

# 베이지언 통계기법을 이용한 변액연금 보증준비금의 평가\*

## Bayesian Analysis of Reserving Minimum Guarantees in Variable Annuities

유 병 학\*\* · 고 방 원\*\*\* · 권 혁 성\*\*\*\*

Byoung Hark Yoo · Bangwon Ko · Hyuk-Sung Kwon

본 연구에서는 주식수익률 모형의 선정이 변액연금의 보증준비금에 미치는 영향을 베이지언 통계기법을 통해 분석하였다. 기존 연구에서 사용한 최대가능도추정법으로는 추정된 보증준비금의 불확실성을 반영하기 어렵다. 그러나 베이지언 통계기법을 이용할 경우 하면 추정된 보증준비금의 불확실성을 쉽게 반영할 수 있을 뿐만 아니라 로그 정규모형과 국면전환모형을 대상으로 보증준비금의 차이에 관한 통계적인 평가가 가능해 진다. 분석 결과 모형별로 산출된 GMAB 보증준비금 평가금액에는 통계적으로 유의한 차이가 존재하는 것을 확인할 수 있었다. 또한, 기존의 관련연구와는 달리 초기 국면을 다르게 설정하여 보증준비금을 평가한 결과 5년 이내에 만기가 도래하는 GMAB 보증옵션의 경우 초기 국면의 상태가 보증준비금에 상당한 영향을 주는 것을 확인하였다.

국문 색인어: 국면전환 로그정규모형, 베이지언 통계, 변액연금, 보증준비금

한국연구재단 분류 연구분야 코드: C030805

\* 본 연구는 2011년도 송실대학교 교내학술연구비 지원에 의하여 수행되었음.

\*\* 송실대학교 경제학과 조교수(harkyoo@ssu.ac.kr), 주저자

\*\*\* 송실대학교 정보통계보험수리학과 조교수(bko@ssu.ac.kr), 교신저자

\*\*\*\* 송실대학교 정보통계보험수리학과 조교수(hskwon@ssu.ac.kr)

논문 투고일: 2013. 03. 11, 논문 최종 수정일: 2013. 05. 16, 논문 게재 확정일: 2013. 08. 14

## I. 서론

변액연금은 전통적인 연금과는 달리 투자실적에 따라 급부가 변동하는 연금으로 2000년대 초반 국내에 소개된 이래 급속한 발전을 해왔다<sup>1)</sup>. 기본적으로 변액연금은 투자로 인한 리스크가 보험계약자에게 귀속되는 금융상품이지만, 다양한 최저급부 보증옵션의 도입을 통해 보험계약자는 투자리스크를 보험회사에게 전가할 수 있고, 보험회사는 보험계약자의 요구를 충족시키며 변액연금 시장의 성장을 견인할 수 있었다.

변액연금 보증옵션의 손익구조는 파생상품의 풋옵션과 매우 유사하기 때문에 보험회사가 보증옵션의 위험관리에 소홀히 할 경우 상당한 위험에 직면할 수 있음은 널리 알려진 사실이다. 최근 국내외를 막론하고 변액연금 보증옵션의 위험관리를 위한 가이드라인이 제공되고 있는 것은 보험산업의 건전한 발전을 위해 매우 바람직한 현상이라고 할 수 있다. 많은 관련연구가 이루어진 북미의 경우에는 캐나다의 CIA(2002) 보고서와 미국의 AAA(2005) 보고서가, 그리고 국내의 경우에는 보험개발원(2009, 2010, 2011)의 보고서가 보증준비금의 평가를 위한 가이드라인을 제시하고 있다.

제시된 방법들은 모두 확률론적 시나리오를 통해 보증준비금을 평가하도록 규정하고 있으며 구체적인 산출방법에서는 약간의 차이점을 보이고 있다. 본 연구에서는 이러한 차이점 가운데 보증준비금의 평가에 가장 중대한 영향을 미치는 요인으로 간주되는 주식수익률 모형에 주안점을 맞추고, 주식수익률 모형의 선정에 따른 영향을 분석해 보았다. 특히 베이지언 통계기법에 기초하여 모수의 불확실성을 반영한 보증준비금의 최고사후밀도구간(Highest Posterior Density Interval, HPDI)을 구하고, 이를 바탕으로 주식수익률 모형의 선정에서 비롯된 보증준비금의 차이를 분석하였는데 이는 기존의 연구에서는 찾아볼 수 없는 새로운 시도라고 할 수 있다.

1) 우리나라 변액연금 보험료 추이는 생명보험협회에서 출간하는 월간 생명보험 통계에서 확인할 수 있다.

이를 위해 본 연구에서 고려하고자 하는 주식수익률 모형은 로그정규(LogNormal, LN) 모형과 2-국면전환 로그정규모형(Regime Switching LogNormal with 2 Regimes, RSLN2)이다. LN 모형 또는 로그정규모형은 국내의 관련연구가 초기 단계임을 감안하여 보험개발원(2009, 2010, 2011)과 권용재(2010) 등에서 제시한 모형으로, 구현하기 용이하지만 장기간의 주식수익률을 모형화하기에 부적합한 것으로 간주되고 있다. Hardy(2001, 2003)가 제안한 RSLN2 모형은 주식시장의 변동성에 따라 국면전환이 가능한 2개의 국면을 가지는 로그정규모형으로 변동성 군집현상(volatility clustering), 두터운 꼬리(heavy tail) 등과 같은 주식시장의 전형적인 특징을 비교적 쉽게 모형화할 수 있으며, 현재 북미에서 많이 사용하고 있는 모형이다. 한편, AAA 보고서에서 예시한 SLV(Stochastic Log Volatility) 모형은 Hardy et al.(2006)의 실증분석결과에서 RSLN2 모형보다 좋지 못한 적합도를 나타냈으므로 본 연구의 논의대상에서 제외하였다.

변액연금을 주제로 한 국내의 최근 연구로는 엄영호·김계홍(2009), 권용재(2010), 노건엽(2012), 김윤희·김창기(2011, 2012) 등을 들 수 있다. 이 가운데 엄영호·김계홍(2009), 권용재(2010), 김윤희·김창기(2011)는 기하 브라운 운동(Geometric Brownian Motion 또는 LN) 모형을 가정하고 확률론적 시나리오 방식을 적용하여 보증준비금을 산출하였다. 한편 노건엽(2012)은 최저사망보험금 보증옵션(Guaranteed Minimum Death Benefit, GMDB)의 보증준비금을 분석하기 위해 국내 주가지수에 LN, AR(1), ARCH, RSLN2 모형을 적용하여 RSLN2의 적합결과가 가장 우수함을 주장하였고, 김윤희·김창기(2012)는 GARCH, EGARCH의 금융시계열 모형을 적용하여 변액연금의 보증옵션 가운데 최저연금적립금 보증옵션(Guaranteed Minimum Accumulation Benefit, GMAB)의 보증준비금을 분석하였다.

기존의 국내외 연구와 비교할 때 본 연구가 가지는 학술적인 기여는 다음과 같다. 먼저 베이지언 통계기법을 도입하여 GMAB 보증준비금의 평가에 모수의 불확실성을 반영했다는 점이다. 지금까지 대부분의 국내외 관련 연구는 모수를 추정하기 위해 최대가능도추정법을 이용하였고 최종적인 모수의 추정치를 얻기 위해서는 해찾기 알고리즘을 사용해야하는 경우가 많았다. 이때 해찾기 알고리즘은

초기값의 선정에 따라 추정값이 민감하게 변할 수 있는 문제점을 가지고 있었다. 본 연구에서는 베이지언 통계기법을 기반으로 이러한 문제점을 극복하였고, 추정된 모수의 불확실성을 보증준비금의 평가에 반영하여 주식수익률 모형간의 비교가 가능하도록 하였다.

또한, 본 연구는 RSLN2 모형에서 현재 국면상태를 추정한 뒤 현재 국면상태의 차이로부터 발생하는 보증준비금의 변화를 조사했다는 측면에서 의의를 찾을 수 있다. Hardy(2001, 2003)는 RSLN2 모형을 이용하여 보증준비금을 계산할 때 현재 국면상태를 고려하지 않았으나 본 연구에서는 현재 국면상태가 보증준비금에 미치는 영향을 분석함으로써 보증옵션의 위험관리를 위해 시사하는 바가 작지 않다고 할 수 있다.

본 연구의 GMAB 보증준비금에 대한 분석결과는 LN 모형과 RSLN2 모형 하에서 산출된 보증준비금에는 통계적으로 상당한 차이가 존재한다는 것을 시사하고 있으며, 보다 현실적인 위험관리를 위해서는 RSLN2 모형을 이용하는 것이 적절하다고 할 수 있다. 또한, 주식수익률 모형으로 RSLN2 모형을 이용하는 경우 조만간 만기가 도래하는 GMAB의 보증준비금은 현재의 국면상태로부터 상당한 영향을 받을 수 있음을 확인하였는데, 향후 국내에서 RSLN2 모형을 실무에 이용하도록 도입할 경우 이와 관련된 심층적인 논의가 필요하다고 할 수 있다.

본 논문은 다음과 같이 구성되었다. 제II장에서는 변액연금의 보증옵션, 보증준비금, 주식수익률 모형 및 베이지언 추정방법 등의 이론적 배경을 간략히 설명하고 분석의 편의를 위해 필요한 가정을 기술하였다. 제III장에서는 베이지언 모수 추정의 결과 및 보증준비금의 평가결과를 비교하였으며, 제IV장에서는 연구결과를 요약하고 본 연구의 한계점 및 향후 연구과제에 관해 논의하였다.

## II. 이론적 배경 및 가정

### 1. 변액연금 보증옵션 및 보증준비금

변액연금은 보험계약자가 납입한 보험료를 주식, 채권 등의 금융상품에 투자한 뒤 그 운용성과에 따라 급부가 변동하도록 설계된 실적배당 연금으로 투자에 따른 위험이 보험계약자에게 귀속된다. 보험계약자는 다양한 보증옵션을 통해 투자 위험의 최대한도를 제한할 수 있는데 국내에서 판매되는 대표적인 보증옵션으로는 GMDB와 GMAB를 들 수 있다. GMDB는 투자실적과 관계없이 사망 시 최저한도의 사망보험금을 보장하는 옵션이고, GMAB는 연금개시 시점에서 최저한도의 계약자 적립금을 보장하는 옵션이다. 보험회사는 이와 같은 보증옵션 혜택에 대해 보증비용을 부과하고 있는데 국내 보증비용의 적정성에 관해서는 김용희·김창기(2011)를 참고하기 바란다.

한편 Hardy(2003), 김용희·김창기(2011, 2012) 등에서 언급된 바와 같이 GMAB는 GMDB보다 보증수수료의 수준이 높고 보험회사를 큰 위험에 노출시키는 것으로 알려져 있다. 본 연구에서는 GMAB의 대표적 보장유형인 기납입보험료(Return Of Premium, ROP) 보장, 리셋(reset) 보장 가운데 기납입보험료의 보장만을 고려한다. 분석의 편의를 위해 Hardy(2001)와 마찬가지로 다음을 가정한다.

- 가정 1. 보험계약자는 일시납보험료를 납부한다.
- 가정 2. 계약기간 동안 사망을 포함한 중도해약이나 인출은 발생하지 않는다.
- 가정 3. 보증비용을 포함한 모든 비용은 보험계약자의 투자계정에서 연속으로 차감된다.

비용이 차감되기 이전에  $t$ 시점의 투자계정 금액을  $F_t$ , 월별 수수료율을  $m$ , 연금개시 시점까지 남은 개월 수를  $n$ 이라 할 때<sup>2)</sup>, 연금개시 시점에서 GMAB 판매로

2) 본 연구에서 단위기간은 1개월로 한다.

인한 보험회사의 손실은

$$X = \max\{F_0 - F_n e^{-nm}, 0\} \quad (1)$$

으로 나타낼 수 있다. 여기서  $F_0$ 는 일시납보험료이다.

해외의 경우와 마찬가지로 국내에서도 확률론적 시나리오의 생성을 통해 적정 수준의 보증준비금을 산출하도록 하고 있다. 국내의 경우에는 보증준비금의 평가를 위해 보증옵션의 헤징(hedging)은 고려하지 않고<sup>3)</sup>, 확률론적 시나리오를 통해 순손실 금액의 현가를 생성한 뒤 이로부터 70분위 수준에서 조건부꼬리기댓값(Conditional Tail Expectation, CTE) 또는 CTE(70)을 산출하도록 요구하고 있다. 여기서 순손실 금액의 현가는 손실  $X$ 의 현가에서 보증비용 수입의 현가를 차감한 값이고, CTE(70)은 확률론적 시나리오를 통해 생성된 순손실의 현가 가운데 70분위수를 초과하는 값들의 평균이다.

분석의 편의를 위해 Hardy의 분석에서와 마찬가지로 다음의 가정을 추가한다.

가정 4. CTE는 손실 (1)의 현가로부터 산출한다.

가정 5. 연이율(annual continuous rate of interest)은 5%로 일정하다.

가정 6. 투자계정의 수익률은 주식수익률을 따른다<sup>4)</sup>.

가정 4는 이론적인 보증비용을 산출해야 하는 부담을 줄이고, 주식수익률 모형의 변화에 따른 영향에 집중하기 위해 가정한 것으로 본 논문의 제III장의 분석결과는  $X$ 의 70분위수를 초과하는 값들의 평균이다.

위의 가정들은 주식수익률 모형의 선택에 따른 보증준비금의 변화를 보다 용이하게 분석하기 위해 가정한 것으로 국내의 현실과는 거리가 있다. 가령 국내의 경우 변액연금 판매에서 일시납의 비중이 매우 작는데, 이를 보완하기 위해 먼저 가

3) Hardy(2003, 2006)은 보증옵션의 동적헤징을 통해 CTE를 상당히 줄일 수 있음을 시사한다.

4) 보험계약자는 채권형 보다는 주식형에 집중투자하는 경우 보증옵션의 가치를 높일 수 있다.

정 1의 일시납 보험료인 경우를 분석한 뒤 분할납 보험료인 경우도 분석하였다.

가정 1'. 보험계약자는 보험계약기간 동안 매년 초에 균등한 금액의 보험료를 분할 납부한다.

## 2. 주식수익률 모형

보충준비금은 사망률, 해약률, 이자율 등 다양한 보험계리적 가정의 영향을 받지만 주식수익률로부터 가장 큰 영향을 받는다. 주식수익률을 모형화하기 위해  $t$  시점( $t = 0, 1, \dots$ )에서 주가를  $S_t$ 로 나타내고,  $t$ 시점으로부터 단위기간동안의 주식수익률  $Y_t$ 를

$$Y_t = \log \frac{S_{t+1}}{S_t}$$

라 정의할 때, 가정 6에 의해

$$F_t = F_0 \frac{S_t}{S_0} = F_0 e^{Y_0 + Y_1 + \dots + Y_{t-1}}$$

가 성립한다. 다음은 LN 모형과 RSLN2 모형에 관해 살펴본다.

### 가. LN 모형<sup>5)</sup>

LN 모형은 단순하고 적용이 용이하다는 장점을 갖는다. 일반적으로 주가가 LN 모형을 따른다는 것은 다음의 수식으로 정의할 수 있다.

$$Y_t = \mu + \sigma z_t \sim N(\mu, \sigma^2) \tag{2}$$

식 (2)는  $t$ 시점에서 장래 단위기간의 주식수익률이 정규분포를 따른다는 것을 의미한다. 여기서  $\mu$ 와  $\sigma$ 는 단위기간동안 로그수익률의 평균과 표준편차를 나타

5) 국내의 관련연구에서 LN 모형과 GBM 모형은 동일한 의미를 갖는 것으로 사용되고 있다.

내고  $z_t$ 는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다. 한편 국내의 관련 연구에서 주가가 LN 모형을 따른다고 표현할 때 서로 겹치지 않는(non-overlapping) 단위기간의 로그수익률이 서로 독립이라고 암묵적으로 가정한 경우를 많이 살펴 볼 수 있는데 본 연구에서도 편의상 이러한 전제를 따르도록 한다.

식 (2)에서 알 수 있듯이 LN 모형은 경기상황과는 무관하게 주식수익률의 평균과 표준편차가 상수로 주어지는 가장 단순한 모형이다. LN 모형은 다른 금융시계열 모형에 비해 장기간의 주식수익률 모형으로는 적합하지 않다는 것을 국내외의 많은 실증분석을 통해 살펴볼 수 있는데 관심이 있는 독자는 Hardy(2001, 2003, 2006), 김용희·김창기(2012) 등을 참조하기 바란다. 그러나, 변액연금만기가 10년 이상인 장기계약임을 감안하면, LN 모형을 변액연금의 주식수익률 모형으로 사용하는 것은 다소 무리가 따를 수 있다.

참고로 보험개발원의 자산 시나리오 산출보고서(2011)는 국내 주가지수의 데이터 누적기간이 짧기 때문에 모형의 적합여부를 판단하는데 한계가 존재한다는 근거로 LN<sup>6)</sup> 모형을 선택하는 것이 합리적이라고 주장하였다.

## 나. RSLN2 모형

RSLN2 모형은 변액연금과 같이 만기가 긴 주가연동형 보험상품의 위험관리를 위한 장기간의 주식수익률 모형연구에서 Hardy(2001, 2003)가 제안한 모형이다. 일반적으로 국면전환 모형은 경기변동(business cycle) 또는 변동성의 크기에 따라 주식수익률이 따르는 몇 개의 국면을 설정한 뒤 마르코프 연쇄(Markov Chain)를 통해 국면사이의 전환이 가능하도록 모형화한 것이다. (즉, 현재 국면은 1 단위기간 전 시점의 국면에만 의존한다.) RSLN2 모형은 이러한 국면전환 모형 중에서 국

6) 보험개발원의 자산 시나리오 산출보고서에서 LN1 모형은 과거 데이터에 근거하여 모수를 추정하는 것이 아니고 장래에 대한 기대에 근거하여(무위험수익률 + 리스크 프리미엄)의 형태로 모수를 추정하는 것이며, 연간 주식수익률의 평균은 7.6%, 표준편차는 28.5%의 값으로 데이터를 통해 모수를 추정하는 것보다 보수적인 값을 사용하였다. LN2 모형은 과거 30년간(1980년 1월~2010년 12월) KOSPI 데이터를 통해 모수를 추정하는 것이며, 주식수익률의 평균은 13.7%, 표준편차는 27.9%이다.

면전환이 가능한 2개의 국면만을 설정하고 특정한 국면 내에서 주식수익률이 로그정규모형을 따른다고 가정한 것이다. 즉,  $\rho_t$  ( $\rho_t = 1$  또는 2)를  $t$ 시점에서 국면의 상태를 나타내는 확률변수라 할 때

$$\rho_t | \rho_{t-1} = \begin{cases} 1 & \text{with probability } p_{\rho_{t-1}, 1} \\ 2 & \text{with probability } p_{\rho_{t-1}, 2} \end{cases} \quad (3)$$

이고, 특정 국면 내에서 주식수익률은

$$Y_t | \rho_t = \mu_{\rho_t} + \sigma_{\rho_t} z_t \sim N(\mu_{\rho_t}, \sigma_{\rho_t}^2) \quad (4)$$

이다. 여기서  $\rho_t = 1$  은  $t$ 시점에서 주식수익률이 변동성이 작은 국면에 속해 있는 경우를,  $\rho_t = 2$  는 반대의 경우를 의미하며( $\sigma_1 < \sigma_2$ ),  $p_{1,1}$ ,  $p_{2,2}$ 은 마르코프 연쇄의 전이확률을 나타낸다.  $z_t$ 는 식 (2)에서와 마찬가지로 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.

대부분의 모수추정에서 변동성이 작은 국면은 높은 주식수익률을 가지는 것으로 추정되므로( $\hat{\mu}_1 > \hat{\mu}_2$ )  $\rho_t = 1$  인 경우를 강세장,  $\rho_t = 2$  인 경우를 약세장으로 해석하기도 한다. 또한 전이확률  $p_{1,2}$ 와  $p_{2,1}$ 은 모두 0에 가까운 추정값을 가진다. 이것은 RSLN2 모형을 가정할 경우 변동성이 크고 투자수익률은 낮은 상황을 지속적으로 생성할 수 있다는 것을 의미한다. 이러한 이유로 RSLN2 모형 하에서 LN 모형보다 보수적인 보증준비금의 평가가 이루어지게 된다. CIA(2002) 보고서는 특정한 주식수익률 모형을 지정하여 이를 사용하도록 요구하지는 않지만 보증준비금의 평가 예시를 통해 RSLN2 모형의 사용을 권장하고 있다.

RSLN2 모형은 2개의 국면으로 변동성 군집현상, 두터운 꼬리 등을 포함한 주식시장의 전형적인 특징을 효과적으로 모형화한다. 국내외의 실증분석에 따르면 Hardy(2001, 2003)는 미국의 S&P 500 지수와 캐나다의 TSE 300 지수에 다양한 시계열 모형을 적용하여 RSLN2 모형의 적합결과가 가장 우수하다는 결론에 도달하였으며, 노건엽(2012)은 국내의 KOSPI 지수에 적용하여 Hardy와 유사한 결과를 확인하였다. 따라서 본 연구에서는 이와 같은 적합도 분석을 재차 수행하지 않는다.

또한, RSLN2 모형을 추정할 때 각 시점의 국면상태를 추정할 수 있기 때문에 국면상태의 정보를 활용한 보증준비금의 평가가 가능해진다. Hardy(2001, 2003)는 현재 국면상태가 1과 2인 경우를 가정하고 각각의 경우에 해당하는 보증준비금을 산출한 다음, 전 단계에서 산출한 보증준비금의 가중평균값<sup>7)</sup>을 최종 보증준비금으로 평가함으로써 현재의 국면상태를 고려하지 않았다. 그러나 변액연금 가입 이후 시간의 경과에 따라 다음과 같은 상황이 발생할 수 있다. 즉, 보증옵션의 만기는 오래 남아있지 않은 상태에서 국면 상태별 보증준비금에 큰 차이가 발생하는 경우이다. 제Ⅲ장에서 살펴 볼 수 있듯이 이러한 상황은 개연성이 높음에도 불구하고 현재까지 관련연구에서는 이러한 가능성을 전혀 고려하지 않았다. 본 연구는 국면상태의 정보를 반영할 때 만기의 변화에 따른 보증준비금을 변화를 살펴봄으로써 이처럼 기존의 방식에서 간과되거나 혹은 인식하지 못했던 문제점을 새로이 조명해 보고자 한다.

### 3. 베이지언 추정방법

베이지언 추정은 자료  $Y$ 를 조건부로 한, 모수  $\theta$ 와 비관측변수 또는 상태변수  $X$ 의 사후분포(posterior distribution)  $p(\theta, X|Y)$ 를 이용하여 이루어진다. 먼저 사후분포는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} p(\theta, X|Y) &\propto p(\theta, X)p(Y|\theta, X) \\ &\propto p(\theta)p(X|\theta)p(Y|\theta, X) \end{aligned} \quad (5)$$

식 (5)의 첫째 줄에서는 베이즈 정리를 이용하였고, 둘째 줄에서는 조건부 확률의 정의를 이용하였다. 여기서  $p(\theta, X)$ 는 사전분포(prior distribution)로서 통계적 추론자의 주관적인 확률을 나타낸다.  $p(Y|\theta, X)$ 는 가능도함수(likelihood function)로서 모형에 대한 정보를 나타낸다.

7) 여기서 가중치는 마르코프 연쇄의 정상확률(stationary probabilities) 값을 이용한다.

보다 구체적인 통계적 추론을 위해서는 결합사후분포  $p(\theta, X|Y)$ 로부터 주변사후분포  $p(\theta|Y)$ 와  $p(X|Y)$ 를 구해야 하는데 모형이 복잡한 경우 주변사후분포를 수식으로 도출하는 것은 불가능하다. 따라서 대부분의 경우 수치적 방법(numerical method)을 이용하여 주변사후분포를 구하게 된다. 본 연구에서는 최근에 가장 많이 사용되는 Markov Chain Monte Carlo(MCMC) 방법을 이용하여 주변사후분포를 구하였다.

MCMC방법은 다음과 같이 실행될 수 있다. 먼저 초기값  $\theta^{(0)}$ 와  $X^{(0)}$ 을 설정한 후 조건부 확률분포  $p(\theta|X^{(0)}, Y)$ 에서  $\theta^{(1)}$ 를 뽑아내고, 그것을 이용하여 조건부 확률분포  $p(X|\theta^{(1)}, Y)$ 에서  $X^{(1)}$ 를 뽑아낸다. 이 과정을 반복하면  $\{X^{(g)}, \theta^{(g)}\}_{g=1}^G$ 의 집합을 얻을 수 있는데 일반적인 가정 하에서 수열의 확률분포는 결합 사후확률분포  $p(\theta, X|Y)$ 에 수렴하게 된다. 이 때 조건부 확률분포가 알려져 있는 분포라면 Gibbs Samplers를 이용하고 그렇지 않는 경우에는 Metropolis-Hastings(MH) 알고리즘을 사용한다.

MCMC방법을 통해 각 모수와 상태변수의 주변사후분포를 얻게 되지만 일반적으로는 그 평균과 최고사후밀도구간(highest posterior density interval, HPDI)만을 결과로 제출하기도 한다. 다음의 두 가지 성질을 동시에 만족하는 집합  $C$ 를  $\theta$ 의  $100(1-\alpha)\%$  최고사후밀도구간(HPDI)이라고 한다.

- 1)  $P(\theta \in C|Y) \geq 1 - \alpha$
- 2) 모든  $\theta_1 \in C, \theta_2 \notin C$ 에 대해  $p(\theta_1|Y) \geq p(\theta_2|Y)$ 가 성립.

어떤 함수  $f(\theta, X)$ 가 있을 때  $E(f(\theta, X)|Y)$ 에 대한 추정값은  $\frac{1}{G} \sum_{g=1}^G f(\theta^{(g)}, X^{(g)})$ 로 구해질 수 있다<sup>8)</sup>. 다음 장에서 각 모형의 모수들과 상태변수의 추정값을 이용하여 CTE에 대한 추정값을 구할 때도 이와 같은 방법을 사용하였다. CTE는 모수들과 상태

8) 베이저언 추정과 MCMC방법에 대한 내용은 Johannes and Polson(2010)을 참조하기 바란다.

변수의 복잡한 비선형함수이므로 최대가능도추정법(maximum likelihood estimation)과 같은 추정방법을 이용하면 모수의 추정값에 포함되어 있는 불확실성을 고려하기 어렵다. 그러나 베이지언 방법은 모수의 MCMC 추출값을 이용하므로 모수의 추정에 포함되어 있는 불확실성을 고려할 수 있게 해준다. 따라서 CTE의 추정값뿐만 아니라 CTE의 최고사후밀도구간까지 구할 수 있어서 각 모형에 따른 CTE값의 차이가 통계적으로 유의한지를 확인할 수 있다.

### 가. LN 모형의 추정방법

식 (2)의 LN모형에서 모수는  $(\mu, \sigma^2)$ 이고 상태변수는 없다.  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_T)'$ 라 하고  $\theta = (\mu, \sigma^2)'$ 라고 할 때, 본 모형의 사후분포는 다음과 같이 결정된다.

$$\begin{aligned} p(\theta | Y) &\propto p(\mu, \sigma^2) p(Y | \mu, \sigma^2) \\ &\propto p(\mu) p(\sigma^2 | \mu) p(Y | \mu, \sigma^2) \end{aligned}$$

사전분포의 자세한 사항은 <표 1>에 나타내었다. MCMC추정은 다음과 같이 표현될 수 있다.

1.  $p(\mu | Y, \sigma^2)$ 로부터  $\mu$ 를 추출한다. (정규분포)
2.  $p(\sigma^2 | Y, \mu)$ 로부터  $\sigma^2$ 을 추출한다. (역감마분포)
3. 위 과정을 반복한다.

### 나. RSLN2 모형의 추정방법

식 (4)의 RSLN2모형에서 모수는  $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, p_{1,1}, p_{2,2})'$ 이고 상태변수는  $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_T)'$ 이다.  $\mu = (\mu_1, \mu_2)'$ ,  $\sigma^2 = (\sigma_1^2, \sigma_2^2)'$ ,  $p = (p_{11}, p_{22})'$  그리고  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_T)'$ 라 할 때 본 모형의 사후분포는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 p(\Theta, \rho | Y) &\propto p(\Theta, \rho) p(Y | \Theta, \rho) \\
 &\propto p(\Theta) p(\rho | \Theta) p(Y | \rho, X)
 \end{aligned}$$

〈표 2〉에 나타난 사전분포와 다음과 같은 MCMC방법을 이용하여 추정하였다<sup>9)</sup>.

1.  $p(\mu | Y, \sigma^2, p, \rho)$ 에서  $\mu$ 를 추출한다. (정규분포)
2.  $p(\sigma^2 | Y, \mu, p, \rho)$ 로부터  $\sigma^2$ 을 추출한다. (역감마분포)
3.  $p(p | Y, \mu, \sigma^2, \rho)$ 로부터  $p$ 를 추출한다. (베타분포)
4.  $p(\rho | Y, \mu, \sigma^2, p)$ 로부터  $\rho$ 을 추출한다.
5. 위 과정을 반복한다.

### III. 분석결과

#### 1. 모수의 추정결과

본 연구에서는 1980년 1월부터 2012년 8월까지 국내 KOSPI 지수(종가)를 대상으로 베이지언 통계기법을 적용하여 모수를 추정하였다. 〈표 1〉은 LN 모형에 대한 추정결과이다. 여기서  $\mu$ ,  $\sigma$ 는 월간 추가수익률에 대한 평균과 표준편차이다. 이를 연 단위(annual rate)로 환산하면<sup>10)</sup> 연간 추가수익률은 8.88%, 연간 변동성은 29.5%의 추정치를 얻고, 95% HPDI은 각각 [-1.08%, 18.96%]와 [27.47%, 31.59%]이다. 노건엽(2012)의 경우 1980년부터 2010년까지의 자료를 이용한 결과 모수의 최대가능도추정값이 각각 9.74%, 27.86%으로 본 연구의 결과와 유사한 것을 알 수 있다.

9) Regime Switching 모형과 추정에 대한 자세한 내용은 Kim and Nelson(1999)을 참조하기 바란다.

10) 추가수익률의 경우에는 월간 추정치에 12를 곱하고, 변동성의 경우에는 월간 추정치에  $\sqrt{12}$ 를 곱하여 계산하였다.

〈표 1〉 LN 모형의 베이지언 추정결과

	사전분포			사후분포	
	분포	모수1	모수2	평균	95% HPDI
$\mu$	정규	0	1	0.0074	[ -0.0009 , 0.0158 ]
$\sigma$	역감마	3	5	0.0852	[ 0.0793 , 0.0912 ]

주: 1)  $\sigma^2$ 의 사전분포를 역감마분포로 설정하였다.

2) 모수1과 모수2는 각각 정규분포의 경우 평균  $\mu$ 와 표준편차  $\sigma$ 를, 역감마분포의 경우 동분포의 확률밀도함수( $p_{IG}(x) \propto x^{-\alpha-1} \exp(-\frac{1}{x\theta})$ )에서의  $\alpha$ 와  $\theta$ 를 의미한다.

〈표 2〉는 RSLN2 모형에 대한 추정결과이다.  $\mu_1$ 과  $\mu_2$ 에 대한 추정치를 연 단위로 환산하면 각각 9.84%와 0.96%이고,  $\sigma_1$ 과  $\sigma_2$ 에 대한 추정치를 연 단위로 환산하면 각각 15.03%와 39.39%이다. 이 역시 노건엽(2012)의 결과와 크게 다르지 않다. 변동성이 낮은 국면에서의 평균( $\mu_1$ )은 양으로 통계적으로 유의하게 추정되고 변동성이 높은 국면에서의 평균( $\mu_2$ )이 통계적으로 유의하지 않게 나온 것도 Hardy(2003)와 같은 외국의 기존연구와 동일하다. 다만 한국의 경우 변동성이 큰

〈표 2〉 RSLN2 모형의 베이지언 추정결과

	사전분포			사후분포	
	분포	모수1	모수2	평균	95% HPDI
$\mu_1$	정규	0	1	0.0082	[ 0.0014 , 0.0148 ]
$\mu_2$	정규	0	1	0.0008	[ -0.0112 , 0.0117 ]
$\sigma_1$	역감마	3	5	0.0434	[ 0.0380 , 0.0492 ]
$\sigma_2$	역감마	3	5	0.1137	[ 0.0994 , 0.1281 ]
$p_{11}$	베타	9	1	0.9512	[ 0.9075 , 0.9901 ]
$p_{22}$	베타	9	1	0.9428	[ 0.8911 , 0.9877 ]

주: 1)  $\sigma^2$ 의 사전분포를 역감마분포로 설정하였다.

2) 모수1과 모수2는 각각 정규분포의 경우 평균과 표준편차를, 감마분포의 경우

동분포의 확률밀도함수( $p_G(x) \propto x^{\alpha-1} \exp(-\frac{x}{\theta})$ )에서의  $\alpha$ 와  $\theta$ 를, 역감마분포의 경우 동분포의

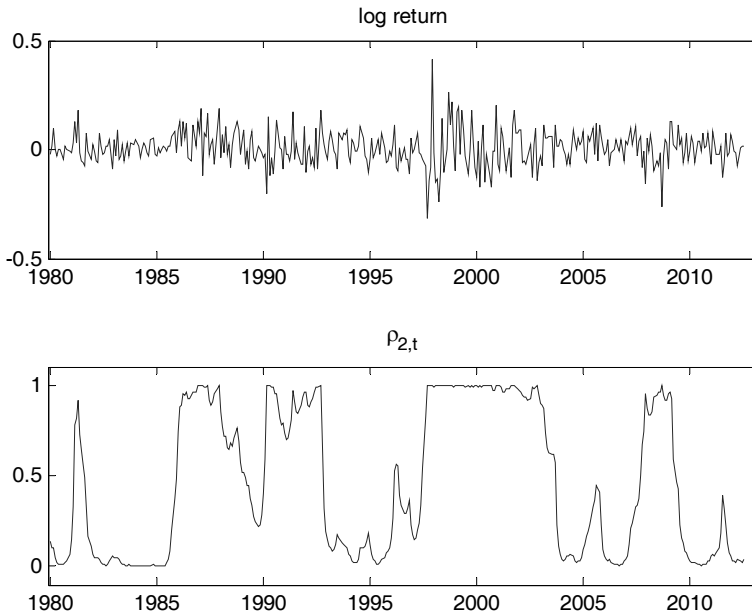
확률밀도함수( $p_{IG}(x) \propto x^{-\alpha-1} \exp(-\frac{1}{x\theta})$ )에서의  $\alpha$ 와  $\theta$ 를, 베타분포의 경우 동분포의 확률밀도

함수( $p_B(x) \propto x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ )에서의  $\alpha$ 와  $\beta$ 를 의미한다.

국면의 정상확률( $p_{12}/(p_{12} + p_{21})$ )이 본 연구에서는 0.46, 노건엽(2012)에서는 0.3으로 추정되어 미국의 경우(Hardy(2001)에서는 0.07)보다 큰 것으로 나타난다. 이는 개도국 금융시장의 특징이 반영된 결과로 해석할 수 있다.

〈그림 1〉에서 위 그림은 주가지수의 로그수익률이고 아래 그림은 RSLN2모형을 가정할 때  $t$ 시점에서 주식 수익률이 변동성이 큰 국면에 속할 확률  $\Pr(\rho_t = 2)$ 의 추정값을 나타낸 것이다. 1980년대 후반과 1990년대 초반에 변동성이 증가했었고, 그리고 1997년 외환위기 때 변동성이 다시 증가해서 2000년 초반까지 고변동성 기간이 유지되었다가 최근에는 2008년 국제신용위기 때 다시 한번 변동성이 증가하였다. 이러한 국면의 변화는 Cho and Yoo(2011)의 결과와 매우 유사하다.

〈그림 1〉 RSLN2 모형에서 국면상태의 추정결과



## 2. 주식수익률 모형의 차이에 따른 보증준비금의 비교

노건엽(2012)은 GMDB 보증준비금의 평가에서 RSLN2 모형이 LN 모형보다 좀 더 보수적인 값을 산출하지만 그 차이는 크지 않다고 주장하였다. 그러나 논의 과정에서 대소에 관한 명확한 기준을 제시하지 않았다. Hardy(2001)는 GMAB 보증준비금을 평가할 때 RSLN2 모형과 LN 모형 간에 상당한 차이가 발생한다고 주장하였으나 이에 관한 기준을 제시하지 않았다. 본 연구에서는 베이지언 통계기법을 사용함으로써 LN 모형에서 보증준비금과 RSLN2 모형에서 보증준비금의 차이가 통계적으로 유의한지를 분석하였다.

보다 자세히 설명하면, 앞서 도출한 추정결과를 이용하여 각 모형에 따른 CTE를 계산하여 비교하였다. 베이지언 추정방법에 대한 부분에서 설명했듯이 모수의 추정값에 내재되어 있는 불확실성을 고려하여 CTE의 추정값의 불확실성을 HPDI로 표현하였다. RSLN2 모형의 경우 만기까지의 국면의 변화를 시뮬레이션할 때 초기 국면은 Hardy(2003)와 같이 정상확률(stationary probability)을 이용하여 결정하였다. 하나의 CTE를 계산하는데 1,000번의 시뮬레이션을 실행하였고 1,000개의 CTE를 구하여 그 분포를 계산하였다.

〈표 3〉은 만기 10년, 월수수료율 0.25%, 보험료 100을 일시납부하는 경우(가정 1) 두 모형의 CTE(70), CTE(90), CTE(95)를 비교한 것이고, 〈표 4〉는 10년 동안 매년 초 보험료 10을 균등하게 분할납부하는 경우(가정 1')이다. 두 경우 모두 노건엽(2012)과 Hardy(2001, 2003)와 같이 RSLN2 모형의 경우 LN 모형보다 더 보수적인 CTE 값이 산출되었다. 또한, 〈표 3〉(또는 〈표 4〉)에서 볼 수 있듯이 한 모형의 CTE의 HPDI가 다른 모형의 CTE의 평균을 포함하지 않는 것을 볼 때 두 모형의 CTE의 차이가 통계적으로 유의한 차이임을 알 수 있다.(여기서는 두 모형의 CTE의 95% HPDI가 서로 겹치지 않는다.) 한편, 〈그림 2〉(또는 〈그림 3〉)은 두 모형의 CTE의 사후분포를 보여주는데 역시 두 모형에서 산출된 결과의 차이가 통계적으로 유의함을 보여준다. 이 차이를 통계적으로 보여준 것은 본 연구의 중요한 공헌이다.

〈표 3〉 LN 모형과 RSLN2 모형의 CTE 비교(일시납인 경우)

모형	CTE(70)	CTE(90)	CTE(95)
LN	24.69 (22.18, 27.33)	42.30 (40.16, 44.38)	47.54 (45.71, 49.42)
RSLN2	34.70 (32.67, 36.77)	48.34 (46.74, 49.95)	52.40 (50.93, 53.88)

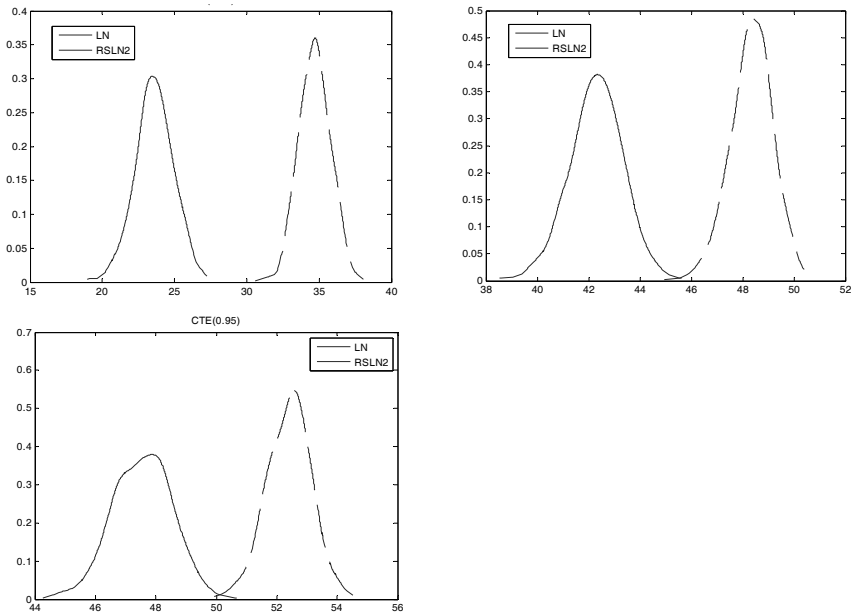
주: ( ) 안은 95% HPDI임.

〈표 4〉 LN 모형과 RSLN2 모형의 CTE 비교(분할납인 경우)

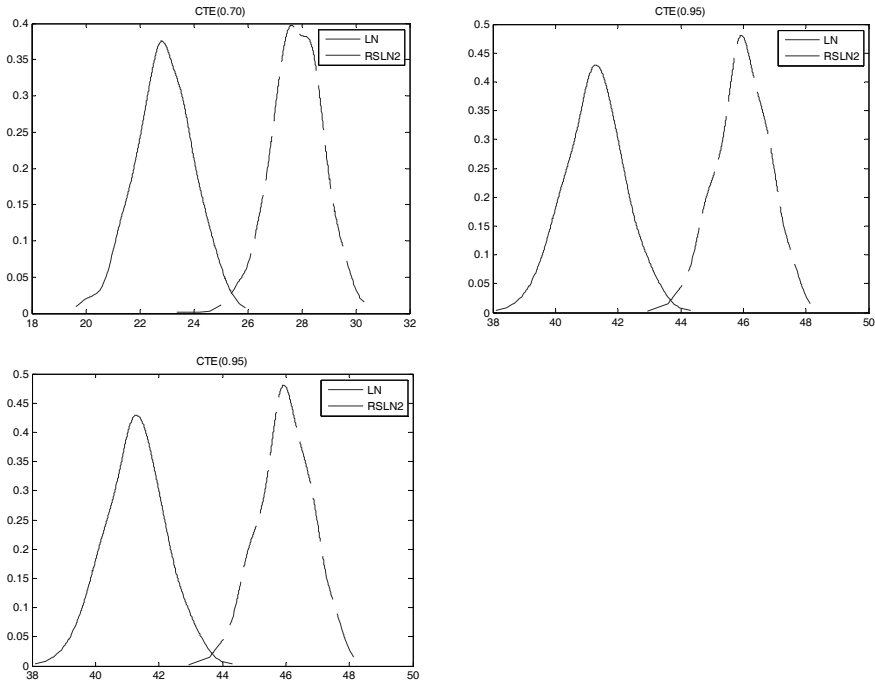
모형	CTE(70)	CTE(90)	CTE(95)
LN	22.90 (20.88, 25.07)	36.55 (34.62, 38.33)	41.25 (39.39, 43.13)
RSLN2	27.82 (25.88, 29.78)	40.42 (38.72, 42.09)	45.96 (44.33, 47.63)

주: ( ) 안은 95% HPDI임.

〈그림 2〉 LN 모형과 RSLN2 모형의 CTE의 사후분포 비교(일시납인 경우)



〈그림 3〉 LN 모형과 RSLN2 모형의 CTE의 사후분포 비교(분할납인 경우)



### 3. 현재 국면상태의 차이에 따른 보증준비금의 비교

RSLN2 모형으로 추정할 경우 모수뿐만 아니라 국면을 나타내는 상태변수도 추정  
이 된다. 앞에서는 상태변수의 추정값을 이용하지 않고, 즉 현재의 국면에 대한 추  
정값을 이용하지 않고 CTE를 구하여 LN 모형의 그것과 비교하였다. 만기가 긴 경우  
에는 현재의 국면이 CTE를 구하는데 큰 영향을 주지 않을 것이다. 그러나 만기가 충  
분히 길지 않으면 현재의 국면이 CTE를 구하는데 상당한 영향을 줄 수 있다.

본 절에서는 RSLN2 모형에서 CTE를 구할 때 현재의 국면을 다르게 함에 따라 그  
차이가 어떻게 달라지는지 알아본다. <표 5>와 <그림 4>은 만기가 다를 때 현재  
국면에 따라 CTE의 차이가 어떻게 차이가 나는지 보여준다. 예를 들면, 만기가 10  
년인 경우 초기 국면을 1로 설정했을 때 CTE(70)은 36.72, 초기 국면을 2로 설정했  
을 때 CTE(70)은 32.79이고, 정상확률의 비율로 초기 국면을 설정했을 때 CTE(70)

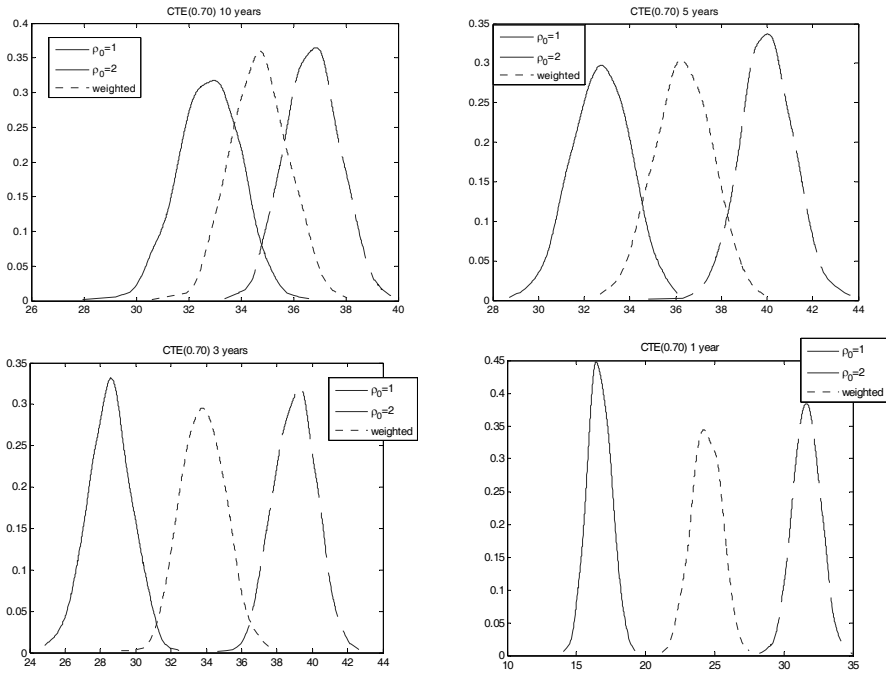
은 34.70으로 산출되었다.(마지막 경우는 <표 5>에서 '가중평균'으로 표시되어 있음) 만기가 10년인 경우 현재 국면이 1인 경우와 2인 경우가 통계적으로 유의한 차이를 보여주고 있다. 즉 한 경우의 평균이 다른 경우의 HPDI에 포함되지 않는다. 10년이라는 만기가 결코 짧은 기간이 아님에도 불구하고 현재 국면을 어떻게 설정하는가가 CTE를 결정하는데 중요한 영향을 주고 있다는 것을 알 수 있다. 다만 정상확률의 비율로 초기 국면을 설정하는 경우와는 유의한 차이를 보이지 않고 있다. 그러나 만기가 5년만 되어도 3가지 경우가 모두 통계적으로 유의한 차이를 보이고 있으며, 만기가 그보다 작은, 3년이나 1년인 경우에는 그 차이가 더욱 명확히 드러난다. 이러한 결과는 만기가 5년 이내로 남은 보증옵션의 경우 현재 국면 상태의 추정값을 이용하여 보증준비금을 평가하는데 활용할 필요성이 있음을 시사한다고 할 수 있다.

<표 5> 현재 국면에 따른 CTE(70)의 차이

	10년	5년	3년	1년
$\rho_0=1$	36.72 (34.77, 38.65)	40.01 (37.76, 42.24)	39.02 (36.70, 41.24)	31.65 (29.70, 33.57)
$\rho_0=2$	32.79 (30.54, 34.96)	32.72 (30.26, 35.19)	28.52 (26.14, 30.94)	16.66 (15.04, 18.31)
가중 평균	34.70 (32.67, 36.77)	36.34 (33.91, 38.76)	33.82 (31.40, 36.24)	24.40 (22.30, 26.40)

주: ( ) 안은 95% HPDI임.

〈그림 4〉 현재 국면에 따른 CTE(70)의 차이



#### IV. 결론과 향후 연구과제

본 연구는 변액연금 보증준비금의 평가에 베이지언 통계기법을 도입하여 주식 수익률 모형이 보증준비금의 평가에 미치는 영향을 분석하였다. 기존 연구에서는 주식수익률 모형을 최대가능도방법을 이용하여 추정하였는데 이러한 방법으로는 각 모형의 보증준비금에 대한 추정값의 표준오차를 구하기 힘들다. 왜냐하면 보증준비금이 모수의 복잡한 비선형함수이기 때문이다. 그러나 베이지언 방법을 이용하면 모수의 사후분포를 구할 수 있는데 이 사후분포를 이용하면 보증준비금의 사후분포를 비교적 쉽게 도출할 수 있다. 즉 보증준비금에 대한 추정값의 불확실성을 모수의 불확실성을 반영하여 구할 수 있는 것이다.

본 연구에서 수행한 분석에 따르면 LN 모형과 RSLN2 모형의 GMAB 보증준비금

사이에는 통계적으로 유의미한 차이가 존재하는 것을 파악할 수 있었다. 또한, RSLN2 모형 하에서 국면상태가 보증준비금에 미치는 영향을 분석한 결과에 따르면 5년 이내에 만기가 도래하는 보증옵션의 경우 현재의 국면상태는 보증준비금에 상당한 영향을 미치는 것으로 나타났다. 이러한 이슈들은 RSLN2 모형을 다룬 기존의 연구에서 논의되지 않았던 것으로 향후 실무적인 활용을 위해서는 보다 심층적이고 다각적인 논의가 필요하다고 할 수 있다.

본 연구는 주식수익률 모형에 따른 혹은 국면상태의 변화에 따른 보증준비금의 차이에 주안점을 두기 위하여 해약은 없고 주식에만 투자하는 등 몇 가지 비현실적인 상황을 가정하였다<sup>11)</sup>. 이는 분석의 편의를 위해 관련연구에서 흔히 이루어지는 가정이지만 본 연구가 지닌 현실적인 한계라고 할 수 있다. 특히 본 연구에서는 해약이 발생하지 않는 이상적인 상황을 가정하였으나 해약률은 주식수익률에 영향을 받을 뿐만 아니라 주식수익률과 함께 보증준비금의 평가에 많은 영향을 미치는 요인이다. 따라서 RSLN2 모형에서 국면상태가 해약률에 미치는 영향을 조사하고, 주식수익률과 더불어 보증준비금의 평가에 미치는 영향을 분석한다면 향후 보다 현실적이고 흥미로운 연구결과를 얻을 수 있을 것으로 기대한다.

11) 이러한 점을 지적해 주신 심사위원님께 감사드립니다.

## 참고문헌

- 권용재, 「변액연금 최저연금적립금보증 요구자본 계산 시 확률론적 시나리오 방식 적용 연구」, 『보험학회지』, 보험학회, 2010.12, pp. 1-33.
- 김용희·김창기, 「변액 연금 상품의 보증 옵션 분석」, 『보험금융연구』, 보험연구원, 2011.5, pp. 3-25.
- \_\_\_\_\_, 「추가수익률 추정 모델 선택에 따른 변액 연금 최저보증준비금 분석」, 『보험금융연구』, 보험연구원, 2012.11, pp. 99-131.
- 노건엽, 「변액보험의 보증준비금 평가시 확률변동성 특성을 통한 주식수익률 시나리오 적용연구」, 『보험금융연구』, 보험연구원, 2012.2, pp. 3-34.
- 보험개발원 변액연금 보증준비금 평가 T/F, 「변액보험 보증리스크 평가 보고서」, 보험개발원, 2009.
- \_\_\_\_\_, 「변액보험 보증준비금 평가 실무 처리방안」, 보험개발원, 2010.
- 보험개발원 자산시나리오 작업반, 「자산시나리오 산출 보고서」, 보험개발원, 2011.
- 생명보험협회, 『월간 생명보험 통계』.
- 엄영호·김계홍, 「변액연금의 가치산정 및 리스크 분석」, 『보험학회지』, 보험학회, 2009.12, pp. 105-137.
- American Academy of Actuaries' Life Capital Adequacy Sub committees' C-3 Phase 2 Work Group to the National Association of Insurance Commissioners' Capital Adequacy Task Force, "C3 Phase II Risk-Based Capital for Variable Annuities: Pre-packaged Scenarios", AAA, 2005.
- Bauwens, L., Lubrano, M. and Richard, J., *Bayesian Inference in Dynamic Econometric Models*, 1999, Oxford University Press.
- Cho, Jaeho and Yoo, Byoung Hark, "The Korean Stock Market Volatility during the Currency Crisis and the Credit Crisis", *Japan and the World Economy* 23(4),

2011, pp. 246-252.

CIA Task Force on Segregated Fund Investment Guarantees, "Report of the CIA Task Force on Segregated Fund Investment Guarantees", CIA, 2002.

Hardy, M., "A Regime-Switching Model of Long-Term Stock Returns", *North American Actuarial Journal* 5(2), 2001, pp. 41-53.

Hardy, M., *Investment Guarantees: Modeling and Risk Management for Equity-Linked Life Insurance*, John Wiley & Sons, 2003.

Hardy, M., Freeland, R. K. and Till, M. C., "Validation of Long-Term Equity Return Models for Equity-Linked Guarantees", *North American Actuarial Journal* 10(4), 2006, pp. 28-47.

Johannes, M., and Polson, N., "MCMC Methods for Continuous-Time Financial Econometrics", *Handbook of Financial Econometrics*, 2010.

Kim, Chang-Jin and Nelson, Charles R., *State-Space Models with Regime Switching*, 2000, The MIT Press.

## Abstract

In this paper, we analyze the effect of stochastic model selection for stock return processes on minimum guarantee reserves. Usually it is difficult to reflect uncertainty about estimated guarantee reserves using the method of maximum likelihood estimation adopted by the previous research. However, under the Bayesian approach, the uncertainty can be easily incorporated into the models and it is possible to make statistical inferences about the differences between the guarantee reserves under the LN model and RSLN2 model. As a result, we find that the model selection has a substantial impact on the GMAB reserves. Moreover, unlike the previous research, we also investigate the effect of the initial regime state under the RSLN2 model on the minimum guarantee reserves. The results show that the impact can be significant if the GMAB options have maturities of less than 5 years.

※ **Key words:** regime-switching lognormal model, Bayesian statistics, variable annuities, guarantee reserve