평균 · 분산모형으로 분석한 보험과 투자의 상호연계성

A Mean-Variance Analysis on the Interaction between Insurance and Risky Investment

홍 순 구*
Soon-Koo Hong

우리의 논문은 최근 보험연구의 동향을 따라 잠재적 보험계약자가 보험과 함께 위험자산의 구입도 가능한 분석모형을 설정하고 보험수요를 재분석한다. 즉 전체 포트폴리오 관리의 관점에서 위험자산 및 무위험자산에의 투자수요와 보험수요를 동시적으로 고려하는 것이다. 평균·분산모형을 적용한 우리의 주된 연구결과는 다음과 같이 요약된다.

먼저 우리는 위험자산에의 투자가 수행하는 전체 포트폴리오의 기댓값을 일정수준으로 유지하면서 포트폴리오의 위험을 감소시킬 수 있는 위험관리 수단으로서의 역할을 입증한다. 투자의 이런 역할은 Mayers-Smith(1983)가 명명한 이른바 홈메이드보험(homemade insurance)을 가시적으로 증명해 주는 한 예가 되겠다. 한편 우리는 양(+)의 부가보험료가 존재하는 경우 일부보험, 전부보험 그리고 초과보험이 성립될 수 있는 필요·충분조건도 함께 제시한다. 즉 순수위험과 투자위험이 공존하는 우리의 분석모형에서 기존의 Mossin(1968) 정리는 하나의 특수한 경우에 해당될 뿐임을 보이고, 아울러 우리는 Mossin(1968)의 결과와는 상반되게 부가보험료가 있음에도 불구하고 잠재적 보험계약자가 전부보험 또는 초과보험을 구입할 수 있는 조건도 함께 유도한다.

국문 색인어: 보험수요, 비교정태분석, 순수위험, 투자위험, 평균·분산모형
한국연구재단 분류 연구분야코드: B051605

* 서울과학기술대학교 경영학과 교수(soonkooh@snut.ac.kr)
논문 투고일: 2010. 10. 10, 논문 최종 수정일: 2011. 01. 28, 논문 게재 확정일: 2011. 02. 22

I. 머리말

Mayers-Smith (1983)이래, 최근 들어 더욱 많은 논문들이 투자를 포함하는 전체 포트폴리오의 맥락에서 보험수요를 분석하고 있다[Zuasti(2008), Loubergé-Watt(2008), Meyer-Meyer(2005, 2004), Eeckhoudt-Meyer-Ormiston(1997), Meyer-Ormiston(1995), Eeckhoudt-Venesian(1990), Kahane-Kroll(1985)]. 아마도 그 주된 이유는, 이미 오래 전 Marshall (1974)에 의해 지적됐던 바와 같이, 일반 잠재적 보험계약자들은 보험구입과 함께 투자에도 동시적으로 참여하게 되는 데 이런 투자에의 기회를 고려하지 않고 보험수요 만을 독립적으로 분석하는 것은 그 잠재적 보험계약자의 리스크관리 행태 및 보험수요에 관한 왜곡된 결과를 도출할 가능성이 있기 때문일 것이다. 실제로 위에서 예시된 논문들은 모두 보험과 함께 투자의 기회도 반영한 분석의 틀을 사용하고 있다. 우리의 논문도 이들과 같은 맥락에서 이루어진다. 즉, 전체 포트폴리오 관리의 관점에서 위험자산 및 무위험자산에의 투자수요와 보험수요를 동시적으로 분석한다. 무엇보다 이런 분석 방법은 포트폴리오 위험관리에 있어 투자와 보험 간의 상호 연계성 및 보완성을 잘 설명해 주는 장점이 있다.

하지만 우리의 분석모형은 위에서 언급된 논문들과는 분명한 차별성을 갖는다. 예컨대, Zuasti(2008)는, 일반적인 자본시장에서의 금융투자를 고려하기 보다는, 잠재적 보험계약자가 보험구입과 함께 자본시장에서 보험회사의 주식을 거래하는 것으로 분석모형을 세웠다. 그 결과로, Zuasti(2008)는 흥미있는 결과를 도출한다. 즉, 잠재적 보험계약자는 부보되어 있는 해당 보험회사의 주식을 구입하면, 일반균형(general equilibrium)의 상태에서 부가보험료가 책정되어 있음에도 불구하고 전부보험(full insurance)을 구입할 수 있는 가능성을 입증했다. 이것은 기존의 Mossin(1968)의 정리와는 상반되는 중요한 내용이다. 하지만, Zuasti(2008)는 보험산업에서의 일반균형을 유도하기 위해 주식투자의 대상을 보험사들로 제한했다. 우리가 일반적으로 생각하는 투자와는 괴리가 있는 분석모형이다.

최근의 논문 중, Loubergé-Watt(2008)은 보험구입과 동시에 투자결정도 내재적으로 이루어지는 것으로 분석한 점에서는 우리의 논문과 근접해 있다. 하지

만 Loubergé-Watt(2008)는, 보험구입과 투자를 수행하는 의사결정의 주체를 개인이 아닌 기업으로 제한해, 투자대상으로 실물투자만을 고려하고 있고 따라서 이런 실물투자에서 발생하는 하나의 위험만을 분석의 대상으로 하고 있다는 점이 우리와 다르다.[1] 즉, Loubergé-Watt(2008)는 우리의 모형이나 Zuasti(2008)에서 시도한 자본시장에의 접근은 허락되지 않은 연구이다. 또한 Loubergé-Watt(2008)는 보다 단순한 2상황선호모형(two-state preference model)으로 분석됐다는 것도 기억할 만한 점이다.

한편, Meyer-Meyer(2004, 2005), Eeckhoudt-Meyer-Ormiston(1997) 그리고 Meyer-Meyer-Ormiston(1995)에서도 역시 금융투자는 제외하고 손실위험이 내포되어 있는 실물투자 만을 고려했고 따라서 불확실성의 원천으로 역시 손실위험 하나만이 고려되고 있다. 더욱이 이들 모형에서는, Loubergé-Watt (2008)에서 보다 더욱 제약적으로, 실물투자가 이미 결정되어 있는 상태에서 보험수요를 분석했기 때문에, 보험구입량 하나 만이 결정변수로 등장한다. 결국 이들 모형은 전통적 모형의 범주에서 크게 벗어나지 못하고 있다고 판단된다.

요컨대, 우리의 분석은 Mayers-Smith(1983) 그리고 Kahane-Kroll(1985) 및 Bryis-Kahane-Kroll(1988)과 직접적인 연계선상에 있다고 할 수 있다. 이들 세 논문은 모두 평균·분산모형을 적용해 전체 포트폴리오 내에서 보험도 하나의 결정변수로 고려하고 있다. 특히, Mayers-Smith (1983)는 이 분야의 효시로써 투자와 보험간의 상호의존의 가능성 또는 투자의 홈메이드 보험(home-made insurance) 역할을 강조한 중요한 논문이지만, 정작 최적보험과 최적투자의 성격에 관해선 구체적으로 규명한 내용이 없다. 한편, Kahane-Kroll(1985)과 Bryis-Kahane-Kroll(1988)도 투자의 위험성을 반영하긴 했지만 이미 정해진 투자결정 하에서 보험만을 결정변수로 인정하고 있다. 이런 경우 보험과 투자의 상호연계성을 구체적으로 확인하기는 어렵다.

우리는 기본적으로 Mayers-Smith(1983)에서 처럼 보험과 투자가 동시적으로 결정되는 모형에서 최적보험과 최적투자의 해(solution)를 구해 보험과 투자의 상호보완적인 역할을 보다 가시적으로 확인해 본다. 우리의 분석도 Mayers-Smith(1983), Kahane-Kroll(1985) 그리고 Bryis-Kahane-Kroll(1988)에서 처

1) 요컨대, Loubergé-Watt(2008)의 분석모형에서는 손익의 가능성이 공존하는 투자위험은 존 재하지 않고 결국 순수위험 하나 만이 등장한다.

럼 평균·분산모형 안에서 이루어진다. 재무경제학에서는 물론 보험학에서도 평균·분산모형은 수익 및 위험의 전통적 측정수단으로 자주 사용되어 왔다[Doherty·Schlesinger(1983)[2], Mayers·Smith(1983), Doherty(1984), Kahane·Kroll(1985), Schulenburg(1986), Briys·Kahane·Kroll(1988)]. 그러나 평균과 분산은 확률분포의 한 특성일 뿐으로, 일반적인 경제학적 의사결정수단이 되기에는 불충분하다는 지적을 받아 온 것도 사실이다[Rothschild·Stiglitz(1970)]. 무엇보다, 평균과 분산에 의한 의사결정이 이론적인 합리성을 갖기 위해서는 보험계약자의 효용함수가 2차함수이거나 또는 손실의 확률분포가 정규분포를 이루어야 한다는 제약성이 있다.

그런데 2차효용함수(Quadratic Utility Function)는 부(富)가 커짐에 따라 보험계약자의 위험회피성향도 함께 커지는 '증가하는 절대위험회피(Increasing Absolute Risk Aversion)'의 성향을 보인다. 요컨대, 2차효용함수는 현대 경제학의 표준가설인 '비증가 절대위험회피(Non-increasing Absolute Risk Aversion)', 즉 '감소하는 절대위험회피(Decreasing Absolute Risk Aversion: DARA)' 또는 '일정한 절대위험회피(Constant Absolute Risk Aversion: CARA)'와는 일치하지 않는 위험성향을 나타낸다. 또한 개별 보험계약자에게 있어, 정규분포는 종종 맞지 않는 가정이 된다. 순수위험의 성격상 그 손실은 0 또는 양(+)의 크기를 갖는 경우가 많기 때문에 보험계약자가 직면한 손실의 확률분포는 대체로 왼쪽으로 왜곡되어 있고 오른쪽으로는 긴 꼬리를 형성하고 있다. 하지만 정규분포를 가정하면 순수위험의 손실값이 음(-)의 방향으로 까지 내려가는 불합리성을 보일 수 있다.

하지만 이런 제약성들이 평균·분산모형의 정당성을 부인하는 것은 아니다. 그 주된 이유들은 대체로 다음과 같이 요약할 수 있겠다. 첫째로 DARA 및 CARA를 포함한 모든 효용함수들은 개략적으로(approximately) 2차효용함수로 전환될 수 있고(Leland 1972, Sealey 1980), 둘째로 실제 정규분포를 하지 않는 개별확률분포라도 그 평균값의 분포는 중심극한정리(Central Limit Theorem)에 의해 정규분포에 접근하는 경우가 많으며, 셋째로 Meyer(1987) 등의 연구는 정규분포 이외의 또 다른 확률분포에서도 평균·분산모형이 적확한 의사결정기준

2) Doherty·Schlesinger(1983)는 외형적으로는 기대효용모형에서 확률변수의 기초 富를 도입 해 보험수요를 조사하긴 하지만, 실제로 베르누이정리를 규명하는 과정에선 정규분포를 가정 해 궁극적으론 평균·분산모형을 적용하고 있다.

이 될 수 있음을 입증하고 있다. 넷째로 재무경제학의 중요한 의사결정기준의 하나인 "안전성 제일의 원칙(Safety-First Criterion)"도 넓게는 평균·분산모형의 범주에 포함된다(Eeckhoudt· Gollier 1995: Chapter 9). 끝으로, 평균·분산모형과 비교해 기대효용모형의 단점에 관해 언급해 보면, Schlesinger(2000)가 지적한 바처럼, 효용함수가 단순한 위험회피성향 이외에 DARA, CARA, IARA 또는 DRRA, CRRA, IRRA를 추가적으로 가정하는 것도 역시 현실적용이 쉽지 않은 제약적인 측면이 있다. 또한 기대효용모형에서는 이런 추가적인 가정을 하더라도 그 비교정태분석이 명확한 결과를 제시하는 경우는 비교적 드문 일이다. 하지만, 평균·분산모형은 위험회피성향 이외의 이런 추가적이고 제약적인 가정을 불필요하게 하고, 또한 많은 경우 직관적이고도 명쾌한 분석의 결과를 제시해 주는 장점도 있다.

요약하면, 금융투자 또는 실물투자에의 기회를 동시적으로 고려하는 우리의 연구결과는 기존의 보험수요 이론과 비교해 다음과 같은 차별성을 보인다: 즉, 주식 등 위험자산에의 투자는 전통적으로 리스크를 감당하는 대가로 수익성을 높이는 역할을 수행하는 것으로 인식되어 왔다. 하지만 투자와 보험이 동시적으로 고려되는 경우 투자는 보험의 리스크관리 역할을 보완하는 수단으로도 활용될 수 있다. 요컨대, 우리의 모형은 Mayers-Smith(1983)에서 언급된 투자의 홈메이드 보험역할은 가시적으로 보여준다. 즉, 투자는 잠재적 보험계약자가 포트폴리오의 기댓값을 유지하면서 포트폴리오의 위험을 감소시킬 수 있는 리스크관리의 수단도 된다. 이것은 기존의 보험수요모형에서 보험 하나만으로는 가능하지 않았던 리스크 관리방법이다. 왜냐하면, 보험은 분명히 리스크를 감소시키는 수단이기는 하지만, 부가보험료 요인으로 인해 포트폴리오의 기댓값도 감소시키기 때문이다.

또한 우리의 모형은, 보험료에 양(+)의 부가보험료가 포함되면 보험계약자는 일부보험(partial insurance)을 선택한다(Mossin 1968)는 전통적인 보험경제학의 결과를 새롭게 조명할 수 있는 기회도 제공한다. 즉 우리의 연구는, 부가보험료가 포함되는 경우라도 위험자산에의 투자를 보험과 함께 동시적으로 고려하면, 보험계약자는 전부보험(partial insurance) 그리고 가능하면 초과보험(over insurance)까지도 선택할 수 있음을 명시적으로 보여준다. 요컨대 우리의 연구는 양(+)의 값을 가지는 부가보험료를 전제로 보험계약자가 일부보험, 전부보

험, 그리고 더 나아가 초과보험까지 선택할 수 있는 필요・충분조건을 제시한다. 특히 이 연구결과는 최근 발표된 Zuasti(2008)의 결과와도 비교된다. 즉 Zuasti(2008)는 보험계약자가 자신이 부보한 보험회사의 주식을 구입하는 경우 부가보험료가 있더라도 전부보험을 선택할 수 있음을 보였다. 하지만 자신이 부보한 보험회사의 주식을 구입하는 것은 일반 금융투자의 수단으로 보기에는 너무 제한된 가정이다. 우리의 연구는 Zuasti (2008)의 결과를 크게 일반화시킨다. 즉 우리의 분석모형에서는 실물투자와 자본시장에의 투자를 포함한 모든 위험자산 투자 가능성을 통해 순수위험과 투자위험간의 일정한 상호의존성이 충족되면 보험계약자는 전부보험 또는 초과보험을 선택하게 된다.

우리의 논문은 다음과 같이 구성된다. 다음 II장에서는 분석모형의 소개와 함께 1차조건 그리고 2차조건을 유도한다. III장에서는 위험자산에의 투자가 보험과 함께 서로 보완적인 위험관리의 기능을 수행할 수 있음을 보이고, IV장에서는 양(+)의 부가보험료를 전제로 일부보험, 전부보험의 조건을 확인한다. V장에서는 포트폴리오의 위험다각화 차원에서 잠재적 보험계약자가 순수위험과 투자위험을 함께 보유할 가능성을 논한다. 즉, 보다 현실적으로, 잠재적 보험계약자가 공매(short sale)가 아닌 위험자산에의 순투자에 참여하고 동시에 초과보험을 제외한 일부보험 및 전부보험을 구입할 수 있는 제조건들을 제시한다. 끝으로 VI장에서는 요약과 함께 이 논문을 마무리한다.

II. 분석모형

1. 기말자산 포트폴리오

우리는 초기의 확정 부 $w(>0)$를 보유하고 있는 잠재적 보험계약자가 재산 및 배상책임의 손실위험 $L \in [0, \infty)$에 노출되어 있다고 가정한다. 이 경우 잠재적 보험계약자의 기말자산 Y는 다음과 같이 표현된다.

$$Y = w - L \tag{II-1}$$

이 잠재적 보험계약자는 재산 및 배상책임위험에 대비하기 위해 $b \in [0,1]$만큼 비례적 보험계약(coinsurance)에 가입할 수 있다. 즉 전부보험($b=1$)의 보험료를 P로 표기하면 비례보험계수(coinsurance coefficient) $b \in [0,1]$에 대한 납입보험료는 bP가 된다. 우리는 보험료 납입시점과 보험금 지급시점 간의 화폐의 시간적 가치를 고려해 보험료가 다음과 같이 결정된다고 가정한다.

$$P = \frac{1}{R_f} \cdot (1+\lambda) \cdot \mu_L \tag{II-2}$$

또는

$$bP = b\left[\frac{1}{R_f} \cdot (1+\lambda) \cdot \mu_L\right] \tag{II-3}$$

위의 식에서 R_f는 1원에 대한 무위험수익이고[3], μ_L은 $L \in [0, \infty)$의 기댓값 $E(L)$, 그리고 λ는 부가보험료 요인으로 우리는 엄격하게 $\lambda > 0$을 가정한다. 요컨대 우리의 보험료 모형에서 순보험료는 μ_L / R_f이고 부가보험료는 $\lambda\mu_L / R_f$이 된다. 여기서 우리는 $\lambda > 0$의 가정에 의해 항상 $PR_f > \mu_L$이 됨에도 유의한다.

$$\lambda > 0 \leftrightarrow P > \frac{\mu_L}{R_f} \tag{II-4}$$

여기까지는 전통적인 보험수요의 범주에 속한다. 하지만 이제 우리는 보험가입과 동시에 잠재적 보험계약자가 주식, 부동산 등 위험자산에도 화폐금액으로 a만큼 투자할 수 있다고 분석모형을 확장한다. 즉, 위험자산에의 투자금액 a는 기말(期末)에 aR의 투자수익을 산출하며($0 \leq R < \infty$)[4], 아울러 보험과 투자에 소요되지 않은 자산 $w-a-bP$는 무위험수익 R_f를 실현한다고 가정한다. 요약하면, 투자와 보험가입에의 기회가 동시적으로 존재하는 경우, 잠재적 보험계

3) 1기간 무위험수익률을 r_f라고 표기하면 $R_f = 1 + r_f$가 된다.
4) 1기간 투자수익률이 r인 경우 $R = 1 + r$이 된다.

약자의 기말자산 Y는 다음 식으로 표현된다.

$$Y = (w - a - bP)R_f + aR - (1-b)L \qquad \text{(II-5)}$$

또는

$$Y = (w - P)R_f + a(R - R_f) + (1-b)(PR_f - L) \qquad \text{(II-6)}$$

이제 식 (II-5) 또는 (II-6)을 이용하면 기말자산 포트폴리오의 평균과 분산은 각각 다음과 같이 계산된다.

$$\mu_Y = (w - P)R_f + a(\mu_R - R_f) + (1-b)(PR_f - \mu_L) \qquad \text{(II-7)}$$

$$\sigma_Y^2 = a^2\sigma_R^2 + (1-b)^2\sigma_L^2 - 2a(1-b)\sigma_{RL} \qquad \text{(II-8)}$$

위의 식에서 μ_R은 R의 기댓값 $E(R)$을 의미한다. 여기서 우리는 위험자산에의 투자를 유인하는 전통적 가정 하나를 도입한다. 즉 μ_R은 항상 무위험수익 R_f보다는 크다고 상정하는 것이다. 즉,

$$\mu_R > R_f \qquad \text{(II-9)}$$

한편 σ_{RL}은 R과 L의 공분산 $Cov(R, L)$을 나타낸다. 이제 우리는 위의 잠재적 보험계약자가 '평균・분산의 원칙(mean-variance criterion)'에 의해 다음과 같이 정의되는 함수 $H(a, b)$를 극대화하기 위한 a와 b를 선택한다고 가정한다.

$$\begin{aligned} H(a,\ b) &= \mu_Y - k\sigma_Y^2 \\ &= (w-P)R_f + a(\mu_R - R_f) + (1-b)(PR_f - \mu_L) \\ &\quad - k[a^2\sigma_R^2 + (1-b)^2\sigma_L^2 - 2a(1-b)\sigma_{RL}] \end{aligned} \qquad \text{(II-10)}$$

위의 식에서 $k(>0)$는 잠재적 보험계약자의 '위험회피(risk aversion)' 성향을

나타내는 계수로 물론 양(+)의 값을 가진다. 우리가 활용하는 (II-10)의 평균・분산모형은 재무관리학에서 가장 자주 이용되는 모형 중의 하나이다(예컨대, Eeckhoudt-Gollier 1995: Chapter 9 및 Chapter 15, Bodie-Kane-Marcus 2006: 이영기・남상구(역) 제6장 및 제7장).[5] 또한 (II-10)의 모형은 특별한 경우 기대효용 이론과도 완전히 일치할 수 있는 모형이 된다.[6]

2. 1차조건과 2차조건

식 (II-10)으로부터 H의 극대화를 위한 1차조건과 2차조건은 각각 다음 식으로 나타난다.

$$H_a = (\mu_R - R_f) - 2ak\sigma_R^2 + 2(1-b)k\sigma_{RL} = 0 \tag{II-11}$$

$$H_b = -(PR_f - \mu_L) + 2(1-b)k\sigma_L^2 - 2ak\sigma_{RL} = 0 \tag{II-12}$$

$$H_{aa} = -2k\sigma_R^2 < 0$$

$$H_{bb} = -2k\sigma_L^2 < 0$$

$$H_{ab} = H_{ba} = -2k\sigma_{RL}$$

$$H_{aa}H_{bb} - (H_{ab})^2 = 4k^2(\sigma_R^2\sigma_L^2 - \sigma_{RL}^2) > 0 \tag{II-13}$$

우리의 모형에서는 식 (II-13)에 의해 확인되는 것처럼 순수위험과 투자위험 간의 통계학적 상관계수가 ±1이 아니면(즉, $\rho \neq \pm 1$) 극대값을 갖기 위한 2차 조건이 완전히 충족되기 때문에 식 (II-11)과 식 (II-12)에 결정되는 최적값 a^*와

5) 또 다른 평균・분산모형으로는 수익・변동성비율(reward to variability ration), 즉 μ_Y/σ_Y^2 을 생각해 볼 수 있다. 예컨대 Kahane-Kroll(1985)은 이 수익・변동성비율로 최적보험의 성격을 규명하고 있다.

6) 잠재적 보험계약자가 CARA의 효용함수를 갖고 각 확률변수가 정규분포를 하는 경우, 잠재 적 보험계약자의 기대효용은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E[u(Y)] = -\exp\left(-k\mu_Y + \frac{1}{2}k^2\sigma_Y^2\right) = f\left(\mu_Y - \frac{1}{2}k\sigma_Y^2\right) \text{ 단 } f' > 0$$

물론 위의 식에서 $k(\rangle 0)$는 $-u''/u'$로 정의되는 절대위험회피도를 의미한다 (Eeckhoudt-Gollier: 1995, Chapter 15). 위의 경우 기대효용극대화는 우리의 평균・분산모 형과 완벽히 일치한다.

b^*는 유일한 해(unique solution)가 된다. 이제 우리는 이 논문의 전체에 걸쳐 $\rho \neq \pm 1$을 가정한다. 즉,

$$-1 < \rho < 1 \tag{II-14}$$

이제 우리는 $\rho \in (-1, 1)$의 범위에서 분석을 수행하고, 이런 가정 하에 연립식 (II-11)과 식 (II-12)를 a와 b에 관해 직접 풀면 다음과 같은 최적값들을 구할 수 있다.

$$a^* = \frac{1}{2k} \cdot \frac{(\mu_R - R_f)\sigma_L^2 + (PR_f - \mu_L)\sigma_{RL}}{\sigma_R^2\sigma_L^2 - \sigma_{RL}^2} \tag{II-15}$$

$$b^* = 1 - \frac{1}{2k} \cdot \frac{(\mu_R - R_f)\sigma_{RL} + (PR_f - \mu_L)\sigma_R^2}{\sigma_R^2\sigma_L^2 - \sigma_{RL}^2} \tag{II-16}$$

위의 식 (II-15)는 투자(a)에의 결정이 투자요인 μ_R, 그리고 σ_R^2 뿐만 아니라, 순수위험과 직접 관련된 요인들 즉 σ_L^2, P, μ_L, 그리고 σ_{RL}의 함수임을 잘 보여 준다. 마찬가지로 식 (II-16) 역시 보험구입(b)이 순수위험에 영향을 주는 요인들과 함께 투자요인에 의해서도 결정됨을 다시 한 번 확인시켜 준다.

3. 투자결정과 보험결정의 분리 조건

최적투자와 최적보험의 식, (II-15)과 (II-16)에서 확인할 수 있는 것처럼, 일반적으로 위험자산에의 투자결정과 보험구입은 분리될 수 없다. 즉, 투자금액 a의 결정은 투자요인 μ_R, R_f 그리고 σ_R^2 뿐만 아니라 순수위험의 요인 P, μ_L 및 σ_L^2에 의해서도 영향을 받는다. 물론 보험구입량 b의 결정도 순수위험과 관련된 요인 λ, μ_L, 그리고 σ_L^2과 함께 투자요인 μ_R, R_f 그리고 σ_R^2에도 의존된다. 하지만 특별한 경우 보험과 투자는 각각 서로 독립적으로 결정될 수 있다. 즉 투자위험과 순수위험 간에 서로 통계학적 상관성이 없는 경우가 여기에 해

당된다. 이 내용은 다음과 같이 〈정리 1〉로 요약될 수 있다.

〈정리 1〉

투자위험과 순수위험 간에 서로 통계학적 상관성이 없으면, 투자결정과 보험결정은 각각 독립적으로 이루어진다. 즉

$$\rho = 0 \;\rightarrow \begin{cases} a^* = \dfrac{1}{2k} \cdot \dfrac{\mu_R - R_f}{\sigma_R^2} \\[2ex] b^* = 1 - \dfrac{1}{2k} \cdot \dfrac{\lambda \mu_L}{\sigma_L^2} \end{cases}$$

(증명) $P = (1+\lambda) \cdot \mu_L / R_f$이므로 $PR_f - \mu_L = \lambda \cdot \mu_L$이 됨에 유의하여, 1차 조건의 식 (II-15)와 (II-16)에 $\rho = 0$ 또는 $\sigma_{RL} = 0$를 적용하면 위의 정리가 쉽게 증명된다. Q.E.D.

요컨대 투자위험과 순수위험이 서로 독립적으로 확률분포되어 있으면, 투자는 순수위험의 요인 P, μ_L, 및 σ_L^2과는 상관없이 투자요인 μ_R, R_f 그리고 σ_R^2에 의해 결정되고 또한 보험구입에의 의사결정도 전적으로 순수위험 관련요인인 λ, μ_L, 그리고 σ_L^2에 의존된다.[7] 하지만 일반적으로 투자위험과 순수위험을 서로 독립적으로만 생각할 수는 없다. 우리의 분석모형에서 투자 대상은 금융투자와 실물투자를 모두 포함하고 있는데, 특히 실물투자를 생각해 보면 그 수익이 높아지는 경우 그에 따라 재산 및 배상책임위험의 가능성도 커질 것임은 쉽게 예견할 수 있다(즉, $\rho > 0$ 또는 $\sigma_{RL} > 0$). 이제 우리의 모형에서는, 두 위험이 독립적인 경우는 물론이고 상호의존적인 경우라도, 투자와 보험은 서로 보완적이고 경쟁적인 관계에서 전체 자산 포트폴리오의 위험성과 수익성을 개선하는 역할을 각각 수행하게 된다. 다음 III장에서는 이 내용을 보다 구체적으로 확인해 본다.

7) 기대효용의 모형 하에서는 일반적으로 투자위험과 순수위험의 독립성만으로는 위의 분리정 리(separation theorem)가 성립되지 않는다. 효용함수에 관한 추가적인 가정이 필요하다. 독자들은 이에 관해서는 예컨대 MacMinn-Witt (1987) 등을 참조할 수 있다.

III. 투자의 리스크관리 기능

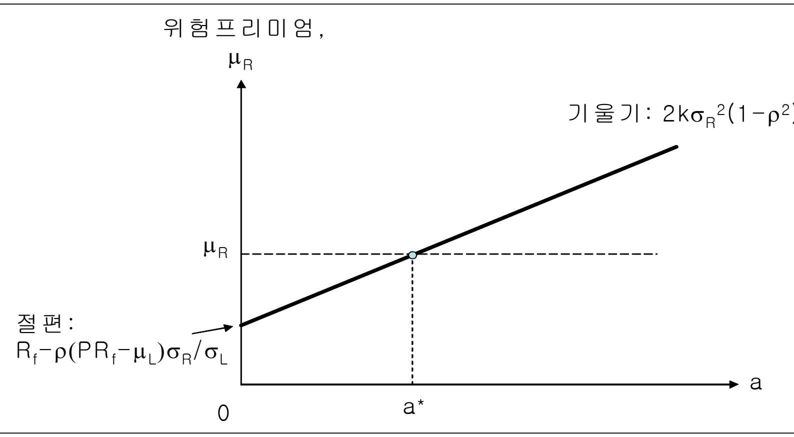
1. 최적투자의 조건

우리는 최적투자의 1차조건 식 (II-15)를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mu_R = R_f + \left[2\sigma_R^2 (1-\rho^2) k a^* - \rho (PR_f - \mu_L) \frac{\sigma_R}{\sigma_L} \right] \qquad \text{(III-1)}$$

위의 식에서 우변의 대괄호 [·]은 위험자산 투자에의 리스크프리미엄을 나타내는데, 이 리스크프리미엄은 가정 (II-14)에 의해(즉 $-1 < \rho < 1$) 명백히 a의 증가함수가 된다(〈그림 1〉 참조).

〈그림 1〉 최적투자 a^*의 결정



균형조건:

$$\mu_R = \left[R_f - \rho (PR_f - \mu_L) \frac{\sigma_R}{\sigma_L} \right] + 2\sigma_R^2 (1-\rho^2) k a$$

잘 알려진 것처럼 Arrow(1970)의 단순 투자모형에서 $\mu_R > R_f$의 조건은 위험자산 투자에의 필요충분조건이 된다.[8] 하지만 순수위험도 함께 존재하는 우리의 모형에서 $\mu_R > R_f$은 위험자산 투자 $a^* > 0$에의 전제조건이 되지 못한다. 앞의 II장에서 우리는 (II-4)에서 $PR_f > \mu_L$ 그리고 (II-9)에서 $\mu_R > R_f$의 두가지 중요한 가정을 했다. 이런 가정에도 불구하고, 우리의 모형에서 투자위험과 순수위험은 양(+)의 상관관계가 가능하므로 식 (III-1)에서 대괄호 [·]로 표현된 리스크프리미엄이 양(+)의 값을 갖지 않을 가능성도 있는 것이다. 이런 경우, $a^* < 0$ 즉 공매(空賣, short sale) 투자의 가능성도 배제할 수 없다. 요컨대 위험자산에의 순투자($a^* > 0$)에는 다음과 같은 추가적인 조건이 요구된다.

〈정리 2〉

위험자산 투자에의 필요·충분조건은 $\rho > -\dfrac{(\mu_R - R_f)\sigma_L}{(PR_f - \mu_L)\sigma_R}$ 이다. 즉,

$$a^* > 0 \leftrightarrow \rho > -\frac{(\mu_R - R_f)\sigma_L}{(PR_f - \mu_L)\sigma_R}$$

(증명) 식 (II-15)의 우변에서, $k > 0$ 그리고 (II-14)의 $\rho \neq \pm 1$ 가정에 의해 분모는 항상 양(+)의 값을 가지므로 위험자산에 투자하기 위한 필요·충분조건은 $(\mu_R - R_f)\sigma_L^2 + (PR_f - \mu_L)\sigma_{RL} > 0$ 또는 $\rho > -\dfrac{(\mu_R - R_f)\sigma_L}{(PR_f - \mu_L)\sigma_R}$이 된다. Q.E.D.

우리는 $\mu_R > R_f$ 그리고 $PR_f > \mu_L$의 가정에 의해 〈정리 2〉의 조건 $-\dfrac{(\mu_R - R_f)\sigma_L}{(PR_f - \mu_L)\sigma_R}$이 엄격한 음(-)의 값을 가짐에 유의하면 〈정리 2〉의 조건은 R과 L간의 상당히 광범위한 상호의존 관계를 포함한다는 사실을 확인할 수 있다. 이 조건은 순수위험과 투자위험이 서로 독립적인 경우(즉, $\rho = 0$)와 양(+)의 관계에서 상

8) Arrow(1970)의 투자모형은 여러 재무경제학 서적에도 소개되어 있다. 예를 들면 우리는 Huang Litzenberger(1988, ch 1)에서도 Arrow(1970)의 투자모형을 참조할 수 있다.

호의존적인 모든 경우($\rho > 0$)는 물론, 너무 과도하지 않은 음(-)의 상호의존성 $\left(-\frac{(\mu_R - R_f)\,\sigma_L}{(PR_f - \mu_L)\,\sigma_R} < \rho < 0\right)$까지도 포함하고 있다.

이런 결과는, 이미 머릿말에서도 언급한 바와 같이, 우리의 분석내용을 금융투자는 물론 실물투자에 까지 적용시킬 수 있게 한다. 먼저, 금융투자의 경우를 보면, 우리는 금융자산의 수익률과 재산 및 배상책임의 손실위험 간에는 통계학적으로 유의한 상관성이 없을 것으로 생각할 수 있겠다. 즉 금융투자는 $\rho = 0$의 경우에 근접해 있을 것이다. 한편 실물투자의 경우는 그 수익률과 재산 및 배상책임의 손실위험 간에 양(+) 또는 음(-)의 상관성이 존재할 개연성이 크다. 간단한 예를 들어 보기로 한다. 비교적 안전한 사업과 폭약을 다루는 사업 등의 상대적으로 물리적 위험도가 높은 사업에 투자하는 것을 비교해 보면, 위험사업의 경우 상대적으로 수익률은 높지만 그 투자에 따른 배상책임위험도 높아질 것으로 예상할 수 있다. 즉 두 위험 간에 양(+)의 상관성이 있을 것으로 추정된다. 또 다른 예로, 건물임대사업에 투자를 한 경우, 화재손실이 크게 발생할수록 더 많은 복구비용이 들고 또 장시간의 복구기간도 필요하게 되면서 투자수익률이 낮아진다고 가정해 보면 두 위험 간에는 음(-)의 상관성이 존재할 것이다.

요컨대, 우리는 투자대상으로 금융투자와 함께 실물투자의 가능성도 고려하면 투자수익률과 재산 및 배상책임의 손실위험 간에 양(+) 또는 음(-)의 상관 가능성을 배제할 수 없고, 또한 이런 경우 잠재적 보험계약자는 양(+)의 관계에서 상호의존적인 모든 가능성($\rho > 0$)과 함께 두 위험이 음(-)의 관계에서 상호의존적이라 하더라도($\rho < 0$) 너무 과도하지 않게 일정수준 이상이면 투자에의 인센티브($a^* > 0$)를 갖게 된다. 그 이유는 다음과 같이 설명될 수 있다. 즉, 잠재적 보험계약자는 〈정리 2〉의 조건이 충족되면 위험자산에의 투자를 통해 보유하고 있는 보험포트폴리오의 위험성 또는 수익성을 개선할 수 있는 방안을 모색될 수 있기 때문이다. 우리는 이 내용을 〈따름정리 1〉로 요약・설명할 수 있다.

〈따름정리 1〉

1. 투자에 참여하지 않는 잠재적 보험계약자는 최적보험으로 항상 일부보험 또는 무보험을 선택한다.
2. 1의 상황에 있는 잠재적 보험계약자는 $\rho > -\dfrac{(\mu_R - R_f)\sigma_L}{(PR_f - \mu_L)\sigma_R}$ 이면 위험자산에의 투자 $a^* > 0$를 통해,
   (1) 자산포트폴리오의 기대수익률을 유지하면서 분산위험을 감소시키거나, 또는
   (2) 자산포트폴리오의 분산을 유지하면서 자산포트폴리오의 기대값을 증가시킬 수 있다.

(증명) 먼저 1의 내용을 본다. 1차조건의 식 (II-12)의 우변에서 $a = 0$인 경우 H_b의 식은 다음과 같이 줄여진다.

$$H_b = -(PR_f - \mu_L) + 2(1-b)k\sigma_L^2$$

위의 식에서 $b = 1$ 즉 전부보험의 경우, (II-4)의 보험료 가정 $PR_f > \mu_L$에 의해 $H_b(1) < 0$이 된다. 이것은 잠재적 보험계약자가 일부보험 또는 무보험을 구입하는 것을 의미한다. 이것으로 1의 증명은 종결된다.

2의 내용은, 보다 엄격하게 수식으로 확인할 수도 있지만, 등평균선(Iso-mean Line)과 등분산타원(Iso-variance Ellipse)을 이용하면 보다 직관적으로 쉽게 증명할 수 있다. 먼저 우리는 1차조건의 두 식 (II-11) 그리고 (II-12)를 이용해 다음 관계식을 쉽게 유도할 수 있다.

$$\frac{\mu_R - R_f}{PR_f - \mu_L} = \frac{a\sigma_R^2 - (1-b)\sigma_{RL}}{(1-b)\sigma_L^2 - a\sigma_{RL}} \qquad \text{(III-2)}$$

그런데 위의 식 (III-2)에서, 좌변은 좌표평면 $(a,\ b)$에서 그려지는 등평균선의 기울기이고 우변은 등분산타원의 기울기가 된다. 이 내용은 다음과 같이 확인

할 수 있다. 우선 등평균선의 식은 (II-7)의 μ_Y 식으로 부터 다음과 같이 유도된다.

$$b = 1 - \frac{\mu_Y - (w-P)R_f}{PR_f - \mu_L} + \frac{\mu_R - R_f}{PR_f - \mu_L} \cdot a \qquad \text{(III-3)}$$

따라서 식 (III-2)의 좌변은 등평균선의 기울기가 된다. 한편, 등분산타원은 동일한 σ_Y^2를 만들어 주는 (a, b)의 궤적이므로, 우리는 식 (II-8)의 우변을 전미분(Total Differentiation)한 다음, '0'으로 놓고 정리하면, 다음과 같이 등분산타원의 기울기를 유도할 수 있다. 즉,

$$[\,2a\sigma_R^2 - 2(1-b)\sigma_{RL}\,]\,da + [\,-2(1-b)\sigma_L^2 + 2a\sigma_{RL}\,]\,db = 0$$

또는

$$\frac{db}{da} = \frac{a\sigma_R^2 - (1-b)\,\sigma_{RL}}{(1-b)\,\sigma_L^2 - a\sigma_{RL}} \qquad \text{(III-4)}$$

지금까지 우리는 식 (III-2)의 좌변은 등평균선의 기울기 그리고 우변은 등분산타원의 기울기가 됨을 확인했다. 그러면 이제 〈따름정리 1〉의 내용을 증명하기로 한다. 우리는 아직 투자에 참여하지 않은 1의 보험계약자(즉, $a=0$)는 위험자산에 순투자($a>0$)를 함으로써 분산위험을 줄일 수 있음을 보인다. 먼저 1의 보험계약자가 가진 포트폴리오 $(a,\ b)=(0,\ b_0)$에서 등분산타원의 기울기는 다음 값을 가진다.[9]

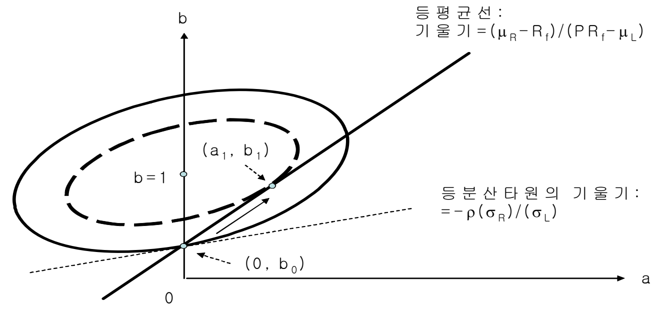
$$\left.\frac{db}{da}\right|_{a=0} = -\frac{\sigma_{RL}}{\sigma_L^2} = -\rho\frac{\sigma_R}{\sigma_L} \qquad \text{(III-5)}$$

9) 우리는 여기서 1의 상황에 있는 보험계약자는 일부보험 또는 무보험 상태임에 유의한다. 즉, $b^\circ \in [0, 1)$이 된다.

포트폴리오 $(a,\ b)=(0,\ b_0)$에서 등분산타원의 기울기$\left(=-\rho\dfrac{\sigma_R}{\sigma_L}\right)$가 등평균선의 기울기$\left(=\dfrac{\mu_R-R_f}{PR_f-\mu_L}\right)$보다 작은 경우, 우리는 포트폴리오 $(0,\ b_0)$에서 등평균선을 따라 포트폴리오 $(a_1,\ b_1)$으로 이동하면 평균을 그대로 유지하면서 분산을 줄일 수 있게 됨을 확인할 수 있다(단, $a_1>0$, 〈그림 2〉 참조). 물론 $-\rho\dfrac{\sigma_R}{\sigma_L}<\dfrac{\mu_R-R_f}{PR_f-\mu_L}$은 〈따름정리 1〉의 조건과 동일한 표현이다. 이것으로 2의 (1)은 증명이 완결된다.

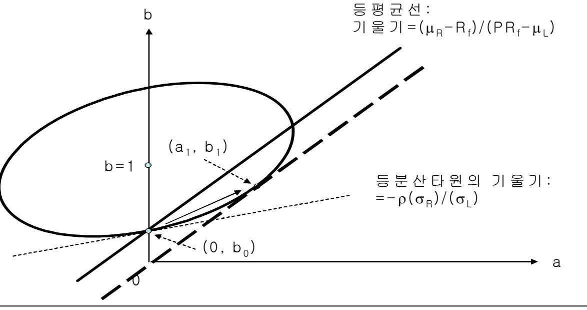
한편, 2의 조건이 충족되면 투자를 하지 않고 있던 잠재적 보험계약자는 위험자산에 투자를 함으로써 자산포트폴리오의 분산위험을 변동시키지 않고 기댓값을 개선하는 방법도 모색할 수 있다. 〈그림 3〉에서 확인할 수 있는 것처럼, $(a,\ b)=(0,\ b_0)$에서 등분산타원의 기울기$\left(=-\rho\dfrac{\sigma_R}{\sigma_L}\right)$가 등평균선의 기울기$\left(=\dfrac{\mu_R-R_f}{PR_f-\mu_L}\right)$보다 작은 경우, 보험계약자는 원래의 자산포트폴리오 $(0,\ b_0)$에서 등분산타원을 따라 새로운 자산포트폴리오 $(a_1,\ b_1)$으로 이동하면(단, $a_1>0$), 자산포트폴리오의 분산위험을 그대로 유지하면서 기대값을 증가시킬 수 있게 된다. Q.E.D.

〈그림 2〉 투자를 이용하는 분산위험의 감소



〈해설〉 등분산타원의 기울기가 등평균선의 기울기보다 작은 경우 $\left(-\rho\frac{\sigma_R}{\sigma_L} < \frac{\mu_R - R_f}{PR_f - \mu_L}\right)$, 최초의 자산포트폴리오 $(0,\, b_0)$에서 등평균선을 따라 새로운 자산포트폴리오 $(a_1,\, b_1)$으로 이동하면 보험계약자는 평균을 그대로 유지하면서 분산을 줄일 수 있게 된다($a_1 > 0$). 그 결과, 자산포트폴리오 $(a_1,\, b_1)$에서 새로이 그려지는 등분산타원(굵은 점선)은 $(0,\, b_0)$에서 그려지는 원래의 등분산타원(굵은 실선)보다 그 크기가 작아진다.

〈그림 3〉 투자를 이용하는 기댓값의 개선



〈해설〉 등분산타원의 기울기가 등평균선의 기울기보다 작은 경우 $\left(-\rho\frac{\sigma_R}{\sigma_L} < \frac{\mu_R - R_f}{PR_f - \mu_L}\right)$, 최초의 자산포트폴리오 $(0,\, b_0)$에서 등분산타원을 따라 새로운 자산포트폴리오 $(a_1,\, b_1)$으로 이동하면 보험계약자는 분산을 그대로 유지하면서 기대값을 향상시킬 수 있게 된다(단, $a_1 > 0$). 그 결과, 자산포트폴리오 $(a_1,\, b_1)$에서 새로이 그려지는 등평균선(굵은 점선)은 $(0,\, b_0)$을 통과하는 원래의 등평균선(굵은 실선)보다 오른쪽에 그려진다.

〈따름정리 1〉은 보험과 투자의 상호보완적인 역할을 잘 보여준다. 예컨대, 2의 (1)에서 보험계약자가 보험구입과 동시에 위험자산투자에도 참여함으로써 기댓값의 손상없이 전체 포트폴리오의 위험을 감소시킬 수 있음을 입증한다. 이런 경우 위험자산에의 투자는 수익성의 추구보다는 오히려 리스크관리의 수단으로 활용될 수 있음을 예시한다. 요약하면, 우리는 〈따름정리 1〉에서 위험자산에의 투자가 보험으로서는 복제할 수 없는 고유한 위험관리의 수단이 됨을 확인할 수 있다. 이른바 Mayers-Smith (1983)가 지적한 투자가 수행하는 홈메이드 보험(homemade insurance)의 기능이다.

다시 한 번 강조하면, 〈정리 2〉에서 잠재적 보험계약자가 순투자($a^* > 0$)에 참여하는 조건은 순수위험과 투자위험이 독립적인 경우, 양(+)의 상호의존적인 경우($\rho > 0$)는 물론, 과도하지 않은 음(-)의 상호의존적 경우까지 모두 포함하고 있다. 요컨대 위험자산에의 투자가 포트폴리오의 리스크 관리에 기여할 수 있는 투자위험과 순수위험간의 상호의존성 범위는 상당히 광범위하다.

이제 우리는 다음 IV장부터는 공매투자($a^* < 0$)의 경우는 고려하지 않고 통계학적 상관계수가 〈정리 2〉의 필요충분조건을 만족시키는 범위에서 분석을 계속하기로 한다.

IV. 부가보험료와 최적보험

1. 균형보험의 조건

우리는 먼저 보험계약자가 조금이라도 보험을 구입할 조건, 즉 $b^* > 0$의 조건을 확인해 본다. 우리는 식 (II-12) 또는 (II-16)로 부터 각각 다음 식을 유도할 수 있다.[10)]

10) $b^* > 0$의 조건은 다음과 같이 보험계약자의 위험회피도인 k를 기준으로 나타낼 수도 있 다. 즉,

$$b^* > 0 \leftrightarrow k > \frac{1}{2} \cdot \frac{(\mu_R - R_f)\sigma_{RL} + (PR_f - \mu_L)\sigma_R^2}{\sigma_R^2 \sigma_L^2 - \sigma_{RL}^2}.$$

$$b^{*} > 0 \;\leftrightarrow\; P < \frac{1}{R_f}\left[\mu_L + 2k\sigma_L^2(1-\rho^2) - \rho(\mu_R - R_f)\frac{\sigma_L}{\sigma_R}\right] \quad \text{(IV-1)}$$

또는

$$b^{*} > 0 \;\leftrightarrow\; \lambda < \frac{1}{\mu_L}\left[2k\sigma_L^2(1-\rho^2) - \rho(\mu_R - R_f)\frac{\sigma_L}{\sigma_R}\right] \quad \text{(IV-2)}$$

이제 우리는 보험료 또는 부가보험료 요인이 (IV-1) 또는 (IV-2)를 충족된다고 가정한다. 즉 지금부터는 잠재적 보험계약자가 조금이라도 보험을 구입하는, 다시 말하면 너무 과도하지 않은 보험료의 범위 내에서 분석을 계속한다. 우리는 최적보험의 식 (II-16)을 보험료 P에 관해 정리하면 다음 식을 유도할 수 있다.

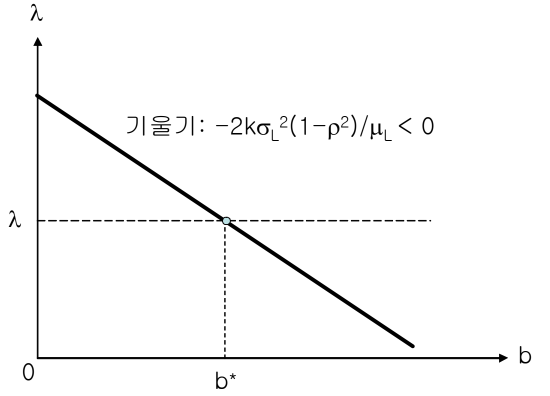
$$P = \frac{1}{R_f}\left[\mu_L + (1-b)\,2k\sigma_L^2(1-\rho^2) - \rho(\mu_R - R_f)\frac{\sigma_L}{\sigma_R}\right] \quad \text{(IV-3)}$$

즉 균형보험료는 순보험료인 기대손해액의 현재가치(μ_L/R_f)에 부가보험료를 더한 값으로 나타난다. 우리는 위의 식을 부가보험료 요인 λ에 관해서도 정리할 수 있다. 즉 우리는 식 (II-2)에서 $P = \frac{1}{R_f} \cdot (1+\lambda) \cdot \mu_L$를 정의했는데, 이 식을 위의 식 (IV-3)과 비교해 정리하면 부가보험료 요인 λ를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\lambda = \frac{1}{\mu_L}\left[-2k\sigma_L^2(1-\rho^2)\,b + 2k\sigma_L^2(1-\rho^2) - \rho\,(\mu_R - R_f)\frac{\sigma_L}{\sigma_R}\right] \quad \text{(IV-4)}$$

우리는 식 (IV-4)에서 부가보험료 요인 λ가 보험구입량 b의 엄격한 감소함수가 됨을 확인할 수 있다. 또 여기에 식 (IV-2)가 충족되면, 균형상태에서 최적 $b^{*} > 0$가 결정되는 과정은 〈그림 4〉와 같이 그려질 수 있다. 즉, 보험계약자는 부가부험료 요인 λ가 커질수록 최적 보험구입량 b^{*}를 점점 줄여 나가는 것이다.

〈그림 4〉 최적보험 b^*의 결정



균형조건:

$$\lambda = \frac{1}{\mu_L}\left[-2k\sigma_L^2(1-\rho^2)\,b + 2k\sigma_L^2(1-\rho^2) - \rho\,(\mu_R - R_f)\frac{\sigma_L}{\sigma_R}\right]$$

2. 부가보험료와 최적보험

Mossin(1968)의 정리는, 보험료가 순보험료 만으로 책정되는 경우($\lambda = 0$) 보험계약자는 전부보험($b^* = 1$), 그리고 보험료에 부가보험료도 포함되는 경우($\lambda > 0$) 일부보험($b^* < 1$)을 구입하는 것으로 요약된다. 우리의 분석모형에서는 $\lambda > 0$ 즉 부가보험료가 있는 경우만을 고려하고 있으므로, 우리는 Mossin(1968) 정리의 두 번째 내용을 살펴본다. 결론을 먼저 말하면, 투자위험이 순수위험과 함께 공존하는 우리의 모형에서, 양(+)의 부가보험료는 일부보험에의 충분조건이 되지 못한다. 즉, Mossin(1968) 정리가 성립하기 위해서는 $\lambda > 0$ 이외에도 투자위험과 순수위험간의 특정한 상호의존성 조건이 충족되어야 한다. 이것은 기존의 보험수요 이론과는 분명한 차이를 보여 주는 중요한 결과다. 우리는 이 내용을 다음 〈정리 3〉으로 확인해 본다.

〈정리 3〉

> 보험계약자가
>
> 일부보험($b^* < 1$)을 구입하기 위한 필요·충분조건은 $\rho > -\dfrac{(PR_f - \mu_L)\,\sigma_R}{(\mu_R - R_f)\,\sigma_L}$ 이고,
>
> 전부보험($b^* = 1$)을 구입하기 위한 필요·충분조건은 $\rho = -\dfrac{(PR_f - \mu_L)\,\sigma_R}{(\mu_R - R_f)\,\sigma_L}$ 이며,
>
> 초과보험($b^* > 1$)을 구입하기 위한 필요·충분조건은 $\rho < -\dfrac{(PR_f - \mu_L)\,\sigma_R}{(\mu_R - R_f)\,\sigma_L}$ 이다.

(증명) 우리는 최적보험의 식 (II-16)으로부터 직접 계산에 의해 $b^* < 1$의 조건을 구하면 $\rho > -\dfrac{(PR_f - \mu_L)\,\sigma_R}{(\mu_R - R_f)\,\sigma_L}$ 이 됨을 쉽게 확인할 수 있다. $b^* = 1$ 그리고 $b^* > 1$의 내용도 같은 방법으로 입증된다. Q.E.D.

Mossin(1968) 이래, 양(+)의 부가보험료가 존재하면($\lambda > 0$) 일부보험($b^* < 1$)이 최적보험이 된다는 사실은 Eeckhoudt-Gollier(1995, Ch. 10) 또는 Schlesinger(1981, 2000) 등에서 여러 차례 확인되어 왔다. 하지만 우리의 모형에서는 이런 부가보험료의 범위가 넓어진다. 즉, 식 (II-16)에서 $b^* < 1$의 조건을 λ에 관해 정리하면 다음 식이 유도된다.

$$b^* < 1 \quad \leftrightarrow \quad \lambda \ > \ -\rho \cdot \frac{\mu_R - R_f}{\mu_L} \cdot \frac{\sigma_L}{\sigma_R} \tag{IV-5}$$

예컨대, $\rho > 0$인 경우, 식 (IV-5)는 $\lambda > 0$은 물론이고, 이외에도 추가적으로 $-\rho \cdot \dfrac{\mu_R - R_f}{\mu_L} \cdot \dfrac{\sigma_L}{\sigma_R} < \lambda \le 0$의 범위에서도 Mossin의 정리가 성립될 수 있음을 보여준다. 한편 이 결과는 Zuasti(2008)의 결과와도 비교된다. Zuasti(2008)는 잠재적 보험계약자가 일반균형(general equilibrium)의 상태에서 부보되어 있는 해당 보험회사의 주식을 구입하면 부가보험료가 책정되어 있음에도 불구하고 전부보험(full insurance)을 구입할 수 있는 가능성을 입증했다. 하지만, Zuasti (2008)는 보험산업에서의 일반균형을 유도하기 위해 주식투자의 대상을 보험사

들로 제한했다. 우리가 생각하는 투자와는 괴리가 있는 분석모형이다. 이런 관점에서 〈정리 3〉은 Zuasti(2008) 보다 훨씬 유용한 내용이 된다.

요약하면 우리의 연구는 〈정리 3〉에서 Mossin(1968)을 포함하는 보다 일반적인 결과물을 제시했다. 이제 다음의 〈따름정리 2〉는 우리의 모형에서 왜 이렇게 일반화된 필요충분조건이 가능할 수 있는 지 그 이유를 설명해 줄 수 있다.

〈따름정리 2〉

1. 전부보험($b=1$)에 가입해 있는 보험계약자는 항상 위험자산에 순투자한다 ($a>0$).
2. 1의 상황에 있는 잠재적 보험계약자는 $\rho > -\dfrac{(PR_f-\mu_L)\sigma_R}{(\mu_R-R_f)\sigma_L}$이면 일부보험으로 보험구입량을 감소시킴으로서
   (1) 자산포트폴리오의 기대수익률을 유지하면서 분산위험을 감소시키거나, 또는
   (2) 자산포트폴리오의 분산을 유지하면서 자산포트폴리오의 기대값을 증가시킬 수 있다.

(증명) 먼저 1을 본다. 식 (II-11)에서 $b=1$인 경우 H_a는 다음과 같이 간단히 표현된다.

$$H_a=(\mu_R-R_f)-2ak\sigma_R^2$$

위의 식을 $a=0$에서 평가하면, (II-9)의 가정 $\mu_R>R_f$에 의해 $H_a(0)>0$이 되고, 이것은 위험자산에의 순투자($a>0$)를 의미한다. 이번엔 2를 증명한다. 우리는 2를 앞의 〈따름정리 1〉에서처럼 등평균선과 등분산타원을 사용해 증명할 수도 있지만 여기서는 보다 엄격하게 방향미분(directional derivative)을 이용해 보기로 한다. 먼저 (1)의 증명을 위해 방향벡터 $v=(v_1, v_2)$를 다음과 같이 정의한다.

$$v_1=-(PR_f-\mu_L)<0 \text{ 그리고 } v_2=-(\mu_R-R_f)<0$$

이제 우리는 식 (II-7)의 μ_Y를 v의 방향으로 미분하면 다음과 같이 $D_v\mu_Y = 0$이 되는 것을 확인할 수 있다.

$$D_v\mu_Y = -(PR_f - \mu_L)(\mu_R - R_f) + (\mu_R - R_f)(PR_f - \mu_L) = 0$$

같은 방법으로, 식 (II-8)의 σ_Y^2를 역시 v의 방향으로 미분한 다음, (a, b)=$(a^\circ, 1)$에서 평가하면 2의 충분조건 하에서 $D_v\sigma_Y^2 < 0$이 된다. 물론 우리는 여기서, 1에서 확인한 것처럼, $a^\circ > 0$임에 유의한다.

$$D_v\sigma_Y^2 = -(PR_f - \mu_L)[2a\sigma_R^2 - 2(1-b)\sigma_{RL}] - (\mu_R - R_f)[-2(1-b)\sigma_L^2 + 2a\sigma_{RL}]$$

$$\begin{aligned} D_v\sigma_Y^2\Big|_{b=1} &= -2a\Big[(PR_f - \mu_L)\sigma_R^2 + (\mu_R - R_f)\sigma_{RL}\Big] \\ &= -2a \cdot \sigma_R \cdot \sigma_L \cdot (\mu_R - R_f)\left[\rho + \frac{(PR_f - \mu_L)\sigma_R}{(\mu_R - R_f)\sigma_L}\right] \\ &< 0 \quad \left(\because\ \rho > -\frac{(PR_f - \mu_L)\sigma_R}{(\mu_R - R_f)\sigma_L}\right) \end{aligned}$$

이것으로 (1)의 증명은 종결된다. 이번엔 (2)를 증명한다. 같은 방법으로 우리는 $v = (v_1, v_2) = (\sigma_{RL}, -\sigma_R^2)$를 정의하고, μ_Y를 v의 방향으로 미분하면 주어진 충분조건 하에서 $D_v\mu_Y > 0$이 됨을 확인할 수 있다.

$$\begin{aligned} D_v\mu_Y &= \sigma_{RL}(\mu_R - R_f) + \sigma_R^2(PR_f - \mu_L) \\ &= \sigma_R \cdot \sigma_L \cdot (\mu_R - R_f)\left[\rho + \frac{(PR_f - \mu_L)\sigma_R}{(\mu_R - R_f)\sigma_L}\right] \\ &> 0 \left(\leftarrow \rho > -\frac{(PR_f - \mu_L)\sigma_R}{(\mu_R - R_f)\sigma_L}\right) \end{aligned}$$

부연하면, 위의 식에서 $v_2 = -\sigma_R^2 < 0$로 정의되었으므로, 포트폴리오 (a, b)=$(a^\circ, 1)$를 v의 방향으로 이동시키는 것은 보험의 경우 전부보험에서 일부보험으로 그 구입량을 감소시키는 것을 의미한다. 이번엔 σ_Y^2를 v의 방향으로 미분한 다음, (a, b)=$(a^\circ, 1)$에서 평가하면, 2의 충분조건 하에서 다음과 같이

$D_v \sigma_Y^2 = 0$이 된다.

$$D_v \sigma_Y^2 \;=\; \sigma_{RL} \cdot [2a\sigma_R^2 - 2(1-b)\sigma_{RL}] \;+\; \sigma_L^2 \cdot [-2(1-b)\sigma_L^2 + 2a\sigma_{RL}]$$

$$D_v \sigma_Y^2 \Big|_{b=1} \;=\; 2a \cdot \left(\sigma_{RL}\sigma_R^2 - \sigma_R^2 \sigma_{RL}\right) \;=\; 0 \qquad \text{Q.E.D.}$$

우리는 위의 〈따름정리 2〉와 유사한 방법으로 〈정리 3〉의 전부보험 또는 초과보험의 최적성(optimality)을 설명할 수도 있다. 예를 들어, 만약 초과보험이 가능하다고 가정해 보면, $\rho < -\dfrac{(PR_f - \mu_L)\sigma_R}{(\mu_R - R_f)\sigma_L}$인 경우 전부보험에 있는 보험계약자는 보험구입량과 투자량을 동시에 $(v_1, v_2) = (PR_f - \mu_L,\ \mu_R - R_f)$의 방향으로 증가시키면 포트폴리오의 기대수익률에는 변화를 주지 않으면서 분산위험을 줄일 수 있거나 또는 주어진 위험 하에서 기대수익을 높일 수 있게 된다. 이에 관한 증명은 독자들에게 일임하기로 한다.

V. 자산 포트폴리오의 위험다각화

1. 자산포트폴리오의 위험다각화 조건

이제 우리는 〈정리2〉와 〈정리 3〉의 결과를 종합해 보험계약자가 보유하는 전체 포트폴리오의 위험을 다양화(diversification) 시킬 수 있는 방법을 제시한다. 즉, $\rho > -\dfrac{(\mu_R - R_f)\sigma_L}{(PR_f - \mu_L)\sigma_R}$과 $\rho > -\dfrac{(PR_f - \mu_L)\sigma_R}{(\mu_R - R_f)\sigma_L}$의 조건이 동시에 충족되면 잠재적 보험계약자는 포트폴리오 안에 투자위험과 순수위험을 동시에 보유하는 것이 보다 유리해진다. 이 두가지 충분조건을 결합하면, (1) 투자위험과 순수위험이 양(+)의 상관관계에 있는 모든 경우, (2) 투자위험과 순수위험이 서로 독립적인 경우, (3) 그리고 투자위험과 순수위험이 음(-)의 상관관계에서 일정 조건을 충족하는 경우 모두가 여기에 해당된다. 우리는 이 내용을 다음 〈정리 4〉로 요약해 볼 수 있다.

〈정리 4〉

보험계약자가 순수위험과 투자위험을 동시에 보유하기 위한 필요충분조건은 $\rho \geq 0$ 또는 $-\dfrac{\sigma_{RL}}{\sigma_L^2} < \dfrac{\mu_R - R_f}{PR_f - \mu_L} < -\dfrac{\sigma_R^2}{\sigma_{RL}}$를 충족하는 $\rho < 0$이 되는 경우다.

즉,

$$\begin{pmatrix} a^* > 0 \\ \\ b^* < 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \rho > 0 \text{ 또는} \\ \rho = 0 \text{ 또는} \\ \rho < 0 \text{ 그리고 } -\dfrac{\sigma_{RL}}{\sigma_L^2} < \dfrac{\mu_R - R_f}{PR_f - \mu_L} < -\dfrac{\sigma_R^2}{\sigma_{RL}} \end{pmatrix}$$

(증명) $\rho \geq 0$인 경우 〈정리 2〉과 〈정리 3〉의 두 조건은 모두 충족된다. $\rho < 0$인 경우, 두 조건을 각각 $\dfrac{\mu_R - R_f}{PR_f - \mu_L}$에 관해 풀고 종합하면 〈정리 4〉의 조건이 유도된다. Q.E.D.

$\rho > 0$인 경우는 예를 들면 투자수익이 높아질 때 재산 및 배상책임위험도 함께 증가되는 상황을 말한다. 즉 순수위험과 투자위험 간에 자연헤지(natural hedge)가 존재하는 경우다. 이런 경우 보험계약자가 두 위험을 동시에 보유하는 것이 바람직해 짐은 쉽게 짐작된다. 하지만 〈정리 4〉의 내용은 여기서 더 나아가, 위험다각화의 관점에서 $\rho > 0$은 하나의 충분조건일 뿐 결코 필요조건이 되지 못함을 말해 준다. 즉, $\rho < 0$인 경우, 즉 순수위험과 투자위험의 크기가 서로 반대 방향으로 움직이는 성향이 있으면 두 위험이 동시에 포트폴리오 안에 존재하는 경우 포트폴리오의 전체 위험은 더욱 악화될 수도 있다. 하지만 그런 중에도 $-\dfrac{\sigma_{RL}}{\sigma_L^2} < \dfrac{\mu_R - R_f}{PR_f - \mu_L} < -\dfrac{\sigma_R^2}{\sigma_{RL}}$의 조건이 충족되면 보험계약자에게는 위험자산투자에의 인센티브가 여전히 존재하고 또 그와 함께 일부 혹은 전부의 순수위험을 함께 보유할 동기가 부여된다. 요컨대, 재산 및 배상손실위험에 노출된 잠재적 보험계약자는 그의 포트폴리오 안에 새로이 투자위험을 끌어들이고 동시에 일부의 위험을 보험으로 전가함으로써 포트폴리오의 효율성을 높일 수 있는 것이다.

2. 최적보험과 최적투자 간의 관계

이번엔 끝으로 최적보험과 최적투자 간에 성립되는 일정 관련식을 유도해 보기로 한다. 우리는 1차조건의 식 (II-15)와 (II-16)으로부터, $a^* > 0$인 경우 최적투자 a^*는 보험계약자의 위험회피계수 $k(>0)$의 증가함수가 되고[11], 한편 최적보험의 경우 일부보험($b^* < 1$)에서 b^*는 k의 감소함수가 됨을 쉽게 확인할 수 있다[12]. 부연하면, 위의 조건하에서 위험회피계수 k가 증가할 때, a^*는 증가하고 동시에 b^*는 감소하게 되는데, 이들 a, b의 증감에는 일정한 함수관계가 존재하게 된다. 다음 〈정리 5〉는 이 내용을 요약해 준다.

〈정리 5〉

> 보험계약자가 순수위험과 투자위험을 동시에 보유하는 경우,
> 최적투자와 최적보험은 음(-)의 기울기를 가진 직선관계에 있다. 즉,
>
> $$b^* = 1 - \frac{(\mu_R - R_f)\sigma_{RL} + (PR_f - \mu_L)\sigma_R^2}{(\mu_R - R_f)\sigma_L^2 + (PR_f - \mu_L)\sigma_{RL}} \cdot a^*$$

(증명) 식 (II-15)와 식 (II-16)에서 k를 소거하면 〈정리 5〉의 방정식이 유도된다. 이 방정식에서, 기울기의 분자가 양(+)이 되는 조건은 〈정리 2〉의 $a^* > 0$의 조건과 일치하고, 또한 기울기의 분모 역시 양(+)이 되는 범위는 바로 〈정리 3〉의 $b^* < 1$의 필요충분조건이 된다. 따라서 $a^* > 0$ 그리고 $b^* < 1$의 조건이 충족되는 범위에서 〈정리 5〉의 방정식은 엄격한 음(-)의 기울기를 가진다. Q.E.D.

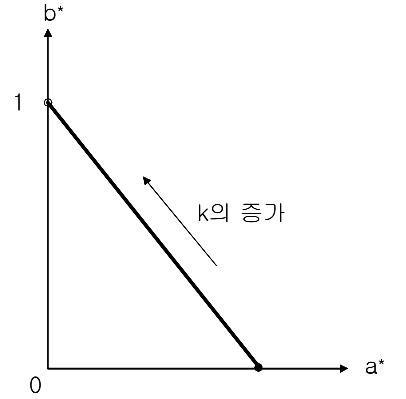
물론 〈정리 5〉의 충분조건은, 〈정리 4〉의 표현을 빌려서 언급하면, $\rho \geq 0$ 또

11) 즉, 〈정리 2〉에 의해 $\rho > -\dfrac{(\mu_R - R_f)\sigma_L}{(PR_f - \mu_L)\sigma_R}$ 인 경우를 의미한다.

12) 이 조건은 〈정리 3〉에 의해 $\rho > -\dfrac{(PR_f - \mu_L)\sigma_R}{(\mu_R - R_f)\sigma_L}$ 과 동등한 내용이 된다.

는 $-\dfrac{\sigma_{RL}}{\sigma_L^2} < \dfrac{\mu_R - R_f}{PR_f - \mu_L} < -\dfrac{\sigma_R^2}{\sigma_{RL}}$를 충족하는 $\rho < 0$의 조건을 의미한다. 한편, 〈정리 5〉에서 음(-)의 기울기를 1차 방정식은 $a^* < 0$(공매투자) 그리고 $b^* > 1$(초과보험)이 동시에 충족되는 범위에서도 성립되지만, 공매투자와 초과보험은 우리 논문의 관심 밖의 범위이므로 여기서는 논의를 생략한다. 우리는 이제 〈정리 5〉의 내용을 다음 〈그림 5〉로 표현할 수 있겠다.

〈그림 5〉 최적투자 a^*와 최적보험 b^*의 관련식



$\rho \geq 0$ 또는 $-\dfrac{\sigma_{RL}}{\sigma_L^2} < \dfrac{\mu_R - R_f}{PR_f - \mu_L} < -\dfrac{\sigma_R^2}{\sigma_{RL}}$를 충족하는 $\rho < 0$인 경우 (즉, $a^* > 0$ 그리고 $b^* < 1$인 경우) 최적투자 a^*와 최적보험 b^*의 관련식:

$$b^* = 1 - \frac{(\mu_R - R_f)\sigma_{RL} + (PR_f - \mu_L)\sigma_R^2}{(\mu_R - R_f)\sigma_L^2 + (PR_f - \mu_L)\sigma_{RL}} \cdot a^*$$

II장에서 우리는 CARA 효용함수와 정규분포를 가정하는 기대효용모형은 우리의 평균분산모형과 동일한 의사결정기준을 산출한다고 했다. 예컨대, 우리는 CARA 효용함수에서 즉 $u(w) = -e^{Kw}$인 경우, K는 Arrow-Pratt의 절대위험회피도를 뜻하는데, CARA 효용함수에서 K의 증가는 바로 우리의 모형에서 k의 증가를 의미한다. 우리는 〈그림 5〉로 부터 이런 k의 증가는 음(-)의 기울기를

지닌 직선 상에서 각각 a^*의 감소 및 b^*의 증가로 연결됨을 확인할 수 있다. 한편 우리는 〈정리 5〉의 내용을 보험계약자의 초기 부 w와 연관시켜 해석할 수도 있다. 외견상, 최적투자 및 최적보험의 식 (II-15)와 식 (II-16)에는 보험계약자의 초기 부 w가 반영되지 않은 것처럼 보인다. 하지만 우리는 다음과 같이 보험계약자의 위험회피도 k를 초기 부 w의 함수로 생각할 수 있다. 즉, 부(wealth)가 증가할수록 보험계약자의 위험회피도가 감소한다고 가정하면(즉, $k'(w) < 0$), 다른 조건이 일정할 때, w의 증가는 k의 감소로 이어진다. 따라서 이 때, 〈정리 5〉에서 제시된 1차식의 방향을 따라, 최적투자 a는 증가하고 최적보험 b는 감소하게 된다. 물론 위험회피도 k가 w와 무관(無關)하면 최적투자와 최적보험은 w의 증감에 영향을 받지 않게 되며, 부의 증가에 보험계약자의 위험회피도도 함께 증가하는 경우는(즉, $k'(w) > 0$), w의 증가에 따라, 〈그림 5〉에서 처럼, 최적투자 a는 감소하고 최적보험 b는 증가한다.

VI. 요약 및 맺음말

우리의 논문에서 보험과 투자는 서로 보완적 그리고 경쟁적 관계에서 포트폴리오의 위험성과 수익성을 개선하고 있다. 특히 우리는 투자의 홈메이드 보험 역할을 강조했고, 또한 Mossin (1968)의 결과를 보다 일반화시켜 양(+)의 값을 가지는 부가보험료를 전제로 보험계약자가 일부보험 및 전부보험을 선택하는데 요구되는 필요·충분조건을 유도했다.

물론 우리의 논문은 평균·분산모형을 적용했다는 제약점을 갖고 있다. 하지만 평균·분산모형은 분석이 용이하다는 큰 장점도 있다. 일반 기대효용모형에서는 우리의 논문에서와 같은 명쾌한 연구결과를 기대하기는 어렵다. 특히 순수위험과 투자위험간의 상호의존성이 있는 일반 기대효용모형의 경우, 우리와 같은 비교정태분석은 현재까지는 거의 수행되지 못하고 있다. 무엇보다 아직 두 위험 간의 상호의존성을 측정하는 수단들이 충분히 개발되어 있지 않기 때문이다.

끝으로, 기대효용모형과 비교해, 본논문에서 평균·분산모형을 적용해 유도한

결과들의 문제점 및 오해가능성에 관해 간단히 언급하면서 본 논문을 마무리하기로 한다. 머리말에서도 이미 서술된 바와 같이, 평균·분산모형은 분석이 편리하다는 장점이 있지만, 그 결과가 기대효용모형의 분석 결과와 차이를 보일 가능성도 있다. 실제로 이런 경우는 드물지만 내포된 위험성의 확률분포 모양이 정규분포에서 크게 벗어날 때 발생할 수도 있는 것이 사실이다. 예컨대, 상호배타적인 두 선택사항 A안과 B안이 있을 때, 평균·분산모형에서는 일률적으로 A안을 선택하지만, 기대효용모형을 적용하는 경우 그 위험선호도의 형태(risk preference)에 따라 DARA는 A안, 그리고 IARA는 B안을 선택할 수 있다. 물론 이런 차이가 발생하는 경우 우리는 기대효용모형의 결과를 따르는 것이 합당하다. 정리하면, 평균·분산모형에서 발생할 수 있는 이런 문제점들은 각 확률변수가 정규분포를 하지 않기 때문인 것으로 요약될 수 있겠다. 위의 예에서도 만약 정규분포가 전제가 되었다면, 평균·분산모형이 A안을 선택하는 경우, 기대효용모형에서도 DARA 및 IARA 모두 A안을 선택하는 결과를 산출한다. 요컨대, 우리의 분석모형에서도 순수위험과 투자위험이 모두 정규분포를 한다고 가정하면 우리가 유도한 모든 연구결과들은 보다 일반적인 기대효용모형의 결과와 완전히 일치하게 된다. 우리는 평균·분산모형으로 분석한 이 논문의 연구결과가 일반 기대효용모형을 보완할 것으로 기대한다.

참고문헌

이영기·남상구(역), 투자론 제5판 (Bodie, Z., Kane, E., and Marcus, A. J., *Investments*, 5th ed.), 도서출판 석정, 2006.

Arrow, K. J., *Essays in the Theory of Risk Bearing*, Amsterdam: North Holland, 1970.

Briys, E., Kahane, K., and Kroll, Y., "Voluntary Insurance Coverage, Compulsory Insurance, and Risky-riskless Porfolio Opportunities", *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 55, No. 4, 1988, pp.713-722.

Doherty, Neil A., "Efficient Insurance Buying Strategies for Portfolios of Risky Assets", *Journal of Risk and Insurance,* 51, 1984, pp.205-224.

Doherty, Neil A. and Harris Schlesinger, "The Optimal Deductible for an Insurance Policy When Initial Wealth is Random", *Journal of Business,* 1983, pp.555-565.

Eeckhoudt, L., and Gollier, C., Risk Evaluation, *Management and Sharing,* Harvester Wheatsheaf, 1995, pp.39-63.

Eeckhoudt, L., Meyer, J., and Ormiston, M. B., "The Interaction between the Demands for Insurance and insurable Assets", *Journal of Risk and Uncertainty*, 14, 1997, pp.25-39.

Eeckhoudt, L., and Venezian, E., "Insurance Purchases When the Level of Investment in a Risky Asset is Endogenously Determined", Unpublished Manuscript, 1990.

Huang, C. and R. H. Litzenberger, "Chapter 1 Preferences Representation and Risk Aversion," *Foundations for Financial Economics*, North Holland, 1988, pp.1-37.

Kahane, K., and Kroll, Y., "Optimal Insurance Coverage in Situations of Speculative Risk and the Risk-free Asset", *Insurance: Mathematics and Economics*, 4, 1985, pp.191-199.

Leland, H. E., "Theory of the Firm Facing Uncertain Demand", *American Economic Review*, Vol. 62, 1972, pp.278-291.

Loubergé, H., and Watt, R., "Insuring a Risky Investment Project", *Insurance: Mathematics and Economics*, 42, 2008, pp.301-320.

MacMinn R. D., and Witt, R. C., "A Financial Theory of the Insurance Firm under Uncertainty and Regulatory Constraints", *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory,* 1987, pp.3-20.

Markowitz, Harry M., "Portfolio Selection", *Journal of Finance* 7, 1952, pp. 77-91.

Marshall, J. M., "Insurance as a Market In Contingent Claims: Structure and Performance", *The Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 5, No. 2, 1974, pp.670-682.

Mayers, D. and Smith, C. W., "The Interdependence of Individual Portfolio decisions and the Demand for Insurance", Journal of Political Economy, 1983, pp.304-311.

Meyer, J., "Two-Moment Decision Models and Expected Utility", *American Economic Review,* Vol. 77, 1987, pp.421-430.

Meyer, D, and Meyer, J., "A More Reasonable Model of Insurance Demand", in Aliprantis, C. D., et al. (Ed.), *Assets, Beliefs, and Equilibria in Economic Dynamics - Essays in honor of Mordecai Kurz*(Studies in Economic Theory, Vol. 18), Springer Verlag, Berlin, 2004, pp.733-742.

______, "A portfolio Model of Insurance Demand", Unpublished Manuscript, 2005.

Meyer, J. and Ormiston, M. B., "Demand for Insurance in a Portfolio Setting", *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 20, 1995, pp. 203-211.

Mossin, J., "Aspects of Rational Insurance Purchasing," *Journal of Political Economy*, 1968, pp.553-568.

Rothschild, Michael and Stiglitz, Joseph E., "Increasing Risk: I. A Definition," *Journal of Economic Theory*, Vol.2, No. 3, September 1970, pp. 225-243.

______, "Increasing Risk II: Its Economic Consequences," *Journal of Economic*

Theory 3, 1971, pp.66-84.

Schlesinger, H., "The Optimal Level of Deductiblity in Insurance Contracts," *Journal of Risk and Insurance*, 1981, pp.465-481.

______, "The Theory of Insurance Demand", in G. Dionne (Ed.), *The Handbook of Insurance*, Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000, pp. 131-151.

Schulenburg, J. M., "Optimal Insurance Purchasing in the Presence of Compulsory Insurance and Insurable Risks," *Geneva Papers on Risk and Insurance,* 1986, pp.5-16.

Sealey, Jr. C. W., Eric, "Deposit Rate-Setting, Risk Aversion, and the Theory of Depository Financial Intermediaries", *Journal of Finance,* Vol. 35, December 1980, pp.1139-1154.

Tobin, James, "Liquidity Preferences as Behavior Toward Risk", *Review of Economic Studies* 25, 1958, pp.65-87.

Zuasti, Jose S. Penalva, "A Study of the Interaction of Insurance and Financial Markets: Efficiency and Full Insurance Coverage", *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 75, No. 2, 2008, pp.313-342.

Abstract

We re-examine the demand for insurance by considering the case where the individuals are allowed to purchase risky assets as well as insurance coverage. In our model the individuals are exposed to both insurable risk and investment risk, and so the risky investment decision is made simultaneously with the insurance decision. Our analysis is based on mean-variance criterion, which leads to very intuitive results about insurance purchase. The results show that risky investment can be used for reducing the overall portfolio risk, holding the portfolio expected value fixed. This demonstrates that the risky investment plays an obvious role of home-made insurance, specified in Mayers-Smith (1983). Moreover, in contrast to Mossin (1968), it can be optimal for the individuals to purchase full insurance even when insurance premium is positively loaded. Mossin's results are reduced to be a special case in our model. We also identify conditions for Mossin's results to hold. We also derive many interesting and important results on interdependence between insurance and investment, which may not be possible for a general expected utility model in most cases.

※ **Key words:** comparative static results, demand for insurance, insurable risk, investment risk, mean-variance criterion