보험금융연구 제23권 제4호 (2012. 11) pp. 99-131

주가수익률 추정 모델 선택에 따른 변액 연금 최저보증준비금 분석

An Analysis on the Minimum Guarantee Reserves in Variable Annuities Using Different Stock Return Models

김 융 희* · 김 창 기**

Eyunghee Kim · Changki Kim

이 연구는 주식수익률 추정 모델의 선택이 변액연금의 최저보증준비금에 미치는 영향을 분석하였다. 1990년 1월 이후 KOSPI 로그수익률을 분석한 결과 우리는 이분산성과 변동성의 군집현상 그리고 레버리지 효과를 관찰하였으며 이러한 특성을 가장 잘 반영하는 모델을 찾기 위해 GBM, GARCH(1,1) 그리고 EGARCH(1,1) 모델들을 이용한 결과 EGARCH(1,1)이 최적의 모델이라는 것을 발견하였다. 시장의 불완전성 가정하에서 우리는 conditional Esscher transform을 이용해 GARCH-type 모델 사용 시 적합한 risk neutral measure를 구하고 몬테카를로 시뮬레이션을 이용해 최저보증준비금을 산출하였다. 그 결과 GBM과 GARCH(1,1)을 사용하면 EGARCH(1,1)을 사용 하는 것보다 낮은 수준의 최저보증준비금이 산출되었다. 즉 이 연구를 통해 우리는 적절한 최저보증준비금 산출을 위해서는 대상이 되는 기초자산의 수익률의 특성에 대한 분석이 선행되어야 하며 만일 이를 제대로 반영하지 않고 최저보증준비금을 산출한다면 과소추정의 문제가 발생될 수 있다는 점을 보였다.

국문 색인어: 변액연금, GARCH-type 모델, Geometric Brownian Motion, GMAB, conditional Esscher transform

한국연구재단 분류 연구분야 코드: B051608

* 고려대학교 경영학과 박사과정(honeyoong@korea.ac.kr), 주저자

** 고려대학교 경영학과 교수(changki@korea.ac.kr), 교신저자

논문 투고일: 2012. 08. 07, 논문 최종 수정일: 2012. 10. 18, 논문 게재 확정일: 2012. 11. 23

I. 서론

변액보험은 우리나라에 2001년 소개된 이래로 급속하게 발전해왔다. 변액보험의 발전을 이끈 원동력 중 하나는 최저급부 보증 옵션이다. 최저급부 보증 옵션은 펀드 성과에 따라 변동하는 변액보험 보험급부의 최저수준을 보장해 주는 역할을 하기 때문에 변액보험 가입자들은 높은 성과를 올릴 수 있는 기회를 가지면서 동시에 보유 위험을 일정 부분 헷지 할 수 있다. 따라서 최저급부 보증 옵션은 수익성뿐 아니라 안정적인 장기 투자를 원하는 많은 가입자들이 변액보험에 가입하게 하는 계기가 되었다.

이처럼 최저 금액 보장 옵션은 회사의 보험료 수입을 증진 시키는 역할을 해왔지만 펀드의 성과가 저조할 때 회사는 최저 금액 보장 옵션 제공에 따른 손실을 경험할 수 있다. 최저보장 옵션 제공으로 인한 비용 지출에 대비한 적립금인 최저보증준비금은 사망률, 중도 해지율 그리고 이자율 등 다양한 기초율의 영향을 받지만 그 중 가장 중대한 영향을 미치는 것은 주식 수익률이다. 따라서 적정 최저보증준비금을 산출하기 위해서는 현실의 위험을 제대로 반영할 수 있는 주식수익률의 추정이 중요하다.

주식수익률의 전통적인 추정 모형에서는 주식 수익률이 기하브라운운동(Geometric Brownian Motion: GBM)을 따른다고 가정하고 있으며 우리나라의 경우에도 최저보증준비금 평가를 위해 GBM을 가정하는 것이 일반적이다. 하지만 GBM 모형은 주식의 로그수익률이 정규분포를 따르며 평균과 분산이 일정하다는 강한 가정을 바탕으로 한다. 하지만 다수의 실증 연구들은 주식수익률의 변동성은 시간에 따라 변화하며(time varying volatility) 군집현상(volatility clustering)을 보인다는 사실을 발견하였다. 따라서 GBM 모델은 단기에는 합리적으로 주식수익률을 추정할 수 있다 하더라도 극단적인 주가의 움직임을 보일 수 있는 장기 주식수익률 추정에는 적합하지 않다. 뿐만 아니라 우리나라의 주식시장은 역사적으로 미국 등에 비해 높은 변동성을 보여 왔기 때문에 최저보증준비금 산출을 위해서는 주식수익률 변동성의 특징을 적절하게 반영하는 것이 특히 중요하다.

따라서 이 연구의 첫 번째 목적은 Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (GARCH) type 모델을 이용하여 국내 주가지수 데이터에서 실증적으로 보이고 있는 변동성의 시간에 따른 변화와 군집현상을 반영하는 것이다.

하지만 주식수익률이 GARCH-type 프로세스를 따르고 불완전 시장을 가정할 경우 최저금액보장 옵션 가격 산출 시 사용되는 equivalent martingale measure는 하나 이상 존재할 수 있다. 이 연구의 또 하나의 목적은 이러한 문제를 해결하기 위해 conditional Esscher transform을 이용해 적합한 martingale measure (Q measure)를 식별하는 것이다.

최저보증준비금을 산출하기 위해 기존 연구들은 다양한 수익률 추정 방법을 제시하여 왔다. 먼저 과거 데이터를 이용해 몇 개의 주요 경제 변수들의 확률론적 분포를 추정하고 이 변수들의 조합을 통해 시나리오를 구성하는 방식이 사용되었는데 이러한 방식들 중 가장 잘 알려진 것은 Wilkie 모델(Wilkie, 1986, 1995)이 있으며 Bolton et al.(1997)과 Boyle and Hardy(1997)은 Wilkie 모델을 이용해 변액 연금의 최저보증준비금을 추정하였다.

최저보증준비금 산출은 파생상품 프라이싱 기법을 적용하면서 더욱 발전해 왔다. 가장 전통적인 모델은 주식수익률이 GBM을 따른다는 가정하에 만들어졌는데 Boyle and Schwartz(1977)는 Black-Scholes 모델 (Black and Scholes, 1972; Merton,1973)을 이용해 최저보증준비금을 산출하였다. 하지만 보험의 만기는 장기이므로 GBM이 가정하고 있는 가정 특히 변동성이 일정하다는 가정은 다소 비현실적인 것으로 판단되었고 이를 극복하기 위해 다양한 방법이 제시되어 왔다. 그 중 Hardy(1999, 2001)은 확률론적 변동성(stochastic volatility)을 반영하기 위해 변동성이 여러 개의 고정 값 중 무작위로 한 개의 값을 취한다는 Regime Switching Model(RSLN)을 적용하였다.

주식의 확률론적 변동성을 반영하는 방법 중 가장 많이 사용되고 있는 방법 중 하나는 Engle(1982)이 제시한 Autoregressive Conditional Heteroskedastic(ARCH) 모델과 Bollerslev(1986)의 GARCH 모델인데 Hardy(2003)와 Hardy et al.(2006)은 ARCH와 GARCH뿐만 아니라 최저보증준비금 산출에 적용 가능한 다양한 수익률 추정

방법을 제시하였다.

국내에서는 엄영호·김계홍(2009), 권용재(2010) 그리고 김융희·김창기(2011)가 최저보증준비금 산출을 위해 GBM 모형을 가정하고 확률론적 시나리오 방식을 적용하였으며 노건엽(2012)은 로그노말 모형뿐 아니라 Hardy(2003)가 제시한 방법 중 AR(1), ARCH 그리고 RSLN2모형을 우리나라 데이터에 적용하여 각각의 경우 보증준비금을 추정하였다.

그러나 Balck(1976), Christie(1982), French et al.(1987), Nelson(1988) 그리고 Schwert(1990)는 실증 연구 결과 부정적인 사건은 긍정적인 사건보다 더 큰 변동성을 유발한다는 레버리지 효과(leverage effect)를 발견하였다. 이후 Pagen and Schwert(1990)과 Engle and Nq(1993)은 각각 미국의 S&P 500과 일본의 TOPIX Index를 이용해 ARCH, GARCH 그리고 EGARCH 등 모델의 수익률의 설명력을 비교한 결과 변동성과 과거 수익률 간의 비대칭적 연관성을 반영할 수 있는 Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic (EGARCH) 모델이 가장 적합한 결과를 보인다는 것을 증명하였으며 Nq et al.(2011)은 Nikkei 225 Index에서 레버리지 효과를 발견하고 최저보증 옵션을 산출에 EGARCH 모델을 적용하였다.

우리나라의 경우 김삼용·이용흔(2006)이 종합주가지수(Korea Composite Stock Price Index: KOSPI) 데이터를 이용 양과 음의 변동성이 대칭적임을 가정하는 GARCH type 모델보다 변동성의 비대칭을 가정하는 EGARCH 모델이 우수하다고 주장하였으며 옥기율·허화·천성진(2006) 역시 KOSPI데이터를 이용 GARCH, EGARAH, Asymmetric Power ARCH(APARCH), Glosten-Jagannathan-Runkle GARCH(GJR-GARCH) 등을 비교한 결과 EGARCH 모델의 적정성을 주장하였다.

1990년 1월 이후 KOSPI를 대상으로 한 이 연구에서 우리는 변동성의 특징 중 기존연구 결과에 따라 레버리지 효과에 주목하였다. 그 결과 1990년 이후 2012년 6월까지 KOSPI에서 레버리지 효과를 발견하였으며 모델의 적합성 검증을 통해 가장 적합한 모델은 EGARCH(1,1) 모델이라는 것을 증명하였다.

이러한 수익률 모델의 선택은 최저보증준비금의 크기에 영향을 미치는데 EGARCH 모델이 가장 적합함에도 불구하고 만일 다른 모델 즉, GBM이나

GARCH(1,1) 모델을 사용할 경우 최저보증준비금을 과대 추정할 수 있다는 것을 발견하였다.

앞서 언급하였듯이 이 연구의 목적은 국내 주가수익률의 특성을 분석하고 이를 가장 잘 반영할 수 있는 주식수익률 추정 모델을 선택한 후 적절한 martingale measure를 식별하여 최저보증준비금을 산출하는 것이다. 이를 위해 이 연구는 다음과 같이 구성되어 있다.

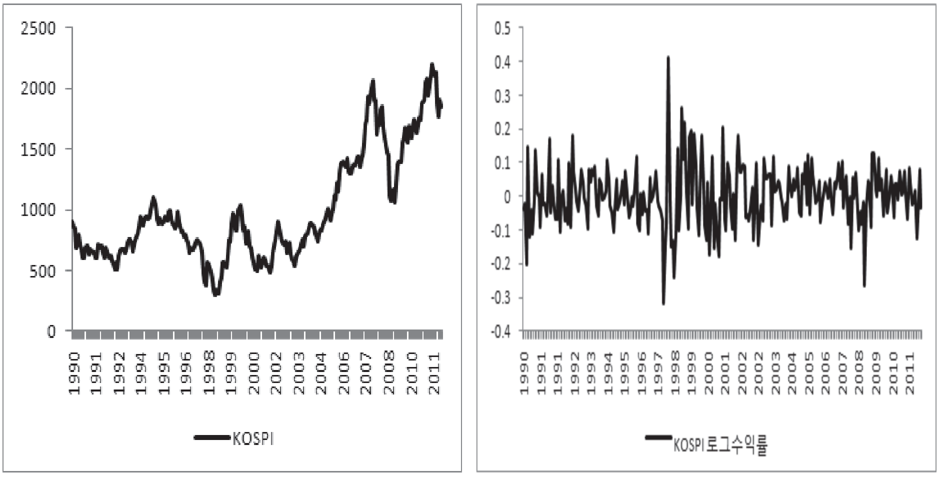
2장에서는 이 연구에 사용된 KOSPI 데이터의 추세를 살펴보고 특징을 분석한 후 KOSPI 데이터에 가장 적합한 모형을 선택하고 해당 모형의 모수를 추정할 것이다. 3장에서는 2장에서 채택된 모형을 이용해 최저보증준비금을 산출하기 위해 conditional Esscher transform을 이용해 적합한 Q-measure를 산출할 것이다. 이 후 4장에서는 대표적인 보증 옵션인 최저연금적립금 보증(Guaranteed Minimum Accumulation Benefit: GMAB)을 대상으로 최저보증준비금을 산출하고 로그수익률 추정 모델이 최저보증준비금에 미치는 영향을 살펴 볼 것이다. 5장에서는 로그수익률 추정 모델 이외에 최저보증준비금에 영향을 미치는 요인을 살펴볼 것이며 마지막으로 6장에서는 이 논문의 결론과 향후 연구 방향을 제시할 것이다.

II. 주가수익률 추정 모델

주가 수익률 추정은 과거 데이터의 분석을 통해 이루어진다. 이 연구에서는 지난 1990년 1월 이후 현재까지 우리나라의 가장 대표적인 주가지수인 KOSPI 데이터를 이용해 최적의 주식 투자 수익률 모델을 추정하려 한다. 다음 〈그림 1〉은 1990년 1월부터 현재까지 월말 기준의 KOSPI와 KOSPI 로그수익률을 보여준다.

주식수익률이 GBM을 따른다는 가정하에서는 주식의 로그수익률이 정규분포를 따라야 하며 평균과 분산은 일정해야 한다. 먼저 주식의 로그수익률이 정규분포를 따르는지 여부는 Jarque-Bara Test를 이용해 검증하였다. Jarque-Bara 통계량은 왜도와 첨도의 차이를 통해서 정규성을 검정하는 통계량으로 자유도 2인 카이

〈그림 1〉 KOSPI와 KOSPI 로그수익률



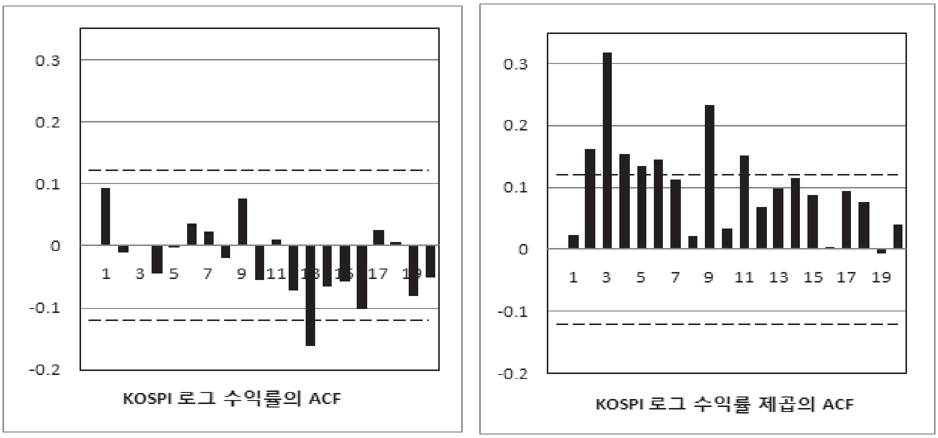
제곱 분포를 따른다. 자유도 2인 카이제곱 분포의 95% 임계치는 5.99이나 1990년 1월 이후의 KOSPI 로그수익률의 Jarque-Bera 값은 54.412로 (p값 0.00) 5.99를 초과해 KOSPI 로그수익률이 정규 분포를 따른다는 귀무가설은 기각되었다.

또한 〈그림 1〉의 두 번째 그래프를 보면 GBM이 가정하고 있는 동분산성(homoskedasticity)과는 달리 KOSPI 로그수익률의 변동성이 시간에 따라 상이하며 어떤 기간 동안 상당한 폭의 변동성을 보이다가 상대적으로 평온한 기간이 이어지는 변동성 군집현상을 보이는 것을 알 수 있다.

〈그림 1〉에서 또 하나의 주목할만한 현상은 수익률이 높을 경우 변동성과 주식 수익률이 낮을 경우의 변동성이 상이하다는 것이다. 이는 국내 KOSPI를 대상으로 한 기존 연구 뿐 아니라 미국의 S&P 500과 일본의 TOPIX와 Nikkei 225 Index에서 관찰되어 온 수익률의 변동성이 긍정적인 사건과 부정적인 사건에 다르게 반응한다는 레버리지 효과(leverage effect)이다.

주가지수 로그수익률의 특성을 보다 명확히 파악하기 위해서는 주가지수 로그수익률의 자기상관 여부와 분산의 군집현상을 확인할 필요가 있다. 〈그림 2〉는 주가지수 로그수익률과 로그수익률 제곱의 ACF(autocorrelation function)를 나타낸다.

〈그림 2〉 KOSPI 로그수익률과 로그수익률 제곱의 ACF



〈그림 2〉 첫 번째 그래프의 KOSPI 로그수익률의 ACF는 대부분의 경우 95% 신뢰도 구간 내에 존재함으로 로그수익률의 자기상관(autocorrelation)을 보이지 않았다. 하지만 두 번째 그래프에서 로그수익률 제곱의 ACF 값은 상당 부분 신뢰구간을 벗어나고 있는데 이는 주가지수 로그수익률이 이분산성(heteroskedasticity)을 보인다는 것을 의미한다.

이러한 결과는 〈표 1〉의 Ljung Box Pierce Q-Test에서도 확인할 수 있는데 먼저 KOSPI 로그수익률의 Ljung Box Pierce Q 테스트 결과를 보면 모든 lag에서 p 값이 5%를 초과해 로그수익률의 자기상관이 없다는 귀무가설을 기각할 수 없는 반면 KOSPI 로그수익률 제곱의 Ljung Box Pierce Q 테스트의 p값은 로그수익률의 변동성에 중대한 자기 상관 현상이 있음을 보여주고 있다.

〈표 1〉 KOSPI 로그수익률과 로그수익률 제곱의 Ljung Box Pierce Q-Test

KOSPI 로그수익률의 Ljung Box Pierce Q-Test					
Lag	1	5	10	15	20
P-value	0.132624	0.721842	0.824427	0.333034	0.316949
KOSPI 로그수익률 제곱의 Ljung Box Pierce Q-Test					
Lag	1	5	10	15	20
P-value	0.710703	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

따라서 우리는 일정한 분산을 가정하는 GBM이 아닌 주가지수 로그수익률의 이분산성을 반영할 수 있는 보다 정교한 모델이 필요하다. 이분산성을 반영할 수 있는 다양한 방법 중 가장 대표적인 모델은 GARCH-type 모델이다. GARCH-type 모델은 해당 확률변수의 조건부 분산을 모형화하고 예측하기 위해 고안된 모형으로 종속변수의 분산을 그 과거값과 독립 변수들의 함수로 표현한다[1].

Φ_{t-1}가 t-1 시점까지의 모든 정보를 포함한 정보 집합(information set)을 의미한다면 로그수익률의 조건부 분산 즉, $\sigma_t^2 = E\left[\epsilon_t^2 | \Phi_{t-1}\right]$ 의 GARCH(R,M) 모형은 다음과 같이 표현된다[2].

$$\sigma_t^2 = d + \sum_{i=1}^{R} \alpha_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{M} \beta_j \epsilon_{t-j}^2 \tag{1}$$

R은 GARCH 항의 차수를 그리고 M은 ARCH 항의 차수를 의미한다. 또한 α_i는 GARCH 항의 계수, β_j는 ARCH 항의 계수 그리고 d는 상수항을 나타낸다.

대부분의 경우 낮은 차수의 모델 즉, GARCH(1,1)으로 이분산성을 해결할 수 있으므로 KOSPI 로그수익률에 GARCH(1,1) 모형을 적용하여 보았다.

GARCH(1,1) 모형 적용 후 KOSPI 로그수익률과 로그수익률 제곱은 다음 〈그림 3〉에서 알 수 있다.

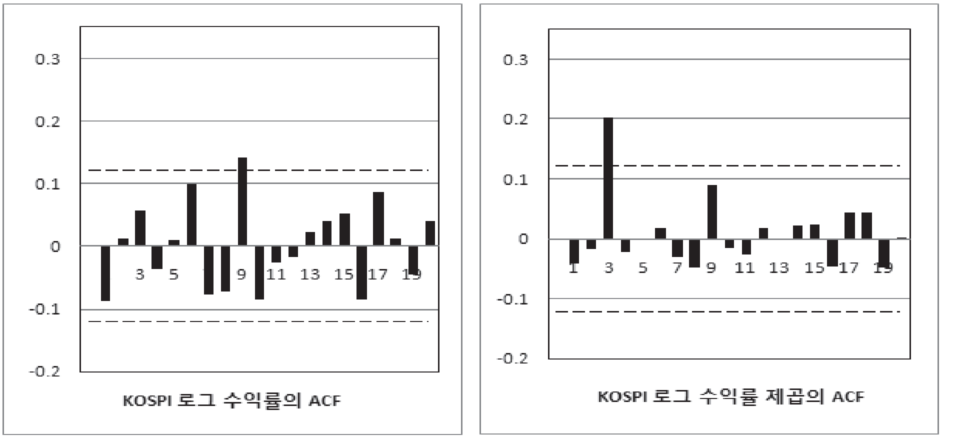
〈그림 3〉의 첫 번째 그래프를 보면 〈그림 2〉의 경우와 유사하게 KOSPI 로그수익률의 ACF 값이 대부분의 경우 95% 신뢰도 구간 내에 존재하는 것을 알 수 있다. 반면 GARCH(1,1) 적용 이후 로그수익률 제곱의 ACF 값을 나타내는 두 번째 그래프를 살펴보면 〈그림 2〉의 경우에 비교해 보다 많은 Lag에서 ACF 값이 신뢰구간 이내에 포함되었다. 이는 GARCH(1,1)이 주가지수 로그수익률 분산의 군집성을 어느 정도 반영할 수 있는 것을 의미한다. 하지만 여전히 일부 lag에서 ACF 값이 신

1) ARCH는 Engle(1982)에 의해 제시되었고, Bollerslev(1986)에 의해 GARCH(Generalized ARCH)로 일반화되었다.

2) 대상이 되는 변수 (y_t)는 다음과 같이 표현된다.

$$y_t = \mu + \epsilon_t$$
$$\epsilon_t = \nu_t \sigma_t \qquad \nu_t \sim N(0,1)$$

〈그림 3〉 GARCH(1,1) 적용 이후의 KOSPI 로그수익률과 로그수익률 제곱의 ACF



뢰구간을 벗어나 있어 GARCH(1,1)이 KOSPI 로그수익률 변동성의 특성을 완전히 반영한다고는 볼 수 없다.

이러한 결론은 〈표 2〉의 Ljung Box Pierce Q-Test의 결과와도 일치한다. GARCH(1,1) 적용 이후 KOSPI 로그수익률 제곱의 Ljung Box Pierce Q 테스트 결과를 보면 다수의 lag에서 p값이 5%를 초과해 자기상관이 없다는 귀무가설을 기각할 수 있었지만 일부 lag의 p 값은 5% 이하로 귀무가설이 기각 되었다[3].

〈표 2〉 GARCH(1,1) 적용 이후 KOSPI 로그수익률과 제곱의 Ljung Box Pierce Q–Test

KOSPI 로그수익률의 Ljung Box Pierce Q–Test					
Lag	1	5	10	15	20
P-value	0.154515	0.650539	0.084760	0.255881	0.267155
KOSPI 로그수익률 제곱의 Ljung Box Pierce Q–Test					
Lag	1	5	10	15	20
P-value	0.491137	0.040149	0.135512	0.416159	0.596791

요약하면 GARCH(1,1) 모델은 미래 로그수익률의 변동성을 추정하는데 있어 GBM의 등분산 가정의 비현실성을 일정부분 개선시켰으나 KOSPI 로그수익률의

3) Lag 3,4,5,6에서 p값이 5% 미만으로 귀무가설이 기각되었다.

특징을 반영하는 데에는 한계를 보였다.

앞서 〈그림 1〉에서 우리는 변동성이 수익률에 따라 비대칭적인 반응을 보이는 레버리지 효과를 관찰한바 있다. 따라서 이러한 결과는 GARCH 모델의 양과 음의 변동성이 대칭 가정에 기인할 수 있다. 이를 입증하기 위해 우리는 GARCH family 중 레버리지 효과를 반영할 수 있는 대표적인 모델의 사용을 고려하였다. 레버리지 효과를 반영할 수 있는 모델은 EGARCH뿐 아니라 Quadratic GARCH (QGARCH), Threshold GARCH(TGARCH), Asymmetric Power ARCH(APARCH) 그리고 Glosten-Jagannathan-Runkle GARCH(GJR-GARCH) 등이 있으나 우리는 이 중 가장 인기있는 모델이며 기존 연구에 의해 우수성이 입증된[4] Nelson(1991)의 EGARCH 모형을 이용해 변동성의 비대칭적 특징을 반영하려고 시도하였다.

EGARCH(P,Q) 모델에서 조건부 분산의 로그값은 다음과 같은 식으로 표현된다.

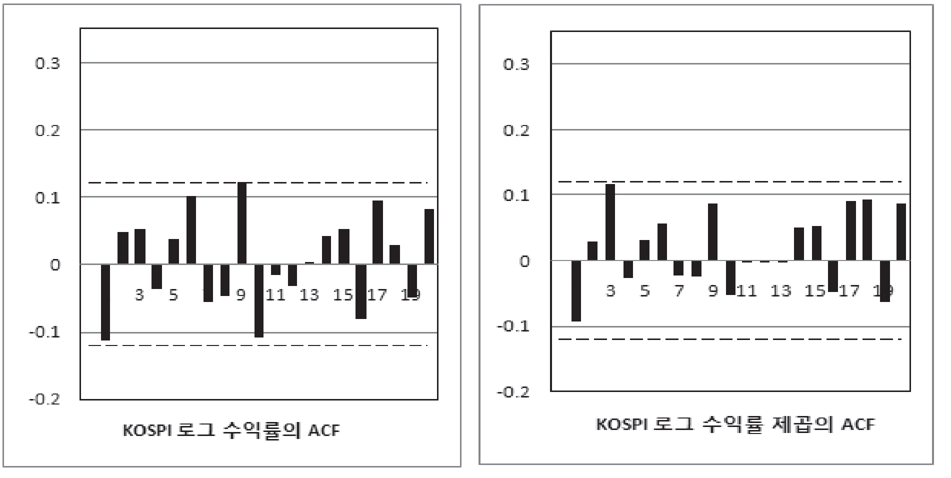
$$\ln\sigma_t^2 = d + \sum_{i=1}^{P}\alpha_i \ln\sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{Q}\beta_j\left[\frac{|\epsilon_{t-j}|}{\sqrt{\sigma_{t-j}^2}} - E\left(\frac{|\epsilon_{t-j}|}{\sqrt{\sigma_{t-j}^2}}\right)\right] + \sum_{j=1}^{Q}\gamma_j\frac{\epsilon_{t-j}}{\sqrt{\sigma_{t-j}^2}} \qquad (2)$$

α_i는 GARCH 효과를 나타내고 β_j는 조건부 분산의 지속성(ARCH 항)을 나타내는 반면 γ_j는 레버리지 효과를 측정한다. 만일 γ_j가 0이라면 변동성의 비대칭적 반응은 존재 하지 않으나 $\gamma_j < 0$ 일 경우에는 긍정적인 충격은 부정적인 충격에 비해 낮은 변동성을 유발하며 반대로 $\gamma_j > 0$이라면 오히려 긍적적인 충격이 상대적으로 변동성을 높인다는 것을 의미한다.

KOSPI 로그수익률에 EGARCH(1,1) 적용 시 ACF 값은 다음 〈그림 4〉에서 볼 수 있다.

4) EGARCH 모델은 여러 논문에서 주식수익률의 변동성을 예측하기 위해 사용되었다 (Brandt and Jones(2006), Cumby et al.(1993)). 우리나라의 경우에도 옥기율･허화･천성진(2006)은 이 연구와 유사한 기간(1990년 1월부터 2005년 9월)까지의 KOSPI를 대상으로 수익률 분산의 비대칭적 변화를 반영할 수 있는 모델 중 EGARCH, APARCH, GJR-GARCH 등을 비교한 결과 EGARCH 모델이 가장 적합함을 입증하였다.

〈그림 4〉 EGARCH(1,1) 적용 이후의 KOSPI 로그수익률과 로그수익률 제곱의 ACF



〈그림 4〉의 두 번째 그림은 로그수익률 제곱의 ACF 값이 모든 lag에 있어서 신뢰구간 내에 위치하고 있다는 것을 보여주는데 이는 KOSPI 로그수익률에 EGARCH(1,1)을 적용한 경우 GBM을 가정하거나(그림 2) GARCH(1,1)을 적용한 경우(그림 3)에 비해 로그수익률의 이분산성이 보다 적합하게 반영된다는 것을 나타낸다.

〈표 3〉의 Ljung Box Pierce Q-Test 결과 역시 모든 lag의 p값이 10% 유의 수준에서 귀무가설을 기각할 수 없어 1990년 1월 이후 KOSPI를 대상으로 분석할 경우 EGARCH(1,1) 모델이 가장 적합한 모형이라는 주장을 지지하고 있다. 한편 데이터가 사용된 기간과 최종모델과의 연관성을 검토하기 위해 1990년 이후 2012년 6월까지뿐 아니라 2000년과 2005년 이후 데이터를 이용해 모델 적합성을 검증하였다. 그 결과 2000년 이후 데이터 사용 시 여전히 레버리지 효과로 인해 EGARCH가 가장 적합하였으나 2006년 이후 단기 데이터 사용 시 GBM 혹은 GARCH(1,1) 사용이 적합한 것으로 판명되었다.

따라서 이 연구에서 최종적으로 사용된 모델은 EGARCH(1,1)으로 추정된 모수들은 다음〈표 4〉와 같다[5].

〈표 3〉 EGARCH(1,1) 적용 이후 KOSPI 로그수익률과 제곱의 Ljung Box Pierce Q-Test

KOSPI 로그수익률의 Ljung Box Pierce Q-Test					
Lag	1	5	10	15	20
P-value	0.138491	0.360723	0.074448	0.230557	0.169577
KOSPI 로그수익률 제곱의 Ljung Box Pierce Q-Test					
Lag	1	5	10	15	20
P-value	0.125593	0.243273	0.377740	0.661211	0.397386

〈표 4〉 EGARCH(1,1) 모형의 모수

모수	추정값	표준편차	t 값	p 값
d	-0.4956	0.1946	-2.5466	0.0109
α	0.1802	0.0803	2.2431	0.0249
β	0.9315	0.0299	31.1296	0.0000
γ	-0.1686	0.0407	-4.1431	0.0000

우리는 비교를 위해 EGARCH(1,1)뿐 아니라 GBM과 GARCH(1,1) 적용 시 모수들을 추정하였다. GBM 가정 시 KOSPI 로그수익률의 월 평균은 0.276%이고 월 분산은 0. 758%였으며 GARCH(1,1) 적용 시 추정된 모수는 다음 〈표 5〉에 나타나있다.

〈표 5〉 GARCH(1,1) 모형의 모수

모수	추정값	표준편차	t 값	p 값
d	0.0005	0.0003	7.7620	0.0781
α	0.1140	0.0416	2.7423	0.0061
β	0.8203	0.0721	11.3805	0.0000

5) $\ln\sigma_t^2 = -0.4956 + 0.1802 \times \ln\sigma_{t-i}^2 + 0.9315 \times [\frac{|\epsilon_{t-j}|}{\sqrt{\sigma_{t-j}^2}} - E(\frac{|\epsilon_{t-j}|}{\sqrt{\sigma_{t-j}^2}})] - 0.1686 \times \frac{\epsilon_{t-j}}{\sqrt{\sigma_{t-j}^2}}$

III. Risk Neutral Measure (Q-measure)

이 연구에서 산출하는 대상은 변액연금 보증 옵션 즉 사망 시에 최저사망보험금을 보증해주는 GMDB(Guaranteed Minimum Death Benefit)와 역시 실적과 무관하게 연금 개시 시점 생존 시 최저한도의 계약자 적립금을 보장해 주는 최저연금적립금 보증(GMAB: Guarnateed Minimum Accumulation Benefit)이다. 이러한 보증옵션의 가격은 가입자의 생존율과 연관되어 산출되는데 생존율은 시장에서 거래되지 않기 때문에 (non-tradable) 시장에서 거래되는 자산들의 포트폴리오 구성을 통해 관련 위험을 헷지할 수 없다. 따라서 이 연구에서는 변액연금 보증 옵션 산출을 위해 불완전 시장을 가정하였다.

시장의 완전성 가정하에서는 오직 하나의 risk neutral measure(Q-measure)가 존재하며 옵션의 가치는 단지 만기 시점 옵션 수익(payoff)을 risk neutral measure를 이용하여 기댓값을 구하고 할인한 기대현가로 표현된다. 반면 시장이 불완전하다면 한개 이상의 risk neutral measure가 존재할 수 있기 때문에 옵션의 가격이 유일하게 결정되지 않을 수 있다. 따라서 경제적으로 일관성있고 타당한 최저보증준비금 산출을 위해서는 equivalent martingale measure의 식별이 선행되어야 한다.

Equivalent martingale measure의 식별 방법은 다수의 연구자들에 의해서 제시되어왔는데 보험 분야에 사용되는 대표적인 방법 중 하나는 Esscher(1932)에 의해 소개된 Esscher transform이다.

Buhlman et al.(1996)은 Esscher transform을 확률론적 과정에 일반화하여 conditional Esscher transform을 소개하였고 이후 conditional Esscher transform은 다수의 연구에 이용되었는데 Siu et al.(2004)은 기초자산 수익률이 GARCH 모형을 따른다는 가정하에 conditional Esscher transform을 이용해 파생상품의 가치를 평가하였다.

이 연구에서 우리는 Siu et al.(2004)의 연구 결과에 따라 불완전시장 가정하에서 conditional Esscher transform을 이용하여 equivalent martingale measure를 식별하였다[6].

먼저 (Ω, F, P)를 완전한 확률 공간이라고 하면 여기서 P는 P-measure (data-generating probability measure)를 의미한다. 또한 모든 경제적 행위가 t시점 ($t \in \tau$)[7)]에 발생한다고 가정할 경우 $\Phi = \{\Phi_t\}_{t \in \tau}$ 는 각 t시점까지의 (t 시점 포함) 모든 시장 정보 집합을 의미한다[8)].

KOSPI 로그수익률이 EGARCH(1,1) 또는 GARCH(1,1)을 따른다고 가정할 경우 P-measure 하에서 로그수익률 (Y_t)는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$Y_t | \Phi_{t-1} \sim N(\mu_t, \sigma_t^2) \tag{3}$$

식 (3)에서 평균 μ_t값은 로그수익률의 ACF와 Ljung Box Pierce Q-Test 결과 KOSPI 로그수익률에서는 자기 상관을 찾을 수 없었으므로 상수 즉, $\mu_t = c$ 로 가정할 수 있는 반면 조건부 분산($\sigma_t^2 = E\left[\epsilon_t^2 | \Phi_{t-1}\right]$)은 GARCH(1,1) 혹은 EGARCH(1,1) 모델을 적용해 식 (1)과 식 (2)로 표현될 수 있다[9)].

$Z_0 = 1$ 인 sequence $\{Z_t\}_{t \in \{0,1,\dots,T\}}$ 를 고려하여 t ($t \ge 1$)시점의 Z_t 를 다음과 같이 정의하자.

$$Z_t = \prod_{k=1}^{t} \frac{e^{\lambda_k Y_k}}{E(e^{\lambda_k Y_k} | \Phi_{k-1})} \tag{4}$$

Buhlmann et al.(1996)에 따르면 주어진 상수 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$ 하에서 Z_t 는 martingale 이다.

---

6) 불완전 시장 가정에서는 다수의 해가 존재하는데 conditional Esscher transform을 사용하여 식별한 equivalent martingale measure를 이용할 경우 그 중 하나의 해를 산출할 수 있다. Siu et al.(2004)의 연구 이외에도 기존 연구들은 시장의 불완전 가정하에서 해를 찾기 위해 다양한 방법들을 제시하였는데 Schweiser(1996)는 헷징 손실의 분산을 최소화하는 equivalent martingale measure를 식별하였으며 Davis(1997)는 전통적인 경제학적 접근으로 한계대체율(marginal rate of substitution)을 이용하여 불완전 시장 가정 하에서 가능한 해를 구하였다.

7) τ가 시간의 집합 $\{0,1,2,\dots,T\}$을 의미한다.

8) 만기 시점 T의 정보집합 $\Phi_T = F$이다.

9) t-1 시점까지 모든 시장의 정보를 바탕으로 추정된 t 시점의 조건부 분산과 평균은 랜덤 B값이 아니다.

P_t를 t시점의 정보 집합 Φ_t에 대한 P-measure라고 가정하면[10] Z_t가 martingale 이기 때문에 우리는 다음을 만족하는 Q-measure 즉, $\{Q_t\}_{t\in\{0,1,\ldots,T\}}$, $Q_T = Q$와 표본공간 (Ω,Φ)를 찾을 수 있다.

$$dQ_t = Z_t dP_t, \quad Q_t = Q_{t+1}|\Phi_t \tag{5}$$

A를 Borel set 그리고 $I_{\{Y_t\in A\}}$를 이벤트 $\{Y_t\in A\}$를 표시하기 위한 지표함수 (indicator function)라고 하면 다음 식 (6)의 조건부 분포를 conditional Esscher transform이라 한다.

$$Q_t(Y_t\in A|\Phi_{t-1}) = E_{P_t}[I_{\{Y_t\in A\}}\frac{e^{\lambda_t Y_t}}{E_{P_t}(e^{\lambda_t Y_t})}|\Phi_{t-1}] \tag{6}$$

A를 (-∞, y)로 대체하면 우리는 Φ_{t-1}하에서 다음과 같은 Y_t의 Q-measure 분포를 구할 수 있다.

$$F_{Q_t}(y|\Phi_{t-1}) = \frac{\int_{-\infty}^{y} e^{\lambda_t x} dF_{P_t}(x|\Phi_{t-1})}{E_{P_t}(e^{\lambda_t Y_t}|\Phi_{t-1})} \tag{7}$$

따라서 Q measure하에서 조건부 Y_t $(Y_t|\Phi_{t-1})$의 적률생성함수(moment generating function)는 다음과 같이 주어진다.

$$E_{Q_t}(e^{Y_t z}|\Phi_{t-1}) = \frac{E_{P_t}\left[e^{Y_t(z+\lambda_t)}|\Phi_{t-1}\right]}{E_{P_t}\left[e^{Y_t(\lambda_t)}|\Phi_{t-1}\right]} \tag{8}$$

P-measure 하에서 $Y_t|\Phi_{t-1} \sim N(\mu_t,\sigma_t^2)$이기 때문에 식 (8)을 통해 우리는 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$E_{Q_t}(e^{Y_t z}|\Phi_{t-1}) = e^{(\mu_t+\sigma_t^2\lambda_t)z+\frac{1}{2}\sigma_t^2 z^2} \tag{9}$$

10) 만기 T 시점의 P-measure는 $P_T = P$ 이다.

식 (9)에 의하여 다음 식이 성립한다.

$$E_{Q_t}(e^{Y_t}|\Phi_{t-1}) = e^{\mu_t + \sigma_t^2\lambda_t + \frac{1}{2}\sigma_t^2} \tag{10}$$

Q-measure가 equivalent martingale measure 이기 위해서는 다음 식 (11)을 만족시키는 λ_t^q를 찾아야 한다.

$$E_{Q_t}(e^{Y_t}|\Phi_{t-1}) = e^r\ ,\ r = \text{ 무위험이자율} \tag{11}$$

따라서 식 (11)을 만족시키는 λ_t^q 값은 다음과 같이 결정된다.

$$\lambda_t^q = \frac{r-\mu_t}{\sigma_t^2} - \frac{1}{2},\ t = 1,2,\dots,\ T \tag{12}$$

한편 식 (12)를 식 (9)에 대입하면 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$E_{Q_t}(e^{zY_t}|\Phi_{t-1}) = e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_t^2)z + \frac{1}{2}\sigma_t^2 z^2} \tag{13}$$

즉, conditional Esscher transform의 모수를 식 (12)와 같이 선택한다면 조건부로그수익률 $Y_t|\Phi_{t-1}$는 equivalent martingale measure Q 하에서 평균 $r-\frac{1}{2}\sigma_t^2$, 분산 σ_t^2의 정규분포를 따르게 되는 것이다[11].

11) P-measure하에서 $Y_t|\Phi_{t-1} \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$ 였던 분포는 Q-measure하에서 $Y_t|\Phi_{t-1} \sim N(r-\frac{1}{2}\sigma_t^2, \sigma_t^2)$ 분포를 따르게 된다.

IV. 변액연금 최저보증준비금의 산출

변액보험은 고객이 납입한 보험료 중 일부를 모아 펀드(기금)를 조성한 후 우량 주식과 우량채권 등 유가증권에 투자하여 발생한 이익을 배분하여주므로 보험급부가 변동하는 실적배당형 보험을 말한다. 이러한 변액보험은 1956년 네덜란드에서 프랙션(fraction) 보험이라는 이름으로 최초 개발되었으나 본격적인 발전은 미국에서 이루어졌다.

미국 시장에서 변액보험을 도입한 시기는 1976년으로 변액보험은 70년대 저금리와 고물가하에서 보험금의 실질가치가 하락한 정액형 보험의 대안으로 등장하게 되었고 이후 90년대 저금리와 주식시장의 지속적인 활황과 더불어 본격적으로 활성화되었다.

우리나라 역시 변액보험이 2001년 도입된 이후 미국과 유사한 환경적 요인으로 인해 비약적으로 발전해왔다.

변액보험 시장의 발전은 〈그림 5〉의 변액보험 수입보험료 규모 증가에서 알 수 있다[12].

특히 변액보험 시장의 발전에 영향을 미친 것은 대중들의 주식투자에 대한 관심 증가이다. 변액보험 도입 이후 금융 위기 기간을 제외하고는 주식시장은 꾸준한 성장세를 보여 왔으며 직접 투자뿐 아니라 전문회사에 의해 운용되는 뮤추얼 펀드(mutual fund)의 발전으로 인해 보다 많은 사람들이 주식투자 상품에 가입하게 되었다. 이러한 환경적 요인은 장기 투자 상품의 성격을 가진 변액보험의 급속한 성장에 기여하였다[13].

이러한 변액보험의 판매 증가를 가져온 것은 주식시장의 활황으로 대표되는 거시 경제적 변수뿐만이 아니다. 변액보험상품은 소비자의 만족도를 높이기 위해

12) 변액보험을 판매하는 회사의 수 역시 증가했는데 2001년 12월 3개사였던 것에 비해 현재 대부분의 회사가 변액보험을 판매하고 있다. 변액보험 수입보험료 자료는 생명보험협회가 제공하는 보험회사의 재무제표를 참조하여 산출하였다.

13) 황진태･서대교(2010)는 거시경제 변수가 변액보험 초회보험료에 미치는 영향을 분석하였는데 변액보험 초회보험료가 KOSPI 지수의 충격에 항구적인 양의 반응을 보이는 것을 발견하였다.

〈그림 5〉 변액보험 수입보험료 규모

(단위: 백만 원)

다양한 옵션을 제공하고 있는데 그 중 대표적인 것이 최저급부 보장 옵션이다.

변액보험은 일반적으로 사망이나 연금 개시 등의 보험금 지급 요건 발생 시 보험계약자가 받는 급부의 최저금액을 보장해주는 최저급부 보장 옵션을 지니고 있다. 최저급부 보장 옵션은 변액보험 시장의 확대에 기여한 변액보험 고유의 제도이나 펀드의 성과가 낮을 경우에도 실제 성과와 무관하게 일정 금액을 보장해 주기 때문에 보험회사의 손실을 야기할 수 있다.

실제로 지난 2008년 금융 위기 때 주식 수익률은 하락하였고 이에 따라 많은 보험회사들이 최저보장준비금의 적정성에 높은 관심을 기울이게 되었다[14].

특히 변액보험 시장의 경쟁이 심화됨에 따라 일부 보험회사들은 점차 고수익이 가능하지만 위험 역시 높은 주식투자 비율이 높은 펀드를 개발하고 있으며 초기에 채권형 펀드에 대한 강한 선호를 보였던 가입자 역시 점차 주식형 펀드에 대한 선호를 높여감에 따라[15] 최저급부 보장 옵션을 제공함에 따르는 보험회사의 위

14) 2010년 3월 보험업 감독업무 시행 세칙에 변액보험 최저보증준비금에 대한 평가가 포함되었다.
15) 생명보험 협회가 제공하는 변액보험 펀드 총자산 데이터를 살펴 보면 여전히 채권형 펀드의 총자산이 주식형 펀드의 총자산을 초과하지만 2006년과 2011년을 비교할 경우 주가의 상승뿐 아니라 신규자금 투자로 주식형 펀드의 총자산은 증가해왔다.

험은 점차 커지고 있다.

최저급부 보장 옵션은 행사가격이 보장해주는 최저급부이고 행사시점이 급부지급 사건(사망, 연금 개시 등) 발생 시점인 풋옵션으로 이해될 수 있다. 옵션의 가격에 결정적인 영향을 주는 것은 기초자산의 변동성이기 때문에 적절한 최저보장준비금 적립을 위해서는 현실에서 나타나고 있는 주식수익률의 특성을 보다 잘 반영할 수 있는 주식수익률 모델이 필요하다.

주식수익률 추정모델이 최저보증준비금에 미치는 영향을 이해하기 위해 우리는 GBM 모델뿐 아니라 GARCH(1,1), EGARCH(1,1) 모델을 적용하여 각각의 경우 최저보증준비금을 산출하려 한다.

현재 우리나라 변액보험 시장에는 변액종신보험, 변액유니버셜 보험 등 다양한 변액보험 상품이 존재하지만 우리는 그 중 장기 투자 상품으로서의 특징을 가장 강하게 보이고 있는 상품인 변액연금의 최저급부보장 옵션을 대상으로 하였다[16].

변액연금이 제공하고 있는 최저급부보장 옵션은 특별계정의 운용실적과 무관하게 최저한도의 사망보험금을 최저사망보험금보증(GMDB)과 역시 실적과 무관하게 연금 개시 시점 최저한도의 계약자 적립금을 보장해 주는 최저연금적립금보증(GMAB)이 있다[17].

하지만 우리나라에서 판매되고 있는 대부분의 변액연금은 일정 금액의 사망보험가입금액을 설정하고 이에 따라 위험보험료를 부과하므로 GMDB보증 제공으로 인한 위험은 상대적으로 매우 작으며 주식수익률 추정 모델에 따라 산출된 GMDB보증준비금의 차이가 크지 않았다. 따라서 우리는 GMAB를 주요 대상으로 분석하였다.

GMAB보증준비금은 GMAB보증 제공으로 인한 기대손실의 현가와 회사가 부과하는 GMAB보증 비용의 기대 현가가 일치하는 지점에서 결정된다.

먼저 GMAB보증으로 인한 기대 손실의 현가는 다음과 같이 산출된다.

---

16) 변액연금은 지난 2007년 157만 명이 가입한 이래로 높은 성장률을 보여 왔으며 2010년 247만 명(전체 가구의 14%)이 가입하였다.

17) 이외에도 해약환급금의 일부를 보장해주는 GMWB(Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit) 등이 있다.

$$\sum_{s=1}^{N} \Pr(s) \times \max[M \times P - F(s,M), 0] \times {}_{\frac{M}{12}}p_x \times v_f^M \tag{14}$$

$\Pr(s)$ = 시나리오 s가 적용될 확률(1/N),

N = 사용된 시나리오의 수,

M = 연금 개시 시점까지의 총 월수,

P = 월납보험료,

$F(s,t)$ = 시나리오 s 에서의 t시점 계약자 적립금,

${}_{\frac{M}{12}}p_x$ = x세의 계약자가 x+M/12 시점까지 계약을 유지할 확률,

$v_f = \dfrac{1}{1+r_f}$, r_f = 월기준 무위험이자율.

회사는 GMAB 보증 손실을 충당하기 위해 계약자 적립금의 일정 비율로 GMAB 보증 비용을 부과하게 되는데 GMAB 보증 비용의 현가는 다음 산식을 이용하여 산출된다.

$$\sum_{s=1}^{N} \Pr(s) \sum_{t=0}^{M-1} p^{GMAB} \times F(s,t) \times {}_{\frac{t}{12}}p_x \times v_f^t \tag{15}$$

식(14)와 식(15)를 일치하게 하는 p^{GMAB}값이 GMAB 보증 비용율이다.

주식수익률이 GBM을 따른 다는 가정하에서 GMAB 보증 비용은 Black-Scholes 모델을 이용해서 산출할 수 있다[18]. 하지만 앞선 분석에서 우리는 지난 1990년 이후 KOSPI 로그수익률에 GBM 보다 GARCH-type 모델이 더 적합하다고 판단하였으므로 비교의 일관성을 위해 GBM, GARCH(1,1) 그리고 EGARCH(1,1)의 경우 모두 몬테카를로 시뮬레이션을 통해 GMAB 비용을 산출하였다.

18) Hardy(2003)는 다양한 최저급부 보장 옵션을 Black-Scholes 모형을 이용해 산출하였다.

몬테카를로 시뮬레이션 적용 방법은 다음과 같다.

1) Q-measure 하에서 10,000개의 주가지수 로그수익률 (Y_t)의 시나리오를 산출한다. 구체적으로 과정을 살펴보면 조건부 로그수익률의 분포 [$Y_t|\Phi_{t-1} \sim N(r - \frac{1}{2}\sigma_t^2, \sigma_t^2)$] 를 이용해 시나리오를 작성하는데 이때 σ_t^2 의 분포는 GARCH(1,1) 혹은 EGARCH(1,1) 적용에 따라 P-measure 하에서 식 (1)과 식 (2)를 통해 구해진다.

2) 각각의 시나리오s에 대해 매 시점 t의 적립금 $F(s,t)$ 이 산출되고 각각의 적립금하에서 GMAB 손실의 현가가 구해진다.

3) 각 시나리오하의 GMAB 기대 손실을 충당할 수 있는 p^{GMAB} 를 산출한다.

4) 1)-3)과 같은 과정을 반복한 결과 p^{GMAB} 의 분포를 얻게 되는데 이때 p^{GMAB} 평균 값이 우리가 찾는 GMAB 보증비용이다[19].

구체적으로 GMAB 보증비용을 산출하기 위해 다음과 같은 가정이 사용되었다.

- 가입자는 남성이며 연령은 45세 또는 55세이다.
- 연금 개시까지의 적립 기간은 10년 또는 15년이다.
- 6회 경험생명표를 사용하였으며 중도 해지는 없다고 가정하였다.
- 무위험 이자율은 5%를 가정하였다.
- 신계약비, 유지비와 수금비 그리고 펀드 운영비는 별도로 구분하지 않고 매년 계약자 적립금의 1.5%를 비용으로 차감하였다.
- 가입금액은 3천만 원이며 계약자는 월납 보험료로 3십만 원을 연금 개시직전까지 납입한다.

로그주식수익률을 GBM, GARCH(1,1) 그리고 EGARCH(1,1) 사용해 추정한 경우 GMAB 보증 기대 손실의 현가와 보증 비용율(p^{GMAB}) 산출 결과는 다음 〈표 6〉에서 볼 수 있다.

---

19) 보수적으로 측정할 경우 평균 값이 아닌 VaR(value at risk) 혹은 CTE(conditional tail expectation) 값이 사용된다.

〈표 6〉 로그주식수익률 추정모델에 따른 GMAB보증 기대 손실과 보증준비금 비율

연령	적립 기간	주식수익률 모델	평균기대손실 현가	GMAB 보증비용율
45세	10년	EGARCH(1,1)	3,918,185	0.1758%
		GARCH(1,1)	3,677,536	0.1666%
		GBM	3,135,091	0.1395%
	15년	EGARCH(1,1)	4,268,973	0.1452%
		GARCH(1,1)	4,214,664	0.1422%
		GBM	4,141,642	0.1398%
55세	10년	EGARCH(1,1)	3,687,835	0.1792%
		GARCH(1,1)	3,461,333	0.1701%
		GBM	2,950,779	0.1427%
	15년	EGARCH(1,1)	3,818,771	0.1432%
		GARCH(1,1)	3,817,099	0.1431%
		GBM	3,704,869	0.1378%

〈표 6〉의 결과는 로그 주식수익률의 추정 모델이 적정 최저보증준비금의 크기에 상당한 영향을 미친다는 사실을 보여준다.

먼저 KOSPI 로그수익률이 GBM을 따른다는 전통적인 모형의 경우 모든 경우에 있어서 GARCH-type 모형에 비해 낮은 수준의 최저보증준비금을 보이고 있다. 즉, 실제 주식수익률의 변동성이 시간에 따라 상이하게 변하며 변동성 군집현상을 보이는데도 불구하고 이를 주식수익률 추정에 반영하지 않는다면 보험회사는 GMAB 적립금을 과소 추정할 수 있다.

예를 들어 45세 가입자가 60세에 연금이 개시하는 경우 로그주식수익률이 GBM 가정을 이용해 추정되었다면 회사는 기대 비용을 충당할 수 있도록 평균 4,141,642원의 GMAB 보증준비금을 적립할 것이다. 하지만 실제로 주가지수의 로그수익률이 EGARCH(1,1) 모형을 따른다면 평균 4,268,973원의 비용이 발생하므로 보험회사는 그 차액인 127,331원의 손실을 경험하게 되는 것이다.

또 하나 주목하여야 할 결과는 대부분의 경우에서 EGARCH(1,1) 적용 시 요구되

는 GMAB 보증준비금이 GARCH(1,1)적용 시에 비해 높다는 것이다. GARCH 모형과 EGARCH 모형의 가장 큰 차이는 수익률의 변동성이 긍정적인 사건과 부정적인 사건에 다르게 반응하는 레버리지 효과의 반영 여부이다.

EGARCH(1,1) 모형 적용을 위해 추정된 모수 <표 4>를 살펴보면 부정적인 충격과 긍정적인 충격에 대한 반응의 비대칭성을 의미하는 계수(γ)는 음의 값을 보이는 것을 알 수 있다. 이는 부정적인 소식의 경우 긍정적인 소식에 비해 높은 변동성을 유발한다는 것을 의미한다. 따라서 EGACH(1,1) 적용 시 GARCH(1,1)에 비해 높은 GMAB 보증준비금이 요구되는 것으로 보인다. 또한 분석 결과에 따르면 GARCH(1,1) 모델은 EGARCH(1,1)에 비해 상대적으로 KOSPI 로그수익률의 변동성을 적절하게 반영하지 못하는 것으로 나타났으며 그 결과 <표 5>의 GARCH(1,1) 모델의 추정된 모수들 중 일부는 5% 수준에서 유의하지 않았다. 따라서 GARCH(1,1) 적용 시의 보증준비금 과소추정은 모델의 부적합성으로 인한 것일 수도 있다.

요약하면 주가지수의 로그수익률이 EGARCH(1,1) 프로세스를 따름에도 불구하고 GBM, GARCH(1,1) 혹은 다른 모델을 이용해 수익률을 추정할 경우 최저보증준비금은 과소 혹은 과대 추정될 수 있다.

V. GMAB 보증준비금에 영향을 미치는 요인 분석

4장의 결과는 로그주식수익률의 추정을 위해 사용된 모델의 차이로 상이한 적정 최저보증준비금수준이 산출될 수 있음을 보여주고 있다. 5 장에서는 로그주식수익률 추정 모델 이외에도 최저보증준비금에 영향을 미칠 수 있는 요인과 그 영향을 알아보고자 한다.

이 연구에서 우리는 로그주식수익률에 GARCH-type 모형을 적용하기 위해 Q-measure를 사용하였다. 이렇게 Q-measure 사용 시 기초가격 수익률의 변동성은 옵션 가격에 결정적인 영향을 미치게 되는데 우리는 변동성과 GMAB 보증준비금

과의 관계를 분석하기 위해 <표 7>의 민감도 분석을 시행하였다. 편의를 위해 민감도 분석은 로그수익률이 GBM을 따른다는 가정하에서 시행되었다.

<표 7> 로그수익률의 변동성 변화에 따른 GMAB 기대 손실 현가와 보증준비금 비율

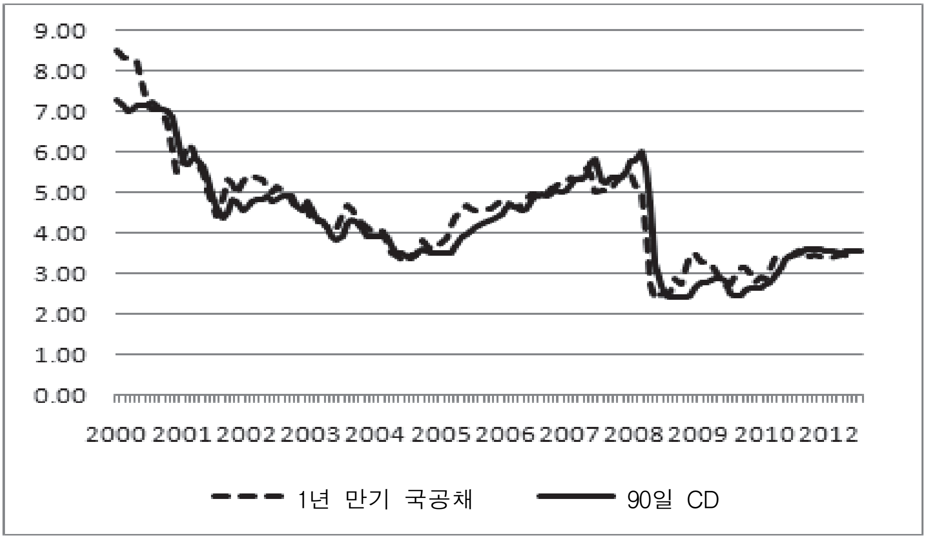
변동성 증가율	45세 10년 적립 시		55세 15년 적립 시	
	평균기대 손실 현가	GMAB 보증비용율	평균기대 손실 현가	GMAB 보증비용율
0%	3,135,091	0.1395%	3,704,869	0.1378%
5%	3,265,632	0.1411%	3,853,904	0.1460%
10%	3,390,546	0.1588%	3,994,347	0.1541%
15%	3,509,167	0.1684%	4,126,799	0.1619%
20%	3,621,849	0.1779%	4,251,808	0.1696%

로그주식수익률의 변동성은 GMAB보증준비금에 직접적인 영향을 미친다. 즉, 로그수익률의 변동성이 상승할수록 회사는 더 많은 수준의 최저보증준비금을 적립하여야 한다.

<표 7>의 결과를 <표 6>과 비교할 경우 우리는 주가의 로그수익률 추정 모델의 선택이 GMAB 보증 준비금에 미치는 영향이 매우 중대하다는 것을 알 수 있다. <표 6>의 결과 값을 보면 45세 가입자 10년 적립기간일 경우 EGARCH(1,1) 모델 사용 시 GAMB 보증비용율이 0.1758%였다. 이 값을 로그주가수익률이 GBM을 따른다는 가정하에 변동성을 변화시켜 얻은 <표 7>의 최저보증요율과 비교해보면 EGARCH(1,1) 모델 사용으로 인한 최저보증준비금의 상승 정도는 GBM 가정 시 변동성을 15%~ 20% 상승시킬 경우와 유사한 것을 알 수 있다. 즉, 동분산성을 가정하는 GBM 사용 시 변동성을 15%~20% 상승 시켜야 실제로 KOSPI수익률에서 나타나고 있는 변동성의 군집현상과 레버리지 효과를 반영할 수 있는 것이다.

Q-measure 사용 시 옵션 가격에 영향을 주는 또 하나의 중요한 요인은 무위험 이자율이다. 무위험 이자율은 90일 CD, 혹은 1년 국고채 이자율을 이용해 추정할 수 있으며 역시 거시 경제적 요인에 의해 변경될 수 있다. 다음 <그림 6>은 90일 CD 금리와 1년 만기 국고채 이자율의 추세를 나타낸다.

〈그림 6〉 90일 CD 금리와 1년 만기 국고채 이자율의 추세



이 연구에서는 변액보험의 만기가 장기인 것을 반영하여 90일 CD 금리와 1년 만기 국고채 이자율의 과거 장기 평균값에 기초하여 무위험 이자율을 가정하였으나 최근 이자율은 낮은 수준을 보여왔기 때문에 보험회사는 무위험 이자율이 하락했을 경우에 대비할 필요가 있다.

무위험 이자율이 GMAB 보증 옵션에 미치는 영향은 다음 〈표 8〉에서 확인 할 수 있다.

〈표 8〉 무위험 이자율의 변화에 따른 GMAB 기대 손실 현가와 보증준비금 비율

무위험 이자율	45세 10년 적립 시		55세 15년 적립 시	
	평균기대 손실 현가	GMAB 보증비용율	평균기대 손실 현가	GMAB 보증비용율
5%	3,135,091	0.1395%	3,704,869	0.1378%
4.75%	3,278,177	0.1434%	3,929,972	0.1431%
4.5%	3,426,758	0.1475%	4,165,044	0.1485%
4.25%	3,583,071	0.1475%	4,412,365	0.1541%
4%	3,748,074	0.1496%	4,673,340	0.1598%

최저급부 보장 옵션은 행사가격이 보장해주는 최저급부이고 행사시점이 급부 지급 사건(사망, 연금 개시 등)인 풋옵션의 형태인데 풋옵션의 가격은 무위험 이자율이 높을 경우 하락하고 이자율이 낮을 경우 상승하는 것이 일반적이다. 따라서 요구되는 GMAB 보증준비금은 금리의 하락과 함께 증가하므로 저금리 시대를 맞이하여 보험회사는 이자율 가정을 보수적으로 산정할 필요가 있다.

이외에도 GMAB 보증준비금에 영향을 미치는 요인으로 만기까지의 기간이 있다. <표 6>의 결과를 보면 적립기간이 15년인 경우 최저보증준비금은 적립기간이 10년인 경우 보다 높은 것을 알 수 있다.

또 하나의 요인은 계약자의 사망률이다. GMAB는 연금개시 시점의 최저적립금을 보장하므로 만일 계약자가 연금개시 이전에 사망한다면 사망 이전까지 GMAB 보증 비용을 지급하였음에도 불구하고 GMAB 보증은 받을 수 없다. 따라서 사망률이 높을 경우 보장받는 사람이 감소하게 되어 보험회사의 필요 보증금은 감소하게 된다. 이러한 사실은 <표 6>에서 알 수 있는데 동일한 적립기간을 가정하더라도 다른 연령 가입자의 GMAB로 인한 기대 손실은 차이가 있다. 즉, 사망률이 상대적으로 낮은 45세 가입자의 경우 55세 가입자에 비해 높은 GMAB보증준비금을 필요로 하게 된다. 따라서 실현된 사망률이 사망률 가정보다 낮을 경우 회사는 적립한 GMAB 보증준비금 이상의 비용을 지출할 수 있다.

VI. 결론

변액보험은 다양한 옵션을 가진 우수한 장기 투자 수단으로 각광받아왔다. 특히 변액보험 가입 시 높은 성과를 누릴 수 있는 기회를 가지면서 동시에 최저급부를 보장받을 수 있다는 사실은 위험회피 성향을 지닌 투자자들이 변액보험을 선호하는 주요 이유 중 하나가 되었다.

2002년 도입 이후 주식시장이 지속적인 호황을 경험함에 따라 보험회사는 최저보증준비금에 대해 별다른 우려를 하지 않았으나 지난 2008년 금융위기 시 경험

한 주식시장의 불황은 최저보증 옵션 제공으로 인한 보험회사의 손실 가능성을 높였고 이에 따라 적정 수준의 최저보증준비금에 대한 관심이 높아졌다.

이 연구에서는 주식수익률 추정 모델의 선택이 최저보증준비금에 미치는 영향을 분석하였다. 분석 결과 우리는 전통적인 GBM 모델은 1990년 1월 이후 KOSPI 로그수익률의 특성을 제대로 반영할 수 없다는 사실을 발견하였다. 특히 문제가 되는 것은 로그수익률이 시간에 따라 변동하며 군집현상을 보인다는 것으로 이러한 사실은 일정한 분산을 가정하는 GBM 모델로는 반영될 수 없었다. 이에 따라 우리는 현실에서 관찰되는 변동성의 특징을 보다 잘 반영할 수 있는 모델인 GARCH-type 모델의 사용을 고려하였다.

GARCH-type 모델 중 주식수익률의 추세를 반영하기 위해 가장 선호되는 모델로 GARCH와 EGARCH가 있다. 이 두 가지 모델의 차이는 레버리지 효과의 반영 여부인데 주가수익률이 좋은 소식과 나쁜 소식에 비대칭적으로 반응하는 경우에는 GARCH 모델 보다 EGARCH 모델이 적합하다고 할 수 있다.

분석 결과 우리는 KOSPI 로그수익률은 긍정적인 충격에 비해 부정적인 충격에 상대적으로 크게 반응하는 레버리지 효과를 보인다는 사실을 발견하였고 따라서 최적의 모델로 EGARCH(1,1)을 선택하였다.

로그주식수익률이 GBM을 따를 경우에는 Black-Scholes 모형을 이용해 최저보증준비금을 산출하는 것이 가능하다. 하지만 불완전성과 GARCH-type 프로세스를 가정할 경우 보다 복잡한 프라이싱 과정이 요구된다. 따라서 우리는 conditional Esscher transform을 이용해 GARCH-type 모델 사용 시 적합한 risk neutral measure를 구하였으며 몬테카를로 시뮬레이션을 이용해 최저보증준비금을 산출하였다.

EGARCH(1,1) 모형 사용 시 요구되는 최저보증준비금은 GBM을 이용한 경우 산출된 금액에 비해 높은 수준이었는데 그 정도는 GBM 가정 시 변동성 15%~20% 상승 효과와 유사하였다. GBM 이외에도 비교를 위해 GARCH(1,1) 적용 시 최저보증준비금 역시 산출하였는데 GBM에 비해서는 EGARCH(1,1) 모형 사용 시 결과와 근접한 결과를 보였으나 역시 다소 낮은 수준의 최저보증준비금이 산출되었다.

즉, 우리는 이 연구를 통해서 적절한 최저보증준비금 산출을 위해서는 대상이

되는 기초자산의 수익률의 특성에 대한 분석이 선행되어야 하며 만일 이를 제대로 반영하지 않고 최저보증준비금을 산출한다면 과소추정의 문제가 발생될 수 있다는 점을 증명하였다.

이 연구에서는 주가의 로그수익률 추정 모델 선택이 최저보증준비금에 미치는 영향을 강조하였으나 또 하나 중요한 문제는 데이터의 선택이다.

우리는 역사가 오래되었으며 가장 대표적으로 사용되는 지수라는 점을 감안하여 KOSPI를 사용하였으나 실제로 보험회사가 운영하고 있는 주식의 수익률은 KOSPI와 다른 특성을 보일 수 있다. 뿐만 아니라 실제로 보험회사는 국내 주식뿐 아니라 채권, 해외주식, 그리고 부동산에 걸친 다양한 자산에 투자하고 있으므로 최저보증준비금 산출을 위해 추정되어야 하는 기초 자산의 수익률은 주식뿐 아니라 모든 투자자산 수익률을 포함한다. 따라서 향후 보험회사의 실제 투자자산의 종류와 각 투자자산의 가중치를 반영하여 보다 현실에 근접한 투자수익률 추정 모델에 대한 연구가 진행되어야 한다.

데이터 사용 시 또 하나 주의하여야 할 점은 데이터 축적기간이다. 이 연구에서는 1990년 1월 이후 현재까지 즉 22년의 데이터를 이용하였으나 만일 데이터 사용기간이 이보다 길거나 짧은 경우 상이한 모델이 적용될 수 있다[20]. 따라서 보험회사는 다양한 축적기간을 대상으로 적정 주식수익률 추정 모델을 선택해 그 차이를 분석한 후 최저급부 보장 기간을 고려해 최종적으로 모델과 모수를 결정해야 할 것이다.

또한 EGARCH 이외에도 Stochastic Volatility Model 등 이분산성을 반영할 수 있는 다양한 모델이 존재하며 레버리지 효과를 반영할 수 있는 모델도 EGARCH 모델뿐이 아니다. 이 연구에서 우리는 GBM과 GARCH 그리고 EGARCH 모델을 주요 대상으로 하여 모델 적합성 테스트를 통해 EGARCH 모델을 사용하였으나 보다 다양한 특성을 가진 모델들을 사용할 경우 모델의 선택이 보증비용에 미치는 영향을 보다 명확히 이해할 수 있을 것이다. 따라서 주식수익률 추정 모델에 대한 추가적인 연구와 적용은 계속되어야 할 것이다.

20) 실제로 데이터 이용 기간이 짧을 경우 변동성의 군집현상은 발견되지 않을 수 있다.

참고문헌

권용재, 「변액연금 최저연금적립금보증 요구자본 계산시 확률론적 시나리오 방식 적용 연구」, 『보험학회지』, 제 87집, 보험학회, 2010.12, pp. 1-33.

김삼용 · 이용흔, 「이분산성 시계열 모형(GARCH, IGARCH, EGARCH)들의 성능 비교」, 『응용통계연구』, 제 19권 제1호, 한국통계학회, 2006. pp. 33-41.

김융희 · 김창기, 「변액 연금 상품의 보증 옵션 분석」, 『보험금융연구』, 제 22권 제2호, 보험연구원, 2011.5, pp. 3-25.

노건엽, 「변액보험의 보증준비금 평가시 확률변동성 특성을 통한 주식수익률 시나리오 적용 연구, 『보험금융연구』, 제23권 제1호, 보험연구원, 2012.2, pp. 3-34.

엄영호 · 김계홍, 「변액연금의 가치산정 및 리스크 분석」, 『금융공학연구』, 제5권 제1호, 한국금융공학회, 2006.6, pp. 21-39.

옥기율 · 허화 · 천성진, 「KOSPI200의 변동성 추정방법에 따른 VaR 비교연구」, 『보험학회지』, 제 84집, 보험학회, 2009.12, pp. 105-137.

황진태 · 서대교, 「거시경제변수가 변액보험 초회보험료에 미치는 영향에 관한 분석 : 백터오차수정보험을 중심으로」, 『보험금융연구』, 제 21권 제3호, 보험연구원, 2010.11, pp. 3-32.

Black, F., "Studies of Stock Price Volatility Changes", Proceedings of the 1976 Meetings of the Business and Economics Statistics Section, American Statistical Association, pp. 177-181.

Black, F., and Schles, M., "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, Vol 81, 1973, pp. 637-654.

Bollerslev, T., "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, Vol 31, 1986, pp. 307-327.

Bolton, M.J., Carr, D.H., Collis, P.A., George, C.M., Knowles, V.P., and

Whitehouse, A.J., " Reserving for Annuity Guarantees", The Report of the Annuity Guaranteed Working Party, 1997.

Boyle, P.P. and Hardy, M.R., "Reserving for Maturity Guarantees: Two Approaches", *Insurnace: Mathematics and Economics*, Vol. 21 No.2, 1997, pp. 113-127.

Boyle, P.P., and Schwartz, E.S., "Equilibrium Prices of Guarantees under Equity-Linked Contracts, *Journal of Risk and Insurance,* Vol. 44 No.4, 1977, pp. 639-660.

Brandt, M.W., and Jones, C.S., "Volatility Forecasting with Range-Based EGARCH Models", *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol 24. No 4, 2006, pp. 470-486.

Buhlman, H., Delbaen, F., Embrechts, P., and Shiryaev, A.N., "No-Arbitrage, Change of Measure and Conditional Esscher Transforms", CWI Quarterly, Vol.9, 1996, pp. 291-317.

Christie, A.A., "The Stochastic Behavior of Common Stock Variances: Value, Leverage and Interest Rate Effects, *The Journal of Financial Economics*, Vol.10, 1982, pp. 407-432.

Cumby, R., Figlewski, S., and Hasbrouck, J., "Forecasting Volatilities and Correlation with EGARCH Models, *The Journal of Derivatives*, Vol.1, No.2, 1993, pp. 51-63.

Davis, M.A., "Option Pricing in Incomplete Markets", *Mathematics of Derivative Securities*, Cambridge University Press, 1997, pp. 216-226.

Engle, R.F., "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of Unites KingdomInflation", *Econometrica*, Vol 50, 1982, pp. 987-1006.

Engle, R.F. and Ng V.K., "Measuring and testing the impact of news on volatility", *Journal of Finance*, Vol 48, 1993, pp. 1749-1778.

Esscher, F., "On the Probability Function in the Collective Theory of Risk", *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, Vol 15, 1932, pp. 175-195.

French, K.R., Schwert G.W., and Stambaugh, R.F., "Expected Stock Returns and Volatility", *The Journal of Financial Economics*, Vol.19, 1987, pp. 3-29.

Hardy, M.R., "Stock Return Models for Segregated Fund Investment Guarantees", University of Waterloo, Institute for Insurance and Pensions Research, 1999.

______, "A Regime Switching Model of Long Term Stock Returns", *North American Actuarial Journal*, Vol. 5 No.2, 2001, pp. 41-53.

______, *Investment Guarnatees: Modeling and Risk Management for Equity-Linked Life Insurance*, New Jersy: Jhon Wiley & Sons, 2003.

Hardy, M.R., Freeland, R.K., and Till, M.C., "Validation of Long-Term Equity Return Models for Equity-Linked Guarantees, *North American Actuarial Journal*, Vol. 10 No.4, 2006, pp. 28-47.

Merton, R.C., "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol 4, 1973, pp. 141-183.

Nelson, D.B., "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach", University of Chicago, Working Paper, 1988.

Nq, A.C., Li, J.S., and Chan, W.S., " Modeling Investment Quarantees in Japan: A Risk Neutral GARCH Approach", *International Review of Financial Analysis*, Vol 20, 2011, pp. 20-26.

Schweizer, M., "Approximation Pricing and the Variance-Optimal Martin-gale Measure", *Annals of Probability*, Vol 24, 1996, pp. 206-236.

Schwert, G.W., "Stock Volatility and the Crush of '87", *Review of Financial Studies*, Vol 3, No 1, 1990, pp. 77-102.

Siu, T.K., Tong,H. and Yang, H., "On Pricing Derivatives Under GARCH Models: A Dynamic Gerber-Shiu Approach" *North American Actuarial Journal*, Vol.8, 2004, pp. 17-31.

Wilkie, A.D., "A Stochastic Investment Model for Actuarial Use", Transaction of the Faculty of Actuaries, Vol 39, 1986, pp. 341-381.

______, "More on a Stochastic Asset Model for Actuarial Use", *British Actuarial Journal*, Vol 1, 1995, pp. 777-964.

Abstract

This research studied the effects of stock return estimation model on the minimum guarantee reserves. Investigating KOSPI log return data since Jan 1990 and onwards, we were able to observe heteroscedasticity such as volatility clustering and leverage effects. To identify models which most clearly reflect these properties, we used GBM, GARCH(1,1) and EGARCH(1,1) models of which EGARCH(1,1) was found to be the optimal one. Under market incompleteness assumption, we used the conditional Esscher transform to find an appropriate risk neutral measure and the Monte-Carlo simulation method to compute the minimum guarantee reserves. Computation of the minimum guarantee reserves using GBM, GARCH(1,1) and EGARCH(1,1) models demonstrated that GBM and GARCH(1,1) models resulted in lower minimum guarantee reserves than when using EGARCH(1,1) model. In other words, we proved through this study that for sound computation of minimum guarantee reserves, one must thoroughly analyze the properties of returns of underlying assets in question prior to computation. Without such analysis, the computation may lead to underestimation of the minimum guarantee reserves.

※ **Key words:** GARCH-type model, geometric brownian motion, conditional Esscher transform, variable annuity, GMAB