

# 스왑 스프레드의 기간구조모형

## A Two-Factor Model of the Term Structure of the Swap Spread with Stochastic Volatility

이 준 희\* · 박 수 천\*\* · 김 재 윤\*\*\*

Joon-Hee Rhee · Soo-Chun Park · Jae-Yoon Kim

본 연구에서는 스왑 스프레드 기간구조 결정에 대한 새로운 모형의 제시와 이를 국내자료를 이용하여 검증하였다. 구체적으로 스왑 스프레드 기간구조의 요인으로는 단기 스왑 스프레드와 단기 스왑 스프레드의 변동성이다. 요인(factor) 수는 PCA 분석을 통해 선택하였고, 2요인 스왑 스프레드의 폐쇄형 공식을 제시하였다. 변동성 추정을 위하여 스왑 스프레드에 대한 GARCH(1,1)모형을 적용하였고 유의적인 결과를 보였다. 위험의 시장가격(market price of risk)을 추정하기 위하여 시계열, 횡단면 자료를 혼합(pooling)하여 GMM을 추정하였다. GMM 추정의 적합도를 나타내는  $\chi^2$ 값은 5%에서 모형이 적합성을 지지하였으나 변동성에 대한 설명력이 낮게 나왔다. 추가적인 실증분석에서도 단기 스왑 스프레드는 스왑 스프레드의 기간구조에 유의한 영향을 미쳤지만, 스왑 스프레드의 변동성은 비유의적인 결과를 보였다.

국문 색인어: 금리의 기간구조, 스왑 스프레드, 확률변동성, GARCH, GMM

한국연구재단 분류 연구분야 코드: B050704, B051608, C020603

\* 숭실대학교 경영학부 교수(joonrh@ssu.ac.kr), 주저자, 교신저자

\*\* 숭실대학교 경영학과 박사과정(park.soochun@gmail.com)

\*\*\* 숭실대학교 경영학과 박사과정(enzokim@naver.com)

논문 투고일: 2012. 08. 29, 논문 최종 수정일: 2012. 10. 29, 논문 게재 확정일: 2012. 11. 23

## I. 서론

IRS(Interest Rate Swap), 즉, 이자율 스왑이란 계약 당사자 간 미래시점에 고정금리와 변동금리의 현금흐름을 교환하는 거래이다. 스왑거래의 동기는 위험관리나 고정 금리시장과 변동 금리시장 간의 시장의 불완전성(anomaly) 등 다양한 이유에 의해 거래되고 있으나, 최근에 들어서는 국채시장이나 RP(Repurchase Agreement)시장, MBS(Mortgage Backed Securities)시장 간의 금리차이를 이용하여 투자 및 투기 목적으로 거래가 이루어지고 있다. 이자율 스왑은 이자율 파생상품 중 장외시장에서 가장 많이 거래가 이루어지는 상품이다. 규모나 유동성에 있어 국채시장과 거의 동일한 정도를 유지하는 시장으로 스왑 금리의 기간구조는 국채에 대한 금리의 기간구조 못지않게 시장금리의 벤치마크(benchmark) 역할을 하고 있다. <표 1>은 최근 국내 및 주요국의 스왑 거래규모를 나타내고 있다.

스왑 스프레드의 기간구조를 모형화하기 위해서는 무위험 초단기이자율(riskfree instantaneous short rate)과 적절한 위험등급의 초단기이자율(risky instantaneous short rate)을 동시에 설정해야 하고 비재정거래를 만족하는 EMM(Equivalent Martingale Measure) 설정을 위하여 몇 가지 가정을 추가해야 한다. 이러한 모형화 방법은 국채시장과 스왑시장을 동시에 모형화해야 하기 때문에 추정 모수의 수가 증가하는 단점이 있다. 본 연구의 목적은 국채시장 못지않게 중요성이 강조되는 스왑시장에서 비교적 사용하기 간편한 스왑 스프레드 기간구조 모형을 제시하고자 한다. 즉, 국채시장의 여러 변수가 스왑 스프레드에 영향을 미치기는 하지만 국채 수익률 모형과 같이 스왑시장의 정보만으로 스왑 스프레드의 기간구조를 모형화하고자 한다.

채권의 기간구조 모형화와 비슷하게 스왑 스프레드의 기간구조모형은 1요인, 2요인, 3요인 모형으로 가정할 수 있으며, 요인의 수와 설정요인은 시장상황에 맞추어 가정하는 것이 일반적이라 할 수 있다. 미국 연구의 경우 Cortes(2006)에 의하면 스왑 스프레드는 시간에 따라 변동성이 매우 크며, 스왑 거래나 국채 등의 수익에 따라 그 크기가 시간에 걸쳐 변동하는 것으로 알려져 있다. 스왑 스프레드는

동일만기의 이자율 스왑 이자율과 국채 수익률의 차이를 의미하는데, 스왑 거래의 거래특성상 신용위험이 내재되어 있어 이론상으로는 정(+)의 관계를 유지하는 것이 일반적이라 할 수 있다. 그러나 외국의 경우도 스왑 스프레드가 부(-)의 값을 갖기도 하는 것으로 나타났다. 특히 국내의 경우는 이 스왑 스프레드가 지속적으로 부(negative)의 관계로 나타나고 있다.

국내자료를 보면 2002년 이후 국내 금리스왑시장에서는 스왑 스프레드 역전현상이 지속적으로 유지되고 있다. <그림 1>은 만기 1년, 2년, 3년, 5년, 10년의 스왑 스프레드를 나타낸 것이다. 스왑 스프레드가 부의 값을 갖는 경우는 앞서 언급하였듯이 외국에서도 종종 발생하는 현상으로 재정거래(arbitrage trade)의 가능성을 제공한다. 국내 업계에 따르면 국내 스왑 시장의 스왑 스프레드 역전현상은 기본적으로 국내에서 IRS receive(고정금리 수취) 수요가 많기 때문으로 언급하고 있으며, 또 다른 이유는 기술적인 요인으로 스왑 이자율은 소위 “par yield” 인 반면, 국고채 수익률은 “spot yield”로 나타나게 되어 금리의 기간구조의 기울기에 따라 두 수익률 간의 크기가 달라지는데 그 원인이 있지 않나 사료된다. 스왑 스프레드의 역전현상이 발생될 경우 일종의 재정거래가 발생되는데, 국내의 경우는 power spread note<sup>1)</sup>라는 금융상품으로, 외국의 경우에는 RP로 자금을 조달하고 국채를 매입, 그리고 고정금리를 지급하고 LIBOR를 수취하는 스왑거래를 통해 재정거래를 수행하기도 한다. 궁극적으로 이러한 거래는 스왑 스프레드의 폭을 좁히게 된다.

스왑 스프레드에 대한 기존 연구를 보면 스왑 스프레드를 결정하는 요인으로 이자율, 신용위험(credit risk), 유동성(liquidity)을 들고 있다. 미국의 경우 Grinblatt (2002)은 신용위험은 스왑 스프레드에 미치는 영향이 미비하며, 유동성이 큰 영향을 미치는 것으로 보고하고 있고, He(2001) 또한 스왑 거래는 소위 Master Swap Agreement를 따르기 때문에 신용위험에 대한 영향 가능성이 낮다고 주장하였다. 스왑 스프레드에 대한 실증연구뿐만 아니라 이론 연구에서도 스왑 스프레드에 대한 영향 요인으로 신용위험과 유동성 요인을 꾸준히 모형화 하고 있다. Duffie and

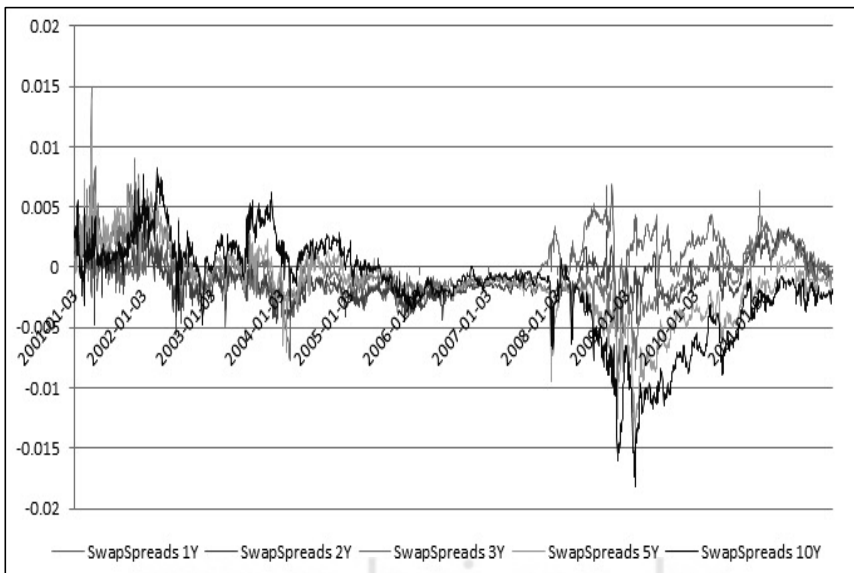
1) power spread note는 부(-)의 스왑 스프레드를 이용하여 동일조건외 고정금리 국고채의 수익률보다 높은 고정금리로 발행되는 채권을 의미한다.

Singleton(1997), Collin-Dufresn and Solnik(2000), He(2001), Liu, Longstaff and Mandell(2006) 등의 연구는 이론 모형에서 출발하나, 실증부분에서는 모두 이 두 요인을 스왑 스프레드의 영향 요인으로 분석하고 있다.

국내에서도 스왑시장 및 스왑 스프레드에 대한 다수의 연구가 있는데, 최근의 연구로서는 구본일·엄영호·최한복(2010)의 연구를 들 수 있다. 구본일·엄영호·최한복(2010)의 연구에서는 무위험 및 위험의 초단기 현도이자율을 모형화하여 이론적 스왑 스프레드를 추정하였다. 또한 원승연·한상범(2009)은 분계점 회귀모형을 이용하여 스왑 스프레드를 분석하여 지속적인 (-)의 스왑 스프레드의 원인을 규명한 바 있다. 이외에도 원승연(2010), 강병진(2009)의 연구에서도 스왑 스프레드의 역전현상 결정요인에 대한 실증분석을 연구하였다.

본 연구에서는 국내의 기존실증분석 연구에서와 같이 스왑 스프레드의 역전현상을 규명하는 것이 아니라 스왑 스프레드가 정(+) 또는 부(-)의 값을 갖는 것을 국내스왑시장의 “stylized fact”로 받아들이고 구본일·엄영호·최한복(2010)의 연구와는 차별적으로 스왑 스프레드를 직접 모형화하는 연구에 초점을 맞추고자 한

〈그림 1〉 만기별 스왑 스프레드



다. 본 연구의 구성은 다음과 같다. 제2장에서는 스왑 스프레드에 대한 기본 모형을 설명하고자 한다. 제3장에서는 국내 스왑 스프레드에 대한 자료의 분석을 수행한다. 그리고 제4장에서는 본 연구에서 제시한 스왑 스프레드 모형을 설명한다. 제5장에서는 본 연구에서 제시된 모형의 실증분석을 그리고 마지막 6장에서는 결론을 맺도록 한다.

〈표 1〉 최근 우리나라와 미국 등 주요국의 금리스왑시장 거래 규모 비교  
(Daily averages in April, in billions of US dollars and percentages)

country	2001		2004		2007		2010	
	Amount	%	Amount	%	Amount	%	Amount	%
Korea	0.1	0.0	0.9	0.1	5.4	0.2	10.7	0.4
United States	115.7	17.1	317.4	23.8	525.0	24.2	641.8	23.8
United Kingdom	237.8	35.2	563.0	42.3	957.1	44.0	1234.9	45.8
Japan	15.7	2.3	30.9	2.3	76.4	3.5	89.9	3.3
Hong Kong SAR	2.6	0.4	11.3	0.8	17.7	0.8	18.5	0.7
Singapore	3.2	0.5	8.6	0.6	57.4	2.6	77.9	2.9

주: Adjusted for local inter-dealer double-counting(ie "net-gross" basis).

자료: BIS(Triennial Central Bank Survey of Foreign Exchange and Derivatives Market Activity).

## II. 스왑 스프레드 이론적 모형

본 연구에서는 다음의 불확실성에 대한 경제를 가정한다. 즉, 다음의 확률측도 공간을 가정한다.  $(\Omega, P, \mathcal{J})$ , 여기서  $\Omega$ 는 경제의 불확실성을,  $\mathcal{J}$ 는 정보 집합을 그리고  $P$ 는 물리적 확률(physical probability measure)을 의미한다. 본 연구에서 가정되는 초단기 이자율(instantaneous short rate)  $(r_t)_{t \geq 0}$ 와 순간 스왑 스프레드(instantaneous swap spread)  $(s_t)_{t \geq 0}$ 는 모두  $(\Omega, P, \mathcal{J})$ 에서 정의되는 확률과정이다. 따라서 제로국채(zero bond)의 가격  $P(t, T)$ 는 다음과 같이 결정된다. 즉,

$$P(t, T) = E_t^* \left[ e^{-\int_t^T r_u du} \right] \quad (1)$$

여기서,  $t$ 는 현재시점을,  $T$ 는 만기 그리고  $E^*$ 는 소위 EMM(Equivalent Martingale Measure)에서의 조건부 기댓값을 의미한다.

한편, 스왑거래와 유사한 위험을 내재하고 제로국채와 동일한 형태의 채권가격  $Q(t, T)$ 를 다음과 같이 정의하자. 즉,

$$Q(t, T) = E_t^* \left[ e^{-\int_t^T (r_u + s_u) du} \right] \quad (2)$$

$(r_t)_{t \geq 0}$ 와  $(s_t)_{t \geq 0}$ 의 확률과정이 서로 독립일 경우 식 (2)는 다음과 같이 변형된다.

$$Q(t, T) = P(t, T) \times E_t^* \left[ e^{-\int_t^T s_u du} \right] = P(t, T) \times F(t, T)$$

여기서,  $F(t, T) = E_t^* \left[ e^{-\int_t^T s_u du} \right]$ .

식 (1)과 식 (2)로부터 해당채권의 만기별 수익률을 계산하면 각각 다음과 같다.

$$Y_1(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T),$$

$$Y_2(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln Q(t, T).$$

따라서 만기별 스왑 스프레드는 다음과 같이 결정된다.

$$Y_2(t, T) - Y_1(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln F(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln E_t^* \left[ e^{-\int_t^T s_u du} \right] \quad (3)$$

식 (3)의 기댓값 부분만을 보면 기존의 제로 국채가격 또는 국채에 대한 금리의 기간구조의 모형화와 유사한 관계를 보인다. 따라서 순간 스왑 스프레드를 Duffie

and Kan(1994)의 아파인(Affine)으로 모형화한다면, 스왑 스프레드의 폐쇄형공식(closed form)을 찾을 수 있을 것이다.

### III. 스왑 스프레드의 자료 분석

#### 1. 자료 분석

국내에서 거래되는 스왑거래로부터 스왑 스프레드 자료를 구하기 위하여 비교적 유동성이 풍부하고 획득이 용이한 스왑거래를 이용하였다. 기간은 2001년부터 2011년의 일별 자료로 만기는 1년, 2년, 3년, 5년, 10년이다. <표 1>은 사용한 만기별 스왑 스프레드의 기초통계량을 나타내고 있다. 1년짜리 스왑 스프레드를 포함하여 대부분 만기의 평균값이 1bp(basis point)를 하회하고 있다.

위 자료를 중심으로 국내의 스왑 스프레드에 대하여 PCA(주성분분석)분석을 시행하였다. 이는 스왑 스프레드를 모형화할 경우 최소 몇 개의 요인으로 모형화하는 것이 타당한지를 파악하기 위함이다. PCA분석을 통해 스왑 스프레드의 요인수를 찾고자 한다<sup>2)</sup>. <표 3>에서 보듯이 2요인으로 스왑 스프레드의 기간구조의 설명이 93%, 3요인으로는 96%로 이루어지고 있다. 따라서 2요인 또는 3요인으로 스왑 스프레드를 모형화 하는 것이 타당하다고 본다. 이는 금리의 기간구조가 3요인으로 거의 설명되는 실증연구와 유사하다고 할 수 있겠다. 다만 본 연구에서는 스왑자료의 만기가 5개로 한정되어 3요인 모형을 선택할 경우 모형 추정의 어려움이 있고, 제 3요인을 추가 하더라도 설명력 증가가 미미하여 모형추정의 효율성에 근거하여 2요인으로 모형화하고자 한다.

2) Diebold et al(2008), Reiner(2004)의 연구에서 보듯이 국제수익률의 기간구조, LIBOR 금리의 기간구조의 요인수를 PCA분석을 통해 설정하는 것이 일반적이다.

〈표 2〉 만기별 스왑 스프레드 기초통계량

	1	2	3	5	10
평균	-0.0001	-0.00111	-0.00038	-0.00137	-0.00165
표준편차	0.00199	0.00171	0.00223	0.0029	0.00404
최대값	0.0069	0.00763	0.01488	0.01399	0.00824
최소값	-0.00777	-0.0103	-0.0103	-0.0148	-0.0182
상관계수					
	1	2	3	5	10
1	1	0.61670	0.20174	-0.24381	-0.43151
2	-	1	0.76912	0.45454	0.22331
3	-	-	1	0.80210	0.57331
5	-	-	-	1	0.88829
10	-	-	-	-	1

〈표 3〉 2, 3, 5, 10년 만기 스왑 스프레드의 주성분분석

	Eigenvalue	Proportion	Cumulative
요인1	2.889664	0.578134	0.578134
요인2	1.773795	0.354883	0.933017
요인3	0.177246	0.035462	0.968479

따라서 본 연구에서는 스왑 스프레드의 기간구조를 2요인 모형으로 모형을 가정하고자한다. 제1요인은 금리의 기간구조의 모형화와 유사하게 순간 스왑 스프레드를 제1요인으로 가정하며, 제2요인으로는 Cortes(2006)의 미국 스왑 스프레드의 “stylized fact”인 스왑 스프레드의 확률 변동성(stochastic volatility)을 가정하고자 한다. 국채에 대한 금리기간구조모형에서와 같이 제1요인의 경우는 요인으로 사용에 대하여 무리가 없겠으나 제2요인으로 스왑 스프레드의 변동성사용의 타당성을 구하기 위하여 스왑 스프레드의 ARCH(Auto Regressive Conditional Heteroscedasticity) 효과 여부를 우선 먼저 검증하도록 한다. 〈표 4〉는 스프레드의 AR(1) 모형화에 따른 잔차(residual)의 제곱을 각 시차별로 LM test와 Ljung-Box Q 통계량 결과이다. LM 통계량인  $T \times R^2$ 과 Q통계량 모두 예외 없이 거의 ARCH 효과가 있는 것으로 나타나고 있다. 따라서 제 2요인으로 확률변동성을 가정하는 것은 무리가 없는 것으로 판



단된다.

〈표 4〉 ARCH효과에 대한 LM 검정과 Ljung-Box 검정

Ljung-Box Q-statistics		
	Q-statistics	significance level
Q(5)	324.034	0.000000
Q(10)	407.691	0.000000
Q(15)	500.053	0.000000
Q(20)	611.863	0.000000
Q(25)	662.875	0.000000
Q(30)	720.843	0.000000
ARCH LM Test		
lag(10) $T \times R^2$	255.1419	
lag(20) $T \times R^2$	305.5699	
lag(30) $T \times R^2$	322.0230	

## 1. 2요인 모형

이를 종합하여 본 연구는 다음과 같은 2요인 스왑 스프레드 모형을 설정한다. 즉, 본 연구의 모형은 순간 스왑 스프레드를 다음의 Vasicek 과정으로 가정한다.

$$ds = \alpha(\bar{s} - s)dt + \sqrt{v} dz_1 \quad (4)$$

여기서  $\bar{s}$ 는 스왑 스프레드의 장기 평균을,  $\alpha$ 는 평균회귀속도,  $v$ 는 변동성을 나타내며,  $z_1$ 은 표준 브라운모션을 의미한다. Vasicek 과정으로 가정하는 이유는 국내의 경우 스왑 스프레드가 상황에 따라 정(+) 또는 부(-)가 시현되므로 이를 가능하게 하고자 함이다. 다음으로 변동성  $v$ 는 정(+)가 보장되는 다음의 CIR 형태의 확률과정을 가정한다.

$$dv = \gamma(\bar{v} - v) + \delta\sqrt{v} dz_2 \quad (5)$$

여기서  $\gamma, \bar{v}, \delta$ 는 스왑 스프레드의 경우와 유사한 모수이다.

$z_2$  또한 표준 브라운모션을 의미하는데, 모두 앞서 가정한  $(\Omega, P, \mathcal{J})$ 에서 정의되며,  $z_1$ 과  $z_2$ 는 서로 독립으로 가정한다. 이러한 독립의 가정에도 불구하고 식 (4)와 (5)를 보면 알 수 있듯이 스왑 스프레드는 “diffusion” 항을 통하여 스왑 스프레드의 변동성에 영향을 받게 되므로 굳이  $z_1, z_2$ 의 브라운모션에 상관관계를 부여할 의미가 거의 없다. 이는 금리의 기간구조 모형 중 Chen(1996)의 모형 설정과 비슷하다고 하겠다. 또한, 본 연구에서 제시한 모형은 Fong and Vasicek(1991)의 금리의 기간구조 모형과는 다르게 두 요인간의 상관관계를 0으로 가정하여, Fong and Vasicek 모형의 계산상의 어려움을 완화시켰다.

#### IV. 이 요인을 이용한 스왑 스프레드

본 장에서는 식 (4)와 (5) 그리고 식 (3)을 이용하여 스왑 스프레드에 대한 공식을 유도하고자 한다. 우선 다음의 관계로부터, 즉  $F(t, T) = E_t^*[e^{-\int_t^T s_u du}]$  채권에 대한 금리의 기간구조와 마찬가지로 비재정거래조건(no arbitrage condition)을 이용하여 다음의 편미분방정식이 유도된다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}vF_{vv} + \frac{1}{2}\delta^2vF_{vv} + (\alpha(\bar{s} - s) + \lambda_s v)F_s \\ + (\gamma\bar{v} - \gamma'v)F_v + F_t - sF = 0, F(s, v, 0) = 1 \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, 하첨자는 편미분을 의미하며,  $\gamma' = \gamma - \lambda_v \delta$ , 그리고  $\lambda_s$ 와  $\lambda_v$ 는 각각 스프레드와 스프레드의 변동성에 대한 위험의 시장가격(the market prices of risk)을 의미한다. 다음의 이론에서 폐쇄형 공식의 스왑 스프레드를 제시한다.

**Theorem**: 순간 스왑 스프레드의 확률과정 식 (4), (5)를 따를 경우 스왑 스프레드  $F(t, T) \equiv F(s, v, \tau)$ 는 식 (6)을 만족하며, 식 (6)의 해는 다음과 같다. 여기서,

$\tau = T - t$ 이다. 즉,

$$F(s, v, \tau) = -\frac{1}{(T-t)} \ln(A(\tau)e^{-B(\tau)s - C(\tau)v}),$$

여기서,

$$A(\tau) = \exp\left(-\left(\tau + \frac{\exp(-\alpha\tau)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right)\bar{s}\right) \\ \times \left(\frac{\Delta M(Q, S, Y) + (-Y/2\phi)^{1-S} M(1+Q-S, 2-S, Y)}{\Delta M(Q, S, -2\phi) + M(1+Q-S, 2-S, -2\phi)}\right)^{-\frac{2\gamma\bar{v}}{\delta^2}}$$

$$B(\tau) = \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha}$$

$$C(\tau) = \frac{1}{\delta^2} \left\{ \alpha Y - 2\alpha\psi - 2\alpha Y \left[ \frac{\Delta Q}{S} M(Q+1, S+1, Y) + \frac{S-1}{2\lambda_s} y^{-S} M(1+Q-S, 2-S, Y) \right] \right. \\ \left. + \frac{1+Q-S}{2-S} y^{1-S} M(2+Q-S, 3-S, Y) \right\} \\ \times [\Delta M(Q, S, Y) + y^{1-S} M(1+Q-S, 2-S, Y)]^{-1},$$

여기서,

$$y = \exp(-\alpha\tau)$$

$$Y = -2\phi y$$

$$A = -\frac{2\phi[(1+Q-S)/(2-S)]M(2+Q-S, 3-S, -2\phi)}{(\phi+\psi)M(Q, S, 2-2\phi) - 2\phi(Q/S)M(Q+1, S+1, -2\phi)}$$

$$Q = \psi + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\gamma'}{\alpha}\right) + \frac{\beta}{2\phi}$$

$$S = 2\psi + \left(1 - \frac{\gamma'}{\alpha}\right)$$

$$\rho = (1 - 2\alpha\lambda_s) \frac{\delta^2}{4\alpha^4}$$

$$\beta = (\alpha\lambda_s - 1) \frac{\delta^2}{2\alpha^4}$$

$$\psi = -\frac{\gamma' + \sqrt{\gamma'^2 + 4\rho}}{2\alpha}$$

$$\phi = -\frac{\delta}{2\alpha^2}$$

여기서,  $M(a, b, c) = 1 + \frac{ac}{b} + \dots + \frac{(a)_n c^n}{(b)_n n!} + \dots$ ,  $M(a, b, c)$ 는 the Kummer 함수를 나타내며,  $(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)$ ,  $a_0 = 1$ 이다.

*Proof:* 부록 참조.

## V. 모형의 추정

### 1. 변동성 추정

순간 스왑 스프레드와 이의 변동성은 관찰이 불가능한 변수들이므로 모형을 이용하여 추정하여야 한다. 본 연구에서는 순간 스왑 스프레드의 경우 금리의 기간 구조 모형과 유사하게 대응치를 사용하기로 한다. 금리의 기간구조에 대한 모형의 경우 Longstaff and Schwartz(1992)는 순간 단기이자율을 만기가 가장 짧은 국채수익률 1월물을 대응치로 사용하는데, 국내 스왑의 경우 만기가 1년 미만인 자료가 없는 관계로 부득이 만기 1년인 스왑 스프레드를 순간 스왑 스프레드의 대응치로 사용하고자 한다. 따라서 스왑 스프레드의 변동성 또한 1년물 스왑 스프레드에 대한 변동성으로 추정하고자 한다. 추정모형은 GARCH(1,1)으로 모형은 다음과 같다.

$$s_{t+1} - s_t = \alpha(\bar{s} - s_t) + \epsilon_t$$

$$\epsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, v_t)$$

$$v_t = \beta_0 + \beta_1 v_{t-1} + \beta_2 \epsilon_{t-1}^2 \quad (7)$$

〈표 5〉는 GARCH(1,1)을 추정한 결과이다.  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\bar{s}$ ,  $\bar{v}$ 의 추정값에 대한  $t$ 값은 Delta방법을 이용하여 계산하였다<sup>3)</sup>. GARCH에 대한 계수값의 유의수준은 매우 높게 나왔다. 본 연구의 제2요인으로 확률변동성을 사용한 것은 타당하다고 할 수 있다.

〈표 5〉 시계열 자료를 이용한 GARCH 추정

모수	$\alpha$	$\bar{s}$	$\gamma$	$\bar{v}$	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$
추정값	0.0205 (7.849)***	3.279e-04 (1.335)	0.9109 (79.746)***	6.172e-10 (2.944)***	5.622e-10 (2.946)**	0.92032 (103.556)***	0.0891 (7.800)***

주: ( )안은  $t$ 값, \*\*\*는 1%에서 \*\*는 5%에서 \*는 10% 유의수준에서 유의함.

## 2. GMM 추정

한편 1년물 스왑 스프레드와 식 (7)로 추정된 변동성을 이용하여 시계열 자료와 횡단면 자료를 혼합(pooling)하여 모형을 추정하기로 한다. 식 (3)의 스왑 스프레드를

$$y_t(\tau) \equiv y(t, T) = Y_2(y, T) - Y_1(t, T)$$

로 가정하면 이론에서 제시한 스왑 스프레드의 폐쇄형 공식에 의해 스왑 스프레드의 차분은 다음과 같게 된다.

$$\Delta y(\tau) = a(\tau) + b(\tau)\Delta s + c(\tau)\Delta v, \quad \tau \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (8)$$

본 연구의 경우는  $a(\tau) = 0$ ,  $b(\tau) = -\frac{B(\tau)}{\tau}$  그리고  $c(\tau) = -\frac{C(\tau)}{\tau}$ .

3) 식 (5)의 확률과정을 GRACH식 (7)로 전환할 경우  $\gamma = 1 - \beta_1$ ,  $\bar{v} = \frac{\beta_0}{1 - \beta_1}$  이 된다.

$\vartheta$ 를 모수벡터로 본 연구에서는  $\vartheta = (\alpha, \gamma', \delta, \lambda_s)'$ 이며, 식 (8)로부터 다음과 같이 적률조건을 상정한다<sup>4)</sup>. 즉,

$$\epsilon_t(\tau) = \Delta y_t(\tau) - b_t(\tau)\Delta s_t - c(\tau)\Delta v_t \quad (9)$$

$$h_t(\vartheta, \tau) = \begin{bmatrix} \epsilon_t(\tau) \\ \epsilon_t(\tau)\Delta s_t \\ \epsilon_t(\tau)\Delta v_t \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$f_t(\vartheta)$ 를  $3n$  벡터로  $h_t(\vartheta, \tau)$ 를 만기가 다른 스왑거래 자료를 순차적으로 쌓은 (stacking) 벡터 함수로 가정하자. 본 연구에서는  $n = 2, 3, 5, 10$ 로 4개이다<sup>5)</sup>. 특히 함수  $f_t(\vartheta)$ 는 직교의 적률조건(the orthogonal moments conditions)으로 Longstaff and Schwartz(1992)가 모형추정에서 사용하였다. 주지하듯이 식 (9)와 같은 적률조건인 경우 함수  $A(\tau)$ 에 있는 모수는 추정이 불가능하게 된다<sup>6)</sup>. 따라서 적률조건 함수를 식 (9)와 (10)과는 다르게 차분을 하지 않고 다음과 같이 정할 수도 있겠다.

$$\epsilon'_t(\tau) = y_t(\tau) - a_t(\tau) - b_t(\tau)s_t - c(\tau)v_t$$

$$h'_t(\vartheta, \tau) = \begin{bmatrix} \epsilon'_t(\tau) \\ \epsilon'_t(\tau)s_t \\ \epsilon'_t(\tau)v_t \end{bmatrix}.$$

본 연구에서 횡단면 모수의 추정이 완전하지 않음에도 위의 식이 아닌 (9)와 (10)의 적률조건을 사용한 이유는 첫째, 본 연구에서 사용한 자료가 만기가 다양하지 못하기 때문에 GMM 통계량이  $\chi^2$ 의 자유도가 너무 작아 모형검정에 문제가 발생되고, 둘째, 스왑 스프레드의 단위근 검정 시 1%의 유의수준하에서 대부분의

4)  $\gamma' = \gamma - \lambda_s \delta$ 로 모수를 따로 추정하는 것보다  $\gamma'$ 을 추정하는 것이 추정 시 그레디언트 (gradient)를 계산하는 것이 용이하다.

5) 만기 1년물은 순간 스왑 스프레드의 대응치로 사용하여, 혼합(pooling) 자료에서는 제외하여야 한다.

6) 본 연구에서는  $\bar{s}$ 와  $\bar{v}$ 이다.

경우 단위근이 존재하지 않으나, 시차의 정도에 따라 단위근이 존재하여 이를 감안하여 식 (9), (10)의 적률조건을 사용하였다.

본 연구의 GMM의 추정절차를 간략하게 설명하면 표본 적률은 다음과 같다.

$$g_T(\vartheta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f_t(\vartheta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{T} \sum_t h_t(\vartheta, \tau_1) \\ \frac{1}{T} \sum_t h_t(\vartheta, \tau_2) \\ \vdots \\ \frac{1}{T} \sum_t h_t(\vartheta, \tau_{10}) \end{bmatrix}.$$

GMM의 목적함수는  $J_T(\vartheta) = g_T'(\vartheta) W_T g_T(\vartheta)$ 이며, 여기서  $W_T$ 는 양수의 weighting matrix이다. 따라서 모수는  $\hat{\vartheta} = \arg_{\vartheta} \min J_T$ 를 만족하며, 효율적 추정을 위해 다음을 사용하기로 한다.

$$W_T = S^{-1}(\vartheta)$$

여기서  $S(\vartheta) = E[f_t(\vartheta)f_t'(\vartheta)]$ 이다.

추정결과는 <표 6>과 같다. GMM 목적함수의 적합도를 나타내는  $\chi^2$ 값이 5%에서 유의하게 나오므로써 본 연구에서 사용한 적률조건에 대한 모형의 적합성을 지지하는 하지만 변동성에 대한 모수값의 유의성이 낮았다. <표 7>은 추가적인 분석의 결과로 Balduzzi et al.(1996)의 금리의 기간구조에 대한 연구에서 같이 각 만기별 스왑 스프레드를 순간 스왑 스프레드의 대응치인 1년물과 GARCH(1,1)으로 추정된 변동성을 설명변수로 회귀분석한 결과이다. 이는 각 요인별 설명력이 만기별로 스왑 스프레드에 어떻게 영향을 미치는지를 파악하고자 함이다. 구체적인 모형은 다음과 같다.

$$\Delta y_t(n) = \beta_0 + \beta_1 \Delta s_t + \beta_2 \Delta v_t + \epsilon_t, \quad n=2\text{년}, 3\text{년}, 5\text{년}, 10\text{년}$$

〈표 7〉에서 보듯이 본 연구에서 사용된 두 요인 모두 정도의 차이는 있으나, 스프레드를 설명하는데 단기 스프레드의 영향력은 1%에서 유의적으로 나타났고 GARCH로 추정된 변동성의 영향력은 일반적으로 유의하지 않았으며, 만기가 길수록 유의성은 낮아졌다. 이는 시계열 자료와 횡단면 자료를 혼합 GMM 추정결과와 일치한다고 볼 수 있다. 회귀분석과 GMM 추정의 결과를 종합하면, 본 연구에서 제시한 2요인 스왑 스프레드에 대한 모형은 단기 스프레드의 설명력이 높은 것으로 나타났으나 스왑 스프레드의 변동성은 스왑 스프레드의 기간구조를 설명하는데 기여하지 못하는 것으로 나타났다. 본 연구에서 변동성을 계산하는데, 초단기 스왑 스프레드(instantaneous swap spread)의 대용치로 1년 만기 스왑 스프레드 사용이 한계가 있는 것으로 판단된다.

〈표 6〉 GMM을 이용한 횡단면 모수 추정결과

모수	$\alpha$	$\gamma$	$\delta$	$\lambda_s$	$\chi^2_8$	p-value
추정값	2,21346 (4,33814)***	-2,25682 (-0,59857)	1,14838 (0,02169)	-0,63230 (-0,07163)	15,4816	0,0504

주: ( )안은  $t$  값, \*\*\*는 1%유의수준에서 유의함.

〈표 7〉 만기별 스왑 스프레드 대한 회귀분석

만기	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$R^2$	Durbin-Watson
스왑 스프레드 2Y	-0,0000005 (-0,0556)	0,5459890 (26,9312)***	156,066845 (1,0673)	0,2020	2,5913
스왑 스프레드 3Y	-0,0000003 (-0,0291)	0,4711597 (20,8928)***	211,857126 (1,3025)	0,1322	2,3899
스왑 스프레드 5Y	-0,0000004 (-0,03370)	0,3636360 (13,8570)***	-174,11731 (-0,9199)	0,0636	2,4328
스왑 스프레드 10Y	-0,0000015 (-0,1409)	0,4096385 (17,4415)***	-75,081015 (-0,44324)	0,0965	2,5658

주: ( )안은  $t$  값, \*\*\*는 1%유의수준에서 유의함.



## V. 결론

본 연구는 2요인 스왑 스프레드의 기간구조를 모형화하였다. 스왑 스프레드 기간구조의 요인은 초단기 스왑 스프레드(instantaneous swap spread)와 이의 변동성으로 스왑 스프레드에 대한 폐쇄형 공식을 유도하였다. 본 연구의 모형을 국내 스왑 스프레드 자료를 이용하여 실증분석을 수행하였다. 구체적으로 변동성 추정을 위하여 스왑 스프레드에 대한 GARCH(1,1)모형을 적용하였고 유의적인 결과를 보였다. 위험의 시장가격(market price of risk)을 추정하기 위하여 시계열 자료와 횡단면 자료를 혼합(pooling) GMM을 사용하여 모수를 추정하였다. GMM 추정의 적합도를 나타내는  $\chi^2$  값은 5%에서 모형이 적합성을 지지하였으나 모수의 유의성은 낮게 추정되었다. 또한 개별만기의 스왑 스프레드를 단기 스왑 스프레드와 변동성을 이용하여 회귀분석을 실시하였다. GMM 결과와 유사하게 단기 스왑 스프레드는 유의적인 결과를 보이거나 변동성은 유의적인 결과를 보이지 못하였다. 본 연구에서 제시한 모형은 1요인 모형을 포괄(nested)하고 있어 1요인 모형으로 스왑 스프레드의 기간구조를 설명할 수 있을 것으로 판단된다. 본 연구에서 단기 스왑 스프레드의 변동성이 GARCH효과가 있음에도 제시한 모형의 변동성이 유의적인 결과를 보이지 못함 이유 중 하나는 변동성 계산 시 초단기 스왑 스프레드의 대응치로 1년 만기 단기 스왑 스프레드가 부적합한 것으로 판단된다. 이는 본 연구의 한계점이기도 하다.

확률변동성을 추가한 대부분의 금리기간구조 연구를 보면 hyper-geometric 함수가 채권가격에 내재되어 있어 채권의 폐쇄형공식을 구하지 못하고 수치해석을 이용 계산하여, 시계열·횡단면 자료를 통합한 실증분석에 어려움이 존재한다. Baduzzi et al.(1996)의 확률변동성을 추가한 금리의 기간구조연구에서도 시계열·횡단면 자료를 통합한 실증분석을 하지 않고 시계열 분석만을 수행하였다. 따라서 본 연구의 공헌은 폐쇄형공식을 도출함과 동시에 이를 이용 스프레드의 기간구조에 대하여 시계열·횡단면 자료를 통합한 완전한 실증분석을 수행한데 있다고 하겠다. 비록 국내자료의 설명력이 낮기는 하지만 본 연구모형을 해외자료에 이용해보는 것도 모형의 검증에 필요할 것으로 판단된다. 이는 추후 연구로 남기기로 하겠다.

## 참고문헌

- 강병진, 「원화 이자율 스왑 스프레드 및 기간구조의 결정요인」, 『금융공학연구』, 제8권, 제2호, 2009, pp. 1-33.
- 김진호·김세완, 「역전된 스왑금리와 차익거래 지속의 이례현상 분석」, 한국금융학회 발표논문, 2008.
- 구본일·엄영호·최한복, 「원화이자율 스왑 시장에 대한 실증연구: 이론 이자율 스왑금리 대비 평가오차와 차익거래 유인 분석을 중심으로」, 『한국증권학회지』, 39집, 2010, pp. 59-101.
- 원승연, 「차익거래와 스왑 스프레드의 역전 현상」, 『선물연구』, 제18권, 2010, pp.43-75.
- 원승연·한상범, 「스왑 스프레드 역전 현상과 채권시장의 효율성: 현물 매수 차익거래의 역할을 중심으로」, 『보험금융연구』, 20권, 2009, pp. 97-124.
- 임상규·장봉규, 「한국시장에서의 이자율 스왑 스프레드 결정 요인 연구」, 『산업경제연구』, 20권, 2007, pp. 1105-1129.
- Balduzzi, P., Das, S. R., Foresi, S. and Sundaram, R., “A Simple Approach to Three-Factor Affine Term Structure Models”, *Journal of Fixed Income*, 1996, pp. 43-53.
- Brown, K. C., Harlow, W. V. and Smith, D. J., “An Empirical Analysis of Interest Rate Swap Spreads”, *Journal of Fixed Income*, 1994, pp.61-78.
- Chen, L., “A Bond Pricing Formula under a Non-Trivial, Three-Factor Model of Interest Rates”, *Economics Letters*, Vol 51, 1996, pp. 95-99.
- Collin-Dufresne, P., Solnik, B., “On the Term Structure of Default Premia in the Swap and Libor Market”, Working Paper, 2000.
- Cortes, F., “Understanding the Term Structure of Swap Spreads”, Working Paper, Bank of England, 2006.

- Diebold, F. X., Li, C., and Yue, V. Z., “Global Yield Curve Dynamics and Interactions: A Dynamic Nelson-Siegel Approach”, *Journal of Econometrics*, Vol 146, 2008, pp. 351-363.
- Duffie, D., Singleton, K. , “An Econometric Model of the Term Structure of Interest Rate Swap Yields”, *Journal of Finance*, Vol 52, 1997, pp. 1287-1321.
- Fong, G, Vasicek, O., “Interest Rate Volatility as a Stochastic Factor”, Working Paper, 1991.
- Grinblatt, M., “An Analytic Solution for Interest Rate Swap Spreads”, Working Paper, 2002.
- He, H., “Modeling Term Structures of Swap Spreads”, Working Paper, 2001.
- Liu, L., Longstaff, F. and Mandell, R. E., “The Market Price of Risk in Interest Rate Swaps: The Roles of Default and Liquidity Risks”, *Journal of Business*, Vol 79, 2006, pp. 2337-2359.
- Longstaff, F. A., Schwartz, E. S., “Interest Rate Volatility and Term Structure; A Two-Factor General Equilibrium Model”, *The Journal of Finance*, Vol. 47, No. 4, 1992, pp. 1259-1281.
- Reiner, E., “Calibrating a Three-Factor Libor Market Model”, Working Paper, 2004.

## 【부 록】 Proof of Theorem

본 연구의 모형은 아파인(Affine) 모형이므로 함수  $F$ 는 다음의 형태를 만족한다.

$$F(s, v, \tau) = A(\tau)e^{-B(\tau)s - C(\tau)v}.$$

$$F_s = P(-B)$$

$$F_{ss} = PB^2$$

$$F_v = F(-C)$$

$$F_{vv} = FC^2$$

$$-F_t = F_\tau = \frac{A'}{A}F + (-B's - C'v)F.$$

로부터 위 식을 식 (6)에 대입하면 다음의 편미분방정식이 성립된다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}vFB^2 + \frac{1}{2}\delta^2vFC^2 + (\alpha(\bar{s} - s) + \lambda_s v)F(-B) \\ + (\gamma\bar{v} - \gamma'v)F(-C) - \frac{A'}{A}F + (B's + C'v)F - sF = 0 \end{aligned} \quad (A1)$$

위 식 (A1)의 편미분방정식을  $s, v$ 을 중심으로 정리하면 다음의 세 개의 미분방정식이 생기게 된다. 즉,

$$\alpha B + B' - 1 = 0, B(0) = 0. \quad (A2)$$

$$\frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{2}\delta^2C^2 - \lambda_s B + \gamma' C + C' = 0, C(0) = 0. \quad (A3)$$

$$\alpha \bar{s} B + \gamma \bar{v} C + \frac{A'}{A} = 0, A(0) = 1. \quad (A4)$$

식 (A2)의 해는 Vasicek 형태이므로 다음과 같다.

$$B(\tau) = \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha}.$$

한편 식 (A3)는 Riccati 형태의 미분방정식이므로 Fong and Vasicek(1991)과 Chen (1996)을 따라 다음의 변환을 한다.

$$C(\tau) = \frac{2}{\delta^2} \frac{x'}{x}$$

여기서  $x(\tau)$ 는 다음을 만족한다.

$$x'' + \gamma' x' + \frac{\delta^2}{2} \left( \frac{\lambda_s}{\alpha} (e^{-\alpha\tau} - 1) + \frac{1}{2\alpha^2} (e^{-\alpha\tau} - 1)^2 \right) x = 0$$

따라서 해는 Chen(1996)과 유사한 결과가 도출된다. 한편  $A(\tau)$ 의 경우는  $C(\tau)$ 의 형태가  $\frac{w(\tau)'}{w(\tau)}$ 을 갖게 되므로, 0부터  $\tau$ 까지 적분을 하면 다음이 만족되며,

$$\ln A(\tau) = - \left( \tau + \frac{\exp(-\alpha\tau)}{k} - \frac{1}{k} \right) \bar{s} - \frac{2\gamma\bar{v}}{\delta^2} \ln \frac{x(\tau)}{x(0)}.$$

위 식의 해는 다음과 같게 된다.

$$A(\tau) = \exp \left( - \left( \tau + \frac{\exp(-\alpha\tau)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \bar{s} \right) \left( \frac{x(\tau)}{x(0)} \right)^{-\frac{2\gamma\bar{v}}{\delta^2}}. \quad \blacksquare$$

## Abstract

This paper develops a two-factor model of the term structure of the swap spread. In our model, the swap spread depends on 1) the instantaneous swap rate as the first factor and 2) the stochastic volatility of the swap spread as the second factor. We propose the closed form solution of swap spread from the chosen two factors. We estimate the stochastic volatility from the GARCH(1,1) model. We also test our model by using GMM based on the cross sectional data. The empirical result shows that the volatility is not significant for explaining the term structure of swap spread, but the first factor model has the explanatory power for the term structure of swap spread in Korean market.

※ **Key words:** GARCH, GMM, stochastic volatility, swap spread, term structure of interest rate