\rangle E(L)$의 가정에 의해 보험료 지출은, 증가되는 기대손실의 보험계리적 가치보다, 더 크게 절약되므로, 초기 부의 증가는 결국 w의 증가폭 보다 더 큰 폭으로 기말자산 기댓값의 증가를 유도한다. 마찬가지로, 보험계약자의 위험회피성향이 *IARA*이면, 초기 부 w의 증가는 보험계약자로 하여금 더 많은 보험구매를 유인하게 되는데, 이 때 추가되는 보험료는 손실의 보험계리적 가치보다 높게 책정되므로, 초기 부의 증가는 그 자체 보다는 작은 폭으로 기말자산 기댓값을 증가시킨다.

이번엔 자산포트폴리오의 표준편차에 미치는 효과를 분석한다. 실제로 자산포트폴리오의 분산 σ^2_Y 또는 표준편차 σ_Y는 앞서 (V-3)에서 확인된 손실포트폴리오의 분산 $\sigma^2_{\mathcal{L}}$ 및 표준편차 $\sigma_{\mathcal{L}}$와 동일하다. 즉,

$$\sigma^2_Y=\sigma^2_{\mathcal{L}}=(1-\alpha)^2\sigma^2_L,$$
$$\sigma_Y=\sigma_{\mathcal{L}}=(1-\alpha)\sigma_L.$$

따라서 앞의 손실포트폴리오에 적용되는 〈정리 3〉의 결과는 그대로 자산포트폴리오에도 유효할 것이다. 하지만, 우리는 Stiglitz(1969)에서처럼 그 해석에 유의할 필요가 있다. 즉, Stiglitz(1969, p. 269)는 기말자산의 표준편차(standard deviation of final wealth)를 어떤 개인의 위험감수(risk-taking)에의 의지를 측정할 수 있는 수단으로 파악했다. 같은 맥락에서, 우리의 분석에서도 보험계약 후 실현되는 자산포트폴리오의 표준편차 σ_Y는 보험계약자가 선택하는 위험감수의 척도로 이용될 수 있겠다. 우리는 이 내용을 다음 〈정리 7〉로 요약한다.

www.kci.go.kr

〈정리 7〉

보험계약자의 부가 증가하면,
감소 절대위험회피의 경우 보험계약자가 감수하는 위험은 증가하고,
일정 절대위험회피의 경우 보험계약자가 감수하는 위험에는 변함이 없으며,
증가 절대위험회피의 경우 보험계약자가 감수하는 위험은 감소한다. 즉,

$$DARA \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dw}\sigma_Y > 0,$$

$$CARA \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dw}\sigma_Y = 0,$$

$$IARA \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dw}\sigma_Y < 0.$$

2. 부의 증감과 확실성등가

자산포트폴리오의 특징을 규명하는 또 하나의 주요한 수단으로 확실성등가(certainty equivalent)를 거론할 수 있겠다. 이번 항목에선 끝으로 초기 부 w의 증감이 기말자산 Y의 확실성등가에 미치는 영향을 구체적으로 확인해 본다.

확실성등가를 Y^c로 표기하면 확실성등가 Y^c는 다음 식에서처럼 내재적으로 정의된다.

$$u(Y^c) = E[u(Y)]. \qquad \text{(VI-3)}$$

즉, 확실성등가는 불확실한 자산 Y가 주는 기대효용과 동일한 효용을 주는 확실한 크기의 부 Y^c로 정의된다. 물론 우리의 모형에서 Y는 최적보험계수 α^*를 포함하는 최적 자산포트폴리오를 의미한다.

www.kci.go.kr

$$u(Y^c) = E[u(Y)]. \qquad \text{(VI-4)}$$

위의 정의를 이용하면 확실성등가에 대한 우리의 연구결과는, 자산포트폴리오 기댓값의 정리인 〈정리 6〉과 유사하게, 다음 내용으로 요약된다.

〈정리 8〉

보험계약자의 부가 증가하면,
감소 절대위험회피의 경우 자산포트폴리오의 확실성등가는 부의 증가보다 빠르게,
일정 절대위험회피의 경우 자산포트폴리오의 확실성등가는 부의 증가와 같은 속도로,
증가 절대위험회피의 경우 자산포트폴리오의 확실성등가는 부의 증가보다 느리게, 증가한다. 즉,

$$DARA \quad \rightarrow \quad \frac{dY^c}{dw} > 1,$$

$$CARA \quad \rightarrow \quad \frac{dY^c}{dw} = 1,$$

$$IARA \quad \rightarrow \quad 0 < \frac{dY^c}{dw} < 1.$$

(증명) 우리는 Cass · Stiglitz(1972)에서의 방법론을 우리의 보험수요에 적용하면 다음과 같이 〈정리 8〉을 증명할 수 있다. 먼저 식 (II-1)로부터 $Y = w - \alpha P - (1-\alpha)L$ 임을 기억하며, 식 (VI-8)의 양변을 w에 관해 미분하면 다음 식이 유도된다.

$$u'(Y^c) \cdot \frac{dY^c}{dw} = E\{u'(Y)[1 + \frac{d\alpha}{dw} \cdot (-P+L)]\}. \qquad \text{(VI-5)}$$

위의 식 (VI-5)의 우변에서 1차조건 (II-4)에 의해 $\frac{d\alpha}{dw} \cdot E[u'(Y)(-P+L)] = 0$

www.kci.go.kr

임을 기억하면, 위의 식 (VI-5)는 보다 간단하게 다음과 같이 줄여진다.

$$u'(Y^c) \cdot \frac{dY^c}{dw} = E[u'(Y)],$$

또는

$$\frac{dY^c}{dw} = \frac{E[u'(Y)]}{u'(Y^c)}. \qquad \text{(VI-6)}$$

그런데 위의 식 (VI-6)에서 우변의 분자와 분모는 모두 항상 양(+)의 값을 가지므로, dY^c/dw의 부호도 항상 양(+)이 되고, 또한 분자와 분모의 상대적인 크기에 따라 dY^c/dw는 '1' 보다 크거나 작게 된다. 즉,

$$\frac{dY^c}{dw} \gtreqless 1 \quad \leftrightarrow \quad E[u'(Y)] \gtreqless u'(Y^c) \qquad \text{(VI-7)}$$

그리고 우리는 〈도움정리 2〉를 이용하면 (VI-7)에서 효용함수 별로 $E[u'(Y)]$와 $u'(Y^c)$의 상대적 크기를 평가할 수 있게 된다. 즉, 우리는 II장의 〈도움정리 2〉에서 처럼, u가 Y의 단조증가함수이므로 Y를 u의 역함수 $Y=Y(u)$로 간주하면 다음과 같이 u'는 궁극적으로 u의 함수가 된다.

$$u'(Y) = u'[Y(u)]. \qquad \text{(VI-8)}$$

위의 식 (VI-8)의 우변에서 u'는 u의 함수임에 유의하면, 이제 우리는 〈도움정리 2〉에 의해, u가 *DARA*이면 u'는 u의 볼록함수, u가 *CARA*면 u'는 u의 선형함수, 그리고 u가 *IARA*이면 u'는 u의 오목함수임을 확인할 수 있다.

우선 첫 번째로, u가 *IARA* 즉 u'가 u의 오목함수인 경우를 본다. 여기서 우리는 $u^c \equiv u(Y^c)$또는 상등한 의미로 $Y^c \equiv Y(u^c)$를 정의한 다음, $u'[Y(u)]$를 u의 특정값 u^c에 관해 1차 테일러 확장을 시도하면, '오목함수의 정리'에 의해 다음 식 (VI-9)를 유

www.kci.go.kr

도할 수 있다.[7]

$$u'(Y(u)) < u'(Y(u^C)) + u''(u(Y)) \cdot (u - u^C). \qquad \text{(VI-9)}$$

그런데 위의 식 (VI-9)에서 $Y(u^C) = Y^C$ 그리고 $u^C = u(Y^C)$ 임을 상기하면서, 위의 식 양변에 기댓값을 취하면 다음 식이 유도된다. 즉,

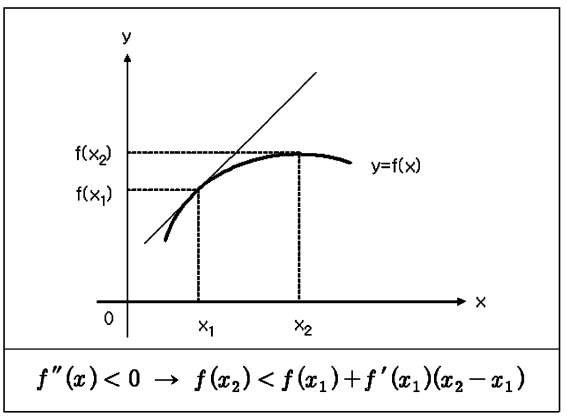
$$E(u'(Y)] < u'(Y^C) + u''(Y^C) \cdot [E(u(Y)) - (u(Y^C))] = u'(Y^C) \qquad \text{(VI-10)}$$

위의 식 (VI-10)의 우변에서 $u''(Y^C)[E(u(Y)) - (u(Y^C))] = 0$이 되는 이유는 u^C가 $u^C = u(Y^C)$로 정의되는 상수(constant)이고, 또한 확실성등가 Y^C의 정의에 의해

---

7) 오목함수 및 볼록함수의 정리는 다음과 같이 요약된다.
〈오목함수의 정리〉
$f(x)$가 엄격한 오목함수 $f''(x) < 0$이면, 임의의 두 점 x_1, x_2에 대해 $f(x_2) < f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$ 이 성립한다.

오목함수의 정리



$f''(x) < 0 \rightarrow f(x_2) < f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$

이와 유사하게 볼록함수의 정리는, $f(x)$가 엄격한 볼록함수 $f''(x) > 0$이면 임의의 두 점 x_1, x_2에 대해 $f(x_2) > f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$이 성립하는 것으로 요약된다. 볼록함수의 그림은 생략하기로 한다. 이런 정리들의 보다 상세한 내용을 알기 위해서는, 예컨대 이효구 · 박승안 (1995, pp. 262-263) 등을 참조할 수 있다.

www.kci.go.kr

$u(Y^C)=E(u(Y))$가 되기 때문이다. 지금까지의 과정을 다시 한 번 요약하면, *IARA*에서 u'는 u의 오목함수가 되므로(〈도움정리 2〉), '오목함수의 정리'에 의해 $E[u'(Y)]\langle u'(Y^C)$이 성립하는데 이 부등식의 성립은 식 (VI-7)에 의해 $\frac{dY^C}{dw}\langle 1$을 의미하고, 아울러 $u'\rangle 0$이므로 식 (VI-6)에 의해 항상 $\frac{dY^C}{dw}\rangle 0$이 됨도 고려하면, 이제 *IARA*의 경우 증명은 완전히 종결된다. *CARA*와 *IARA*의 경우도 같은 방법으로 증명된다. QED.

실제로 〈정리 8〉은 보다 리스크프리미엄의 개념으로도 설명된다. 즉, 우리의 모형에서 확실성등가는 다음과 같이 기댓값과 리스크프리미엄의 차이로 정의할 수 있다.

$$Y^C=E(Y)-\Delta\ . \tag{VI-11}$$

위의 식 양변을 w에 관해 미분하면 다음 식이 유도된다.

$$\frac{dY^C}{dw}=\frac{dE(Y)}{dw}-\frac{d\Delta}{dw}\ . \tag{VI-12}$$

따라서 먼저, *DARA*의 경우를 보면, 〈정리 6〉에 의해 $\frac{d}{dw}E(Y)\rangle 1$이 되고 또한 〈도움정리 3〉에 의해 $\frac{d\Delta}{dw}\langle 0$이 되는데, 이 값의 범위를 식 (VI-12)의 우변에 적용하면 $\frac{dY^C}{dw}\rangle 1$이 되는 것이 쉽게 확인된다. 우리는 같은 방법으로, *CARA*에선 $\frac{d}{dw}E(Y)=1$ 그리고 $\frac{d\Delta}{dw}=0$이므로 $\frac{dY^C}{dw}=1$, 끝으로 *IARA*에선 $\frac{d}{dw}E(Y)\langle 1$ 그리고 $\frac{d\Delta}{dw}\rangle 0$ 이므로 $\frac{dY^C}{dw}\langle 1$이 되는 것을 알 수 있다. 물론 *IARA*의 경우 $\frac{dY^C}{dw}\rangle 0$의 확인은 우리의 증명과정 중에 있는 것과 같은 별도의 방법이 필요하겠다.

www.kci.go.kr

VII. 요약 및 맺음말

우리의 논문은 보험수요의 모형에서, Mossin(1968)의 결과를 근간으로 해, 보험계약자가 선택하는 최적 손실포트폴리오와 자산포트폴리오에 미치는 부의 효과를 추가적으로 조사했다. 우리의 연구 결과는 다음과 같이 요약된다.

먼저 현대 경제학의 표준가설인 *DARA*의 경우를 보면, 부가 증가할 때 보험계약자는 열등재인 보험구매를 줄이게 되는데(Mossin 1968), 그 결과 보험계약자의 손실포트폴리오는 더욱 위험성이 높아지지만, 보험계약자가 궁극적으로 보유하게 되는 전체 자산포트폴리오는 부가보험료의 절감으로 인해 그 기댓값 및 확실성등가가 부의 증가보다도 빠른 속도로 개선된다. *CARA*의 경우는 보험계약자의 보험선택이 부의 효과로부터 독립되므로 손실포트폴리오는 영향을 받지 않는 반면 자산포트폴리오는 부 자체의 증가만큼만 그 영향을 받는다. 반대로, 보험계약자가 *IARA*의 성향을 지니면, 부가 증가함에 따라 보험계약자는 정상재인 보험구매를 높이고, 그 결과 보험계약자의 손실포트폴리오는 위험성이 낮아지지만, 보험계약자의 자산포트폴리오는 부가보험료의 추가적 지출로 인해 그 기댓값 및 확실성등가의 증가폭이 부 자체의 증가보다도 둔화된다.

한편 우리의 연구결과는 부의 효과에 관한 또 다른 과제를 제기한다. 즉 Mossin(1968)을 포함한 우리의 분석모형에서 손실의 규모는 부의 증감과는 독립된 확률변수였다. 하지만 실제 상황에서 보험계약자가 보유하는 부가 증가될 경우 그 손실의 규모도 함께 증대될 가능성이 엄연히 존재할 것이다. 이런 상황을 고려하면 *DARA*의 제약 하에서라도 보험이 열등재라는 Mossin(1968)의 전통적인 명제는 더 이상 성립되지 않을 개연성이 있다. 그렇다면 손실포트폴리오 및 자산포트폴리오에 미치는 부의 효과도 우리의 연구결과와는 다른 양상을 보일 수 있겠다. 이에 관한 후속연구는 다음을 기약해 본다.

www.kci.go.kr

참 고 문 헌

류근옥 · 홍순구,「위험성의 증가와 최적보험수요」,『리스크관리연구』, 제13권 제2호, 2002, pp. 61~96.

이효구 · 박승안,『경제경영수학』, 신정판, 박영사, 1995.

Arrow, K. J., *Essays in the Theory of Risk Bearing*, North-Holland Amsterdam, 1965.

Boucher, S. R., Carter, M. R. and Guirkinger, C., "Risk Rationing and Wealth Effects in Credit Markets", *American Journal of Agricultural Economics*, Vol 90, Issue 2, May 2008, pp. 409~423.

Briys, E., Dionne, G. and Eeckhoudt, L., "More on Insurance as a Giffen's Good", *Journal of Risk and Uncertainty*, 2, 1989, pp. 420~425.

Cass, D. and Stiglitz, J. E., "Risk Aversion and Wealth Effects on Portfolios with Many Assets", *Review of Economic Studies*, July 1972, pp. 331~354.

Chavas, Jean-Paul, "Chapter 4 The Nature of Risk Preferences", *Risk Anaysis in Theory and Practice*, Elsevier Inc., 2004, pp. 31~53.

Eeckhoudt, L. and Gollier, C., "Chapter 9 Portfolio Choices Under Uncertainty", *Risk Evaluation, Management and Sharing*, Harvester Wheatsheaf, 1995(a), pp. 117~152.

_____,"Chapter 10 The Demand for Insurance", *Risk Evaluation, Management and Sharing*, Harvester Wheatsheaf, 1995(b), pp. 153~186.

Gollier, C., "Chapter 2 Risk Aversion", *The Economics of Risk and Time*, 2001, Massachusetts Institute of Technology, pp. 17~38.

Hoy, M. and Robson, R. J., "Insurance as a Giffen's Good", *Economic Letters,* 8, 1981, pp. 47~51.

Huang, C. and Litzenberger, R. H., "Chapter 2 Stochastic Dominance", *Foundations for Financial Economics*, North Holland, 1988, pp. 39~58.

Kyle, A. S. and Xiong, W., "Contagion as a Wealth Effect", *Journal of Finance*, Vol 56, Issue 4, Aug. 2001, pp. 1401~1440.

Levy, H. and Sarnat, M., "Investment Decision Rule, Diversification, and the Investor's Initial Wealth", *Journal of Financial Quantitative Analysis*,

www.kci.go.kr

Jan. 1971, pp. 639~642.

Levy, H. and Kroll, Y., "Investment Decision Rule, Diversification, and the Investor's Initial Wealth", *Econometrica*, Sep. 1978, pp. 1231~1237.

Long, Ngo Van, "Risk Aversion and Wealth Effects on Portfolios with Many Assets: An Extension", *Review of Economic Studies*, July 1975, pp. 473~477.

Mossin, J., "Aspects of Rational Insurance Purchasing", *Journal of Political Economy*, 1968, pp. 553~568.

Pantos, T. D., "EU Banking Directives and Wealth Effects on the Greek Financial Sector", *Journal of Risk Finance*, Vol 9, Issue 1, 2008, pp. 9~19.

Rothschild, M. and Stiglitz, J., "Increasing Risk I: A Definition", *Journal of Economic Theory* 2, 1970, pp. 225~243.

_____, "Increasing Risk II: Its Economic Consequences", *Journal of Economic Theory* 3, 1971, pp. 66~84.

Schlesinger, H., "The Optimal Level of Deductibility in Insurance Contracts", *Journal of Risk and Insurance*, 1981, pp. 465~481.

_____, "The Theory of Insurance Demand", in *Handbook of Insurance,* ed. by G. Dionne, Boston: Kluwer, 2000, pp. 131~152.

Stiglitz, J. E., "The Effects of Income, Wealth, and Capital Gains Taxation on Risk-Taking", *The Quarterly Journal of Economics*, Vol 83, No. 2, May 1969, pp. 263~283.

www.kci.go.kr

Abstract

Since Mossin(1968), it has long been recognized that insurance is an inferior good within the decreasing absolute risk aversion. The purpose of this paper is to analyze, based on Mossin(1968), the wealth effects on insured's optimal loss portfolio and asset portfolio, using a general expected utility maximization model. Our main results can be summarized as follows:

In particular, if an utility function exhibits *DARA*, an increase in initial wealth reduces the optimal level of insurance and deteriorates the riskiness of loss portfolio, and so insured's total risk-taking in the final asset portfolio would in fact increase. However, the certainty equivalent level as well as the mean value of asset portfolio is improved more than an increase in initial wealth due to the saving of insurance loading. The additional results for the case of *CARA* and *IARA* are also provided.

※ Key words: asset portfolio, certainty equivalent, inferior good, loss portfolio, normal good, wealth effect

www.kci.go.kr