보험금융연구 제28권 제2호 (2017. 5) pp. 59-97
DOI : https://doi.org/10.23842/jif.2017.28.2.003

자기부담금 보험계약의 보험수요에 관한 연구: 무보험, 일부보험 및 전부보험의 보험료 조건

A Study on Deductible Insurance Demand: Premium Conditions for No Coverage, Partial Coverage and Full Coverage

홍 순 구*
SoonKoo Hong

일반적으로 자기부담금 보험계약에선, 비례보험계약과는 달리, 목적함수인 기대효용이 결정변수인 자기부담금 수준에 대해 '엄격한 오목함수'가 되지 못한다. 이 연구는 자기부담금 보험계약에서, 부가보험료가 순보험료에 비례・책정되는 경우, 기대효용함수가 국지적 볼록성을 수반하는 '엄격한 준오목함수'임을 확인한 다음, 전부보험, 일부보험 또는 무보험이 최적이 되는 각각의 보험료조건을 명시적인 형태로 제시한다. 또한 각 최적보험의 조건을 경제학적으로 해석하고, 부의 효과에 관한 비교정태분석도 수행한다. 본 연구는, Schlesinger(1981) 등 기존의 연구와는 달리, 최적보험의 보험료조건 및 비교정태분석의 과정에서 비례적 부가보험료 이외에는 어떤 추가적인 가정도 요구하지 않는다.

국문 색인어: 자기부담금, 보험수요, 무보험, 일부보험, 전부보험
한국연구재단 분류 연구분야 코드: B051605

* 서울과학기술대학교 글로벌경영학과 교수(soonkooh@seoultech.ac.kr)
논문 투고일: 2017. 02. 07, 논문 최종 수정일: 2017. 04. 27, 논문 게재 확정일: 2017. 05. 18

www.kci.go.kr

I. 머리말

오늘날 보험경제학에서, 보험료가 순보험료의 함수로 책정되는 경우, 자기부담금 보험계약은 다른 보험계약방식에 우선해 보험계약자를 보다 효율적으로 보험보호할 수 있는 계약이 된다는 것은 잘 알려진 사실일 것이다(Arrow 1965, Raviv 1979, Gollier-Schlesinger 1996, Eeckhoudt-Gollier-Schlesinger 2005). 이런 장점으로 인해 지금까지도 자기부담금 보험계약은 보험수요를 분석함에 있어 그 중추적인 역할을 담당해 오고 있다(Cummins-Mahul 2004, Zhou et al. 2010, Gaffney-BenIsrael 2016 등). 하지만 자기부담금 보험계약에 관한 다수의 중요한 연구성과에도 불구하고, 보험수요 분석의 가장 기본적인 내용이 되는 무보험, 일부보험 및 전부보험의 보험료조건들은 거의 조사・연구되지 않고 있는 것으로 보인다.[1] 이 주제와 관련해 Schlesinger(1981)는 거의 유일한 예외적인 연구로 특히 주목받을 만하다.

Schlesinger(1981)는 자기부담금 보험계약에서 무보험 그리고 전부보험이 최적이 되는 보험료조건을 제시하고 있다. 요약하면, Schlesinger(1981)는 사전에 자기부담금을 결정변수로 하는 기대효용함수가 ‘전역적으로 엄격한 오목함수(globally and strictly concave function)’되는 경우를 가정한 다음, 그 경우에 한해 무보험 그리고 전부보험이 최적이 되는 보험료조건을 제시하고 있다. 이어서 Schlesinger(1981)는 내부해(interior optimal solution)의 존재를 충족시킬 수 있는 국지적 최적조건(local maximum condition)을 별도로 제시하고 있지만 이 국지적 2차 조건 역시 실제 자기부담금 분석모형에는 적용이 어려울 정도로 복잡하고도 까다롭다(Schlesinger 1981, Theorem 7)[2]. 하지만 무엇보다 Schlesinger(1981)의 가장 심

---

1) 자기부담금 보험계약의 기본적인 이론적 내용은 Schlesinger(2013) 또는 Eeckhoudt- Gollier (1995, Chapter 10) 등에 잘 정리되어 있다.

2) Schlesinger(1981)는 Theorem 7(p. 475)에서 국지적 극대값(local maximum)이 충족되는 조건으로 다음과 같이 복잡한 구조의 식을 제시했다.

$$V_{DD}(D^*) < 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{R_{DD}}{R_D} - \frac{C_{DD}}{C_D} < (R_D+1)r_A(Y_3) + R_D\left[\frac{EU''(Y)}{EU(Y)} - \frac{U''(Y_3)}{U'(Y_3)}\right]$$

하지만 우리의 분석에선, 보다 바람직한 전역적 극대값(global maximum)에 대해서도, 단순히 보험계약자의 위험회피성향 $U''(Y) < 0$ 만이 요구된다. 각 기호의 정의에 대해서는 Schlesinger(1981)를 참고바람.

www.kci.go.kr

각한 문제점은 자기부담금 보험계약의 분석에서 도출되는 기대효용함수가 많은 경우 '국지적 볼록성(local convexity)'을 수반하기 때문에 일반적으론 Schlesinger의 '전역적 오목성(global concavity)'에 대한 가정 자체가 성립될 수 없다는 점이다.

Schlesinger(1981)에서의 이런 문제점들의 근본 원인은 아마도 Schlesinger가 가정하는 보험료모형에서 찾을 수 있겠다. 즉, Schlesinger(1981)의 분석은 보험료가 단순히 자기부담금 수준의 감소함수라는 데서 출발했다. 이런 가장 일반적인 형태의 보험료가정은 모든 자기부담금 계약의 보험료함수를 포괄할 수 있다는 일차적인 장점은 있겠다. 하지만 전술한 바와 같이 그 연구결과는 오히려 보다 복잡한 구조로 보험료함수 및 효용함수를 제약시켜 실제 적용을 어렵게 하는 연구결과들을 제시한다(각주 2 참조).

본 연구에서는 이런 Schlesinger(1981)의 일반적 보험료모형을 대신해 비례보험료 모형을 적용한다. 즉 부가보험료가 순보험료에 비례책정(proportional loading)되는 경우를 고려한다. 이런 가정은, 물론 Schlesinger(1981) 보다는 다소 제약적이지만, Mossin(1968) 이래 보험경제학에서 가장 일반적으로 사용되는 보험료모형이라고 할 수 있겠다. 요컨대, 이제 우리의 논문에서 규명하는 것처럼, 이런 보험료함수는, 보험계약자의 위험회피성향 이외에는 어떤 추가적인 가정 없이도, 자기부담금에 관한 기대효용함수를 엄격한 준오목함수(strictly concave function)로 만들어 준다. 따라서 본 논문의 자기부담금모형에서는 극대화를 위한 내부해의 1차조건이 충족되면 전역적 극대화(global maximum)를 위한 2차조건도 자동적으로 충족된다. 기대효용함수의 이런 준오목성은, Schlesinger (1981)에서처럼 무리한 전역적 오목성을 가정하지 않아도, 우리의 목적한 바인 전부보험, 일부보험 또는 무보험이 최적이 되는 보험료조건을 간략하고도 명시적인 형태(explicit form)로 제시해 줄 수 있게 된다.

참고로 언급하면, 최근 자기부담금 보험수요에 관한 연구는 종종 주어진 보상한도(coverage upper limit) 또는 보험기업의 손실한도(loss upper limit)를 전제로 수행되고 있다(예를 들면, Cummins-Mahul 2004, Zhou et al. 2010, Gaffney-BenIsrael 2016 등). 이렇게 자기부담금과 함께 보상한도(손실한도)가 동시적으로 고려되는

www.kci.go.kr

경우, 그 결과는 본 연구와 비교해 큰 차이를 보일 수 있다. 그 이유는 문제의 접근 방법부터가 상이하기 때문일 것이다. 무엇보다 이들 분석에서는 보상금액 또는 보험사 손실의 최고한도가 설정되어 있기 때문에, 손실액 100%를 보상하는 전부보험(full insurance)은 가능하지 않고 일부보험 내지는 무보험만이 선택의 대상이 된다. 또한 본 논문의 주된 연구주제는 자기부담금 보험계약이 체결될 수 있는 최대보험료를 확인하는 것인데, 보상한도 또는 손실한도금액이 설정되어 있는 경우 일반적으로 이런 문제는 제기되지 않거나 또는 그 의의가 퇴색된다.3)

이 논문은 다음 순서로 진행된다. 다음 II장에선 자기부담금 보험계약에서의 보상구조와 보험료함수를 정의하고, III장에선 자기부담금을 결정변수로 하는 소비자의 기대효용함수가 ‘엄격한 준오목함수’임을 보인다. 다음 IV장과 V장은 본 논문의 핵심내용을 서술한다. 즉 IV장에선 보험사가 책정하는 부가보험료 요인의 크기에 따라 소비자는 전부보험, 일부보험 또는 무보험을 최적의 보험임을 규명하는데, 무엇보다 기대효용함수의 준오목성에 기초해, 전부보험, 일부보험 또는 무보험의 보험료조건이 유도된다. V장은 자기부담금 수준에 증가하는 한계비용함수의 특성을 이용해, IV장에서 수리적으로 유도했던 최적담보의 각 보험료조건들을 재무경제학적으로 해석해 본다. 아울러 VI장에선 부의 효과에 관한 비교정

3) 부연하면 Cummins-Mahul(2004)의 경우, Proposition 1에서의 파레토최적 접근방식을 제외하면, 대부분의 다른 내용들은 본 논문과 비교해 결과에서는 큰 차이점을 노출하지만 방법론은 유사하다. 예컨대 이들 저자들은 Proposition 2에서 보상한도금액이 미리 주어진 경우 보험계약자가 순보험료하에서도 일부보험을 선택하는 과정을 서술하고 있는데, 여기서 제기되는 2차조건의 문제를 Meyer-Ormistin(1999)가 제안하는 우회적인 방법을 통해 해결하고 있다(각주 12) 참조바람). 본 논문에서의 방법론은 Cummins-Mahul(2004)의 보상한도모형에도 비교적 쉽게 적용될 수 있을 것으로 추정(conjecture)해 본다.
Zhou et al.(2010)은, 보험기업이 손실한도의 제약을 받는 경우, 파레토최적보험의 수요를 내재적으로(endogenously) 결정되는 자기부담금과 보상한도금액(cap)을 통해 파악하고 있다. 그런데 이런 파레토최적보험의 분석모형에서 목적함수는 기본적으로 보상함수와 보험료라는 두 변수에 관해 엄격한 오목함수가 되기 때문에, 이 논문에서 근본적으로 제기하는 2차조건의 충족여부문제는 발생하지 않는다.
끝으로 Gaffney-BenIsrael(2016)은, 기대효용모형 대신, 상대적으로 분석이 간단한 평균・분산모형으로 자기부담금과 보상한도금액의 성격을 파악하고 있다. 특히 본 논문 부록에서 자기부담금 수준이 보험계약자 부의 기댓값과 분산위험에 미치는 영향에 관한 분석은, 보상한도만 추가적으로 설정하면, Gaffney-BenIsrael(2016)의 주된 결과인 Theorem 1과 그대로 연계되는 내용이 된다.

www.kci.go.kr

태분석을 실시하고, 끝으로 VII장에선 요약과 함께 논문을 종결한다.

II. 자기부담금 보험계약의 보상함수와 보험료모형

1. 자기부담금 보험계약

본 분석에선 초기 자산(initial wealth) w를 지닌 잠재적 보험계약자가 화폐금액으로 $\tilde{x}$만큼의 손실위험에 노출되어 있는 경우를 고려한다[4]. 본 분석에선 확률변수 $\tilde{x}$가 연속확률분포를 하는 경우로 제한한다. 아울러 발생 가능한 최대손실액을 $L(\leq w)$로 정의하면, $\tilde{x}$의 써포트(support)는 구간 $[0, L]$로 표시된다. $\tilde{x}$의 누적확률분포함수와 확률밀도함수를 각각 $F(x)$ 그리고 $f(x)$로 표기하기로 한다. 요컨대 분석은 $0 \leq x \leq L \leq w$ 의 가정 하에서 진행된다. 그러면 이런 잠재적 보험계약자의 기말자산(final wealth)은 $\tilde{y} = w - \tilde{x}$로 나타낼 수 있겠다.

한편 이런 손실위험 $\tilde{x}$를 담보하는 보험계약이 가능하다면, 이제 잠재적 보험계약자는 보험구입여부를 결정하고, 또 만약 구입한다면 그 보험담보를 얼마큼으로 설정할 것인지도 함께 숙고해야 할 것이다. 여기서는 보험계약의 형태로 자기부담금 계약을 고려한다. 소비자가 선택하는 자기부담금 금액을 D로 표기하고, 그 범위는 $[0, L]$로 제한된다: $D \in [0, L]$. 즉 잠재적 보험계약자가 자기부담금액을 $D = 0$으로 설정하면 손실액 100%를 보상받는 전부보험(full coverage)을, 그리고 $0 < D < L$ 이면 엄격한 일부보험(partial coverage)을 구입하는 것이 되겠다. 물론 $D = L$ 이면 잠재적 보험계약자는 무보험(no coverage)을 선택하는 경우가 된다.

---

4) 이 논문의 수식에서, 틸드(tilde; ~) 표시가 있는 기호(예컨대, $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ 또는 $\widetilde{y_0}$ 등)는 확률분포가 수반되는 확률변수(random variable)를 의미하고, 틸드 표시가 제거된 기호(예컨대,x, y 또는 y_0 등)는 그 확률변수가 실현된 상수(constant)값을 나타내기로 약속한다.

www.kci.go.kr

2. 보상함수

전형적인 자기부담금 보험계약에서, 자기부담금 수준이 D 인 경우 $\tilde{x}=x$ 만큼의 실제손실이 발생하면 그 보상금 $I_D(x)$는 자기부담금 D 와 손실액 x 의 상대적 크기에 따라 다음과 같이 결정된다.

$$I_D(x) = \max(0,\ x-D) = \begin{cases} 0 & (x \le D) \\ x-D & (x > D) \end{cases} \tag{2.1}$$

이처럼 자기부담금 보험계약에서는 보상함수 $I_D(x)$가 손해액 x 의 비선형함수(non-linear function)로 표현된다. 요컨대 손실 x 의 발생시, $I_D(x)$는 보험자가 보상하는 부분이고 보험계약자가 스스로 부담해야 하는 손실액은 $x-I_D(x)$ 가 되겠다. $x-I_D(x)$ 는 x 와 D 의 상대적 크기에 따라 다음과 같은 값을 가진다.

$$x-I_D(x) = \min(x,\ D) = \begin{cases} x & (x \le D) \\ D & (x > D) \end{cases} \tag{2.2}$$

3. 보험료

본 분석에서, 보험료는 순보험료와 그에 비례하는 부가보험료와의 합으로 결정된다고 가정한다. 즉, $\lambda(\ge 0)$를 부가보험료 요인으로 정의하면, 자기부담금 D 가 설정된 보험료 $P(D)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$P(D) = (1+\lambda) \cdot EI_D(\tilde{x}) \tag{2.3}$$

위의 식에서 E 는 기댓값 연산부호(expectation operator)를 나타낸다. 물론 위의 식 우변에서 $EI_D(\tilde{x})$ 는 보상금액의 기댓값인 순보험료 그리고 $\lambda \cdot EI_D(\tilde{x})$ 는 부가보험료를 의미한다.

$$\text{순보험료} = EI_D(\tilde{x}) \tag{2.4}$$

$$\text{부가보험료} = \lambda \cdot EI_D(\tilde{x}) \tag{2.5}$$

www.kci.go.kr

식 (2.3)에서의 보험료 $P(D)$ 는 필요에 따라 다음과 같이 보다 다양하게 표현할 수 있겠다.

$$\begin{aligned} P(D) &= (1+\lambda)\cdot\int_0^L \max(0, x-D)\, dF(x) \\ &= (1+\lambda)\cdot\int_D^L (x-D)\, dF(x) \\ &= (1+\lambda)\int_D^L [1-F(x)]dx \end{aligned} \tag{2.6}$$

한편, $P'(D) \equiv dP(D)/dD$ 를 정의하면, $P'(D)$ 는 소비자가 자기부담금을 1단위 높였을 때 절감되는 한계보험료(marginal insurance premium)를 의미하게 된다. 라이프니쯔공식(Leibniz rule)을 적용해 (2.6)의 $P(D)$ 식을 미분하면 다음 결과가 그대로 유도된다.

$$\begin{aligned} P'(D) &= -(1+\lambda)[1-F(D)] && (2.7) \\ &< 0 && (\leftarrow 0 \le D < L) \end{aligned}$$

부연하면 $1-F(D)$ 는, 손실액 $\tilde{x}$ 가 자기부담금액 D 보다 클 가능성 $\mathrm{Prob}(\tilde{x} > D)$ 이므로, 손실발생시 보험계약자가 조금이라도 손실을 보상받을 수 있는 확률을 뜻한다. 그렇다면 한계보험료의 식 $-(1+\lambda)[1-F(D)]$ 는, 자기부담금의 1단위 증가가 기대보상금액 $EI_D(\tilde{x})$ 의 실질적 '감소'로 이어지는 확률이 $1-F(D)$ 이고 또한 기대보상금액 $EI_D(\tilde{x})$ 1단위의 감소는 보험료의 납입부담을 $1+\lambda$ 만큼 경감시키는 내용을 설명한다.5) 물론 한계보험료는 다음과 같이 한계순보험료와 한계부가보험료로 분리될 수 있겠다:

5) 이 내용은 조금 더 엄격하게 확인될 수 있다. 표기를 간단히 하기 위해 $I \equiv EI_D(\tilde{x})$ 를 사용하면, 우리는 한계보험료 $P'(D)$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있겠다.

$$P'(D) = \frac{\partial P}{\partial D} = \frac{\partial I}{\partial D}\cdot\frac{\partial P}{\partial I} = -[1-F(D)]\cdot(1+\lambda)$$

즉 위의 식에서, $-[1-F(D)]$ 는 자기부담금 수준 D를 1단위 높였을 때 감소하게 되는 기대보상금($\partial I/\partial D$)이고, $1+\lambda$ 는 기대보상금액 1단위 변화가 부가보험료를 포함하고 있는 납입보험료에 주는 영향($\partial P/\partial I$)을 나타낸다.

www.kci.go.kr

$$\text{한계순보험료} = \frac{\partial}{\partial D} EI_D(\tilde{x}) = -[1-F(D)] \tag{2.8}$$

$$\text{한계부가보험료} = \frac{\partial}{\partial D} \lambda EI_D(\tilde{x}) = -\lambda \cdot [1-F(D)] \tag{2.9}$$

한편 $P(D)$ 의 2차 미분식은 $f(D) > 0$ 을 전제로 다음과 같이 양(+)의 값을 가진다.

$$P''(D) = (1+\lambda) f(D) > 0$$

요컨대, 보험료 $P(D)$는 $D \in [0, L)$에 관해 단조감소하는 볼록함수(convex function)가 된다[즉, $P'(D) < 0$, $P''(D) > 0$].

III. 기대효용함수의 준오목성

그러면, 자기부담금 보험계약 후에, 잠재적 보험계약자가 보유하는 기말자산 $\tilde{y}$ 는 다음과 같이 표현될 수 있겠다.

$$\tilde{y} = w - P(D) - \tilde{x} + I_D(\tilde{x}) = w - P(D) - \min(\tilde{x}, D) \tag{3.1}$$

필요한 경우, 기말자산 $\tilde{y}$ 는 다음과 같이 $\widetilde{y_0}$ 및 y_1 으로 구분해서 표기하기로 한다. 즉, $\min(x, D) = x$ 인 경우는 $y = y_0$, 그리고 같은 방법으로, $\min(x, D) = D$ 이면, $y = y_1$ 으로 나타낸다.

$$y = \begin{cases} y_0 = w - P(D) - x & (x \le D) \\ y_1 = w - P(D) - D & (x > D) \end{cases} \tag{3.2}$$

위의 식에서 모든 $x \in [0, L]$에 대해 $y_0 \ge y_1$ 이 되고, 또한 y_1 은 확률변수가 아닌 상수임에 유의하자.

www.kci.go.kr

1. 기대효용함수

본 분석에선 잠재적 보험계약자가 엄격한 위험회피형 효용함수 u ($u' > 0,\ u'' < 0$)를 가지는 경우를 가정한다. 그러면, 최적 자기부담금 수준 D^*를 선택하기 위한 기대효용함수 $H(D)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$
\begin{aligned}
H(D) &\equiv Eu(\tilde{y}) \\
&= \int_0^D u[w - P(D) - x] f(x)dx + \int_D^L u[w - P(D) - D] f(x)dx \\
&= \int_0^D u[w - P(D) - x] f(x)dx + u[w - P(D) - D][1 - F(D)] \\
&= \int_0^D u(y_0) f(x)dx + u(y_1)[1 - F(D)] \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

위의 식에서, 두 번째 등호가 성립하는 이유는 y_1 은 x 를 포함하지 않은 상수이기 때문이다. 이제 보험계약자가 당면한 문제는 $[0, L]$ 의 구간에서 기대효용 $H(D)$ 를 전역적으로 극대화(global maximization)시키는 최적 자기부담금액 D^*를 구하는 것으로 요약된다. 그런데, 자기부담금보험 분석모형에선, 비례보험계약(coinsurance contract)에서와는 달리, 기대효용 $H(D)$ 가 결정변수 D 에 대해 '전체적으로(globally) 엄격한 오목함수'의 형태를 갖추지 못한다. 이 점은 자기부담금 분석의 어려움을 가중시키는 또 하나의 요인으로 작용한다. 하지만, 결론을 먼저 말하면, 기대효용 $H(D)$ 가 비록 '엄격한 오목함수'는 아니지만, '엄격한 준오목함수(strictly quasi-concave function)'가 되기 때문에, 그 준오목성을 활용하면 비교적 쉽게 최적 자기부담금에 관한 여러 특성을 파악할 수 있다. 그러면 그 내용을 확인해 보도록 한다.

라이프니쯔공식을 적용해 $H(D)$ 를 D 에 관해 1차 미분을 하면 다음 결과가 확인된다.

$$
H'(D) = -P'(D)\int_0^D u'(y_0) f(x)dx - [P'(D) + 1]u'(y_1)[1 - F(D)]
$$

www.kci.go.kr

$$= -P'(D)\left\{\int_0^D u'(y_0)f(x)dx + u'(y_1)[1-F(D)]\right\} - u'(y_1)[1-F(D)] \qquad (3.4)$$
$$= -P'(D)\left[Eu'(\tilde{y})\right] - u'(y_1)[1-F(D)]$$

위의 식 우변에 $-P'(D) = (1+\lambda)[1-F(D)]$ 를 대입하면, 다음과 같이 '두 함수의 곱(product)'이 되는 $H'(D)$의 식이 유도된다.

$$H'(D) = [1-F(D)]\cdot\left[(1+\lambda)Eu'(\tilde{y}) - u'(y_1)\right] \qquad (3.5)$$

한편, (3.5)의 식 우변을 D에 관해 한 번 더 미분하면 $H''(D)$를 구할 수 있다.[6] 즉,

$$H''(D)$$
$$= -f(D)\cdot\left\{(1+\lambda)\left[\int_0^D u'(y_0)f(x)dx + u'(y_1)[1-F(D)]\right] - u'(y_1)\right\}$$
$$+ [1-F(D)]\times$$
$$\left[\begin{array}{l}(1+\lambda)\left\{-P'(D)\int_0^D u''(y_0)f(x)dx + u''(y_1)[-P'(D)-1][1-F(D)]\right\}\\ -u''(y_1)[-P'(D)-1]\end{array}\right]$$
$$= -f(D)\cdot\left[(1+\lambda)Eu'(\tilde{y}) - u'(y_1)\right] \qquad (3.6)$$
$$+ [1-F(D)]\times$$
$$\left[-P'(D)(1+\lambda)\int_0^D u''(y_0)f(x)dx + [1+P'(D)]u''(y_1)\{1-(1+\lambda)[1-F(D)]\}\right]$$

$$= -f(D)\cdot\left[(1+\lambda)Eu'(\tilde{y}) - u'(y_1)\right]$$
$$+ [1-F(D)]\left[(1+\lambda)^2[1-F(D)]\int_0^D u''(y_0)f(x)dx + u''(y_1)\{1-(1+\lambda)[1-F(D)]\}^2\right]$$

6) 참고로 말하면, 자기부담금 계약의 2차조건에 관한 심도있는 논의는 예컨대 다음 논문 등에서 찾아볼 수 있다. Mossin(1968), Schlesinger(1981, 2013), Demers and Demers(1991), Meyer-Ormiston(1999).

www.kci.go.kr

준오목함수는 특히 경제학의 최적화문제(optimization problem)에서 중요시된다[7]. 극대화시켜야 하는 목적함수(objective function)가 준오목함수인 경우, 만약 1차조건을 충족하는 해(solution)가 존재한다면 그 해는 (마치 엄격한 오목함수의 경우처럼) 목적함수를 전역적으로 극대화시키는 유일한 해(unique interior solution)가 되기 때문이다. 이제 우리가 곧 확인하는 것처럼 자기부담금 D를 결정변수로 하는 기대효용함수 $H(D)$ 는 다양한 형태의 준오목성을 보여 주는 전형적인 예가 될 것이다[8].

〈정리 1〉

자기부담금 보험계약의 기대효용함수 $H(D)$는 D에 관해 '엄격한 준오목함수'가 된다.

(증명) 우리는 식 (3.5)과 (3.6)에서 기대효용함수 $H(D)$의 1・2차 미분함수를 각각 다음과 같이 유도했었다.

$$H'(D) = [1-F(D)] \cdot \left[(1+\lambda)Eu'(\tilde{y}) - u'(y_1)\right]$$
$$H''(D) = -f(D) \cdot \left[(1+\lambda)Eu'(\tilde{y}) - u'(y_1)\right]$$
$$+ [1-F(D)] \cdot \left[(1+\lambda)^2[1-F(D)]\int_0^D u''(y_0)f(x)dx + u''(y_1)\{1-(1+\lambda)[1-F(D)]\}^2\right]$$

여기서 $H'(D)$의 식 (3.5)의 우변 대괄호 [・] 안의 항을 다음과 같이 $T(D)$로 정의하면

7) 독자들은 준오목함수의 내용에 관해선, 예컨대 Sydsaester et al.(2008, p. 74) 또는 Boyd-Vandenberghe(2004, p. 101) 등을 참조할 수 있다.

8) 기대효용함수 $H(D)$ 의 자기부담금에 관한 준오목성은 Meyer-Ormiston(1999; Corollary 1, p. 228)에도 증명되어 있다. 하지만 Meyer-Ormiston(1999)의 경우는, 자기부담금 수준 D 대신, 기대보상수준 $I \equiv EI_D(\tilde{x})$를 결정변수로 사용하는 상당히 우회적인 증명방법을 사용하고 있다. 우리의 증명과정은, 물론 D가 결정변수가 되는, 보다 직접적인 방법임과 동시에 기대효용함수 $H(D)$ 의 형태를 쉽게 추정할 수 있는 또 다른 장점도 가지고 있다. 특히 준오목함수 $H(D)$ 의 형태는 우리가 다음 항목에서 무보험, 일부보험 그리고 전부보험의 조건을 보다 수월하게 유도하는데 중요한 역할을 수행한다.

www.kci.go.kr

$$T(D) \equiv (1+\lambda)Eu'(\tilde{y}) - u'(y_1) \tag{3.7}$$

그 1차 미분의 식 $T'(D)$는 다음과 같이 $H''(D)$식 (3.6)의 우변 두 번째 항에 있는 대괄호 [·] 안의 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} T'(D) &\equiv \frac{d}{dD}T(D) \\ &= (1+\lambda)^2[1-F(D)]\int_0^D u''(y_0)f(x)dx + u''(y_1)\{1-(1+\lambda)[1-F(D)]\}^2 \\ &< 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

특히 위의 식 (3.8)에서, 보험계약자의 위험회피성향($u'' < 0$)으로 인해 모든 $D \in (0, L)$에서 항상 $T'(D) < 0$ 가 되므로 $T(D)$ 가 ‘엄격한 감소함수’임에 유의한다. 물론 이 내용은 모든 $\lambda(\geq 0)$ 에 대해 성립된다. 이제 $T(D)$ 와 $T'(D)$ 를 이용하면 $H'(D)$와 $H''(D)$는 각각 다음과 같이 표현된다.

$$H'(D) = [1-F(D)] \cdot T(D) \tag{3.9}$$

$$H''(D) = -f(D) \cdot T(D) + [1-F(D)] \cdot T'(D) \tag{3.10}$$

위의 식 (3.9)와 (3.10)로부터, 모든 $D \in (0, L)$에 대해 만약 $T(D) \geq 0$ (즉 $H' \geq 0$)이 되는 경우는, $H''(D) < 0$ 이 성립되는 것을 쉽게 알 수 있다. 그 이유는 물론 $T'(D) < 0$ 이기 때문이다. 그러면 위의 두 식으로부터 기대효용함수 $H(D)$ 의 ‘엄격한 준오목성’은 다음과 같이 확인된다.

먼저 $H'(D^*) = 0$ 을 충족시키는 내부해(interior solution) $D^* \in (0, L)$가 존재하는 경우부터 살펴본다. 만약 내부해 $D^* \in (0, L)$가 존재하면 항상 $1-F(D^*) > 0$ 이므로, $H'(D^*) = 0$ 는 $T(D^*) = 0$ 와 동등한 내용이 된다. 따라서 만약 $T(D^*) = 0$ 인 $D^* \in (0, L)$가 존재하면, 1차조건 $H'(D^*) = 0$은 물론이고, 아울러 2차조건 $H''(D^*) = [1-F(D^*)] \cdot T'(D^*) < 0$ 도 자동적으로 충족된다. 그 이유는 물론, 모든 $\lambda \geq 0$ 에 대해, $T'(D)$는 항상 음(-)이 되기 때문이다. 요컨대, 내부해 $D^* \in (0, L)$가 존재하면, 모든 $\lambda(\geq 0)$ 의 경우, 1차조건

www.kci.go.kr

$H'(D^*)=0$ 을 충족하는 모든 $D^* \in (0, L)$에서 항상 $H''(D^*)<0$ 이 되기 때문에 $H(D)$는 D에 관해 '엄격한 준오목함수(strictly quasi-concave function)'가 된다.

이번엔 내부해 $D^* \in (0, L)$가 존재하지 않는 경우를 생각해 본다. 즉 모든 $D \in (0, L)$에서, $T(D)=0$ 인 D가 존재하지 않으므로, $T(D)$ 가 양(+)의 값을 갖거나 또는 음(-)이 되는 경우다. 모든 $D \in (0, L)$에서 $T(D)>0$ 인 경우는 $H'(D)=[1-F(D)] \cdot T(D)>0$ 이 되므로 모든 $D \in (0, L)$에서 $H(D)$는 단조증가함수가 되고, 만약 $T(D)<0$ 이면 $H'(D)<0$ 즉 $H(D)$가 단조감소함수가 된다. 단조증가함수 그리고 단조감소함수는 모두 '엄격한 준오목함수'의 전형적인 예이다. QED

〈정리 1〉은 자기부담금 보험계약 분석의 근간을 이루는, 아무리 강조해도 지나치지 않은, 아주 중요한 내용이다. 요컨대, 준오목함수의 전형적인 세 가지 형태로 나타나는 기대효용함수 $H(D)$는 다음과 같이 스케치될 수 있을 것이다.

(i) 위로 볼록한 단봉형(unimodality) 기대효용함수: 1차조건 $H'(D^*)=0$을 충족시키는 내부해 $D^* \in (0, L)$가 존재하는 경우다. 이런 경우 자기부담금 보험계약의 기대효용함수 $H(D)$는, 비록 '엄격한 오목함수'는 아니지만, '엄격한 준오목함수'가 되기 때문에 내부해 $D^* \in (0, L)$는 $H(D^*)$를 국지적 극대값(local maximum)이면서 동시에 전체적 최댓값(global maximum)이 되게 하는 유일무이한 해(unique solution)가 된다. $H(D)$의 준오목성에 의해 1차조건 $H'(D^*)=0$을 충족하는 D^*는 많아야 단 하나이기 때문이다. 요컨대, $H(D)$가 단봉의(unimodal) 형태를 취하면서 자기부담금 보험계약의 최적보험이 엄격한 일부보험[즉, $D^* \in (0, L)$]이 되는 경우다.

(ii) 단조감소하는 기대효용함수: 엄격한 준오목함수의 또 다른 형태로 $H(D)$가 모든 $D \in (0, L)$에서 단조감소하는 경우는 전부보험(즉, $D^*=0$)이 최적이 될 것이다.

(iii) 단조증가하는 기대효용함수: $H(D)$가 모든 $D \in (0, L)$에서 단조증가하면

www.kci.go.kr

소비자는 결국 보험을 구입하지 않는 무보험(즉, $D^* = L$)을 선택하는 상황이 된다.

이제 다음 항목에서는 기대효용함수 $H(D)$에서 이 세가지 형태가 실제로 어떻게 나타나는지 보다 구체적으로 확인해 볼 수 있다.

IV. 무보험, 일부보험 및 전부보험의 보험료조건

$H(D)$의 준오목성에 주목하면, 최적 자기부담금 보험계약이 무보험, 일부보험 그리고 전부보험이 되는 보험료 요건을 비교적 쉽게 유도할 수 있다. 〈정리 2〉에 들어가기 앞서, 우선 다음 세 가지 사항에 주목하기로 한다. 첫째로, 식 (3.7)에서 정의된 $T(D)$는 식 (3.8)에 의해 확인된 것처럼 모든 $D \in (0, L)$에 관해 엄격한 감소함수가 된다는 사실이다. 둘째로, 우리는 $T(D)$의 식 (3.7)로 부터 다음과 같이 $T(0)$를 평가할 수 있다.

$$T(0) = \lambda \cdot u'(w - P(0)) = \lambda \cdot u'(w - (1+\lambda)E\tilde{x}) \tag{4.1}$$

따라서 위의 식 (4.1)로부터, $u' > 0$이므로, $\lambda = 0$과 $T(0) = 0$, 그리고 $\lambda > 0$과 $T(0) > 0$은 각각 서로 상등한 내용이 된다. 즉,

$$\begin{aligned} \lambda = 0 \quad &\leftrightarrow \quad T(0) = 0 \\ \lambda > 0 \quad &\leftrightarrow \quad T(0) > 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

끝으로, 식 (3.7)의 $T(D)$에 대한 정의로부터 다음과 같이 $T(L)$을 평가할 수 있겠다.

$$T(L) = (1+\lambda)Eu'(w - \tilde{x}) - u'(w - L) \tag{4.3}$$

여기서 $T(L) = 0$으로부터 다음과 같이 $\overline{\lambda}$를 정의하기로 한다.

www.kci.go.kr

$$\overline{\lambda} \equiv \frac{u'(w-L)}{Eu'(w-\tilde{x})} - 1 > 0 \tag{4.4}$$

위의 식에서 $\overline{\lambda} > 0$ 이 되는 이유는 모든 $x \in [0, L]$에 대해 $L \geq x$ 그리고 $u'' < 0$ 이므로 항상 $u'(w-L) > Eu'(w-\tilde{x})$이 성립되기 때문이다.[9] 요컨대 (4.4)의 $\overline{\lambda}$ 정의를 이용하면 다음과 같은 내용이 확인된다. 즉,

$$\begin{aligned} \lambda < \overline{\lambda} \;&\leftrightarrow\; T(L) < 0 \\ \lambda = \overline{\lambda} \;&\leftrightarrow\; T(L) = 0 \\ \lambda > \overline{\lambda} \;&\leftrightarrow\; T(L) > 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

그러면 이제 본 논문의 주된 결과인 〈정리 2〉는 다음과 같이 요약된다.

〈정리 2〉 무보험, 일부보험 및 전부보험의 보험료조건

> 자기부담금 보험계약에서, 보험계약자는
> (1) $\lambda = 0$이면 전부보험($D^* = 0$)을,
> (2) $0 < \lambda < \overline{\lambda}$ 이면 엄격한 일부보험($0 < D^* < L$)을 구입하고,
> (3) $\lambda \geq \overline{\lambda}$ 이면 무보험($D^* = L$)을 최적으로 선택한다.
>
> 단, $\overline{\lambda} \equiv \dfrac{u'(w-L)}{Eu'(w-\tilde{x})} - 1$

(1) 전부보험의 증명: $\lambda = 0 \;\rightarrow\; D^* = 0$

우리는 식 (3.9)에서 다음과 같은 $H'(D)$를 확인했었다.

$$H'(D) = [1 - F(D)] \cdot T(D)$$

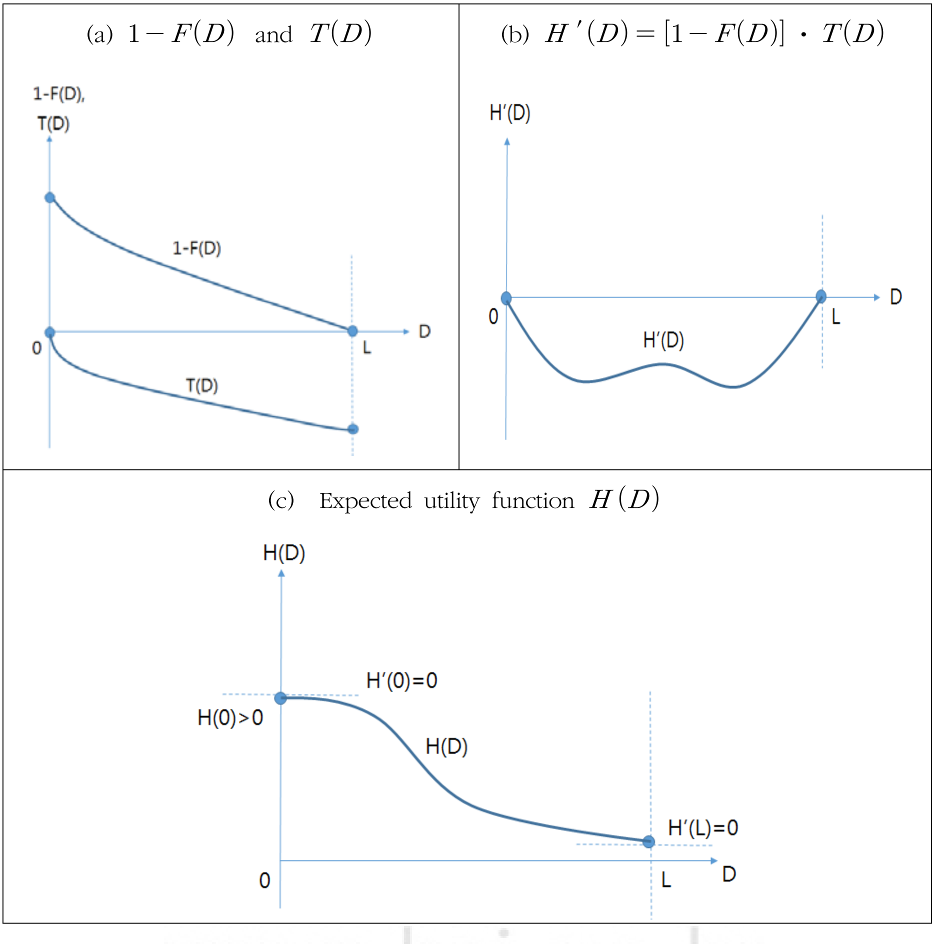
위의 식 우변에서 $1 - F(D)$는 D의 단순감소이다. 또한 지금 우리가 고려하는

9) $\overline{\lambda} > 0$ 이 되는 내용을 보다 엄격한 확인하기 위해서는 앞의 3장에 나오는 각주 8)의 방법을 참조할 수 있다.

www.kci.go.kr

$\lambda=0$ 의 경우, 식 (4.2)의 $T(0)=\lambda \cdot u'(w-(1+\lambda)E\tilde{x})$에 의해 오직 $\lambda=0$ 인 그 경우에 한해서만 $T(0)=0$ 이 되는 것을 확인했었다. 한편 모든 $\lambda \geq 0$ 에 대해 그리고 모든 $D\in(0, L)$ 에서 $T(D)$ 는 엄격한 감소함소이므로 $T(D)$ 는 모든 $D\in(0, L]$ 에서 엄격한 음(-)의 값을 가지게 된다. 따라서 두 함수 $1-F(D)$ 와 $T(D)$ 의 곱(product)으로 이루어지는 $H'(D)$는, ⟨Figure 1⟩의 (a) 그리고 (b)에서와 같이, $H'(0)=0$, $0<D<L$ 이면 $H'(D)<0$, 그리고 $H'(L)=0$ 의 값을 가진다. 요약하면, $H(D)$는 $0 \leq D \leq L$ 에서 연속함수인데, $\lambda=0$ 인 경우 모든

⟨Figure 1⟩ The case of $\lambda=0$



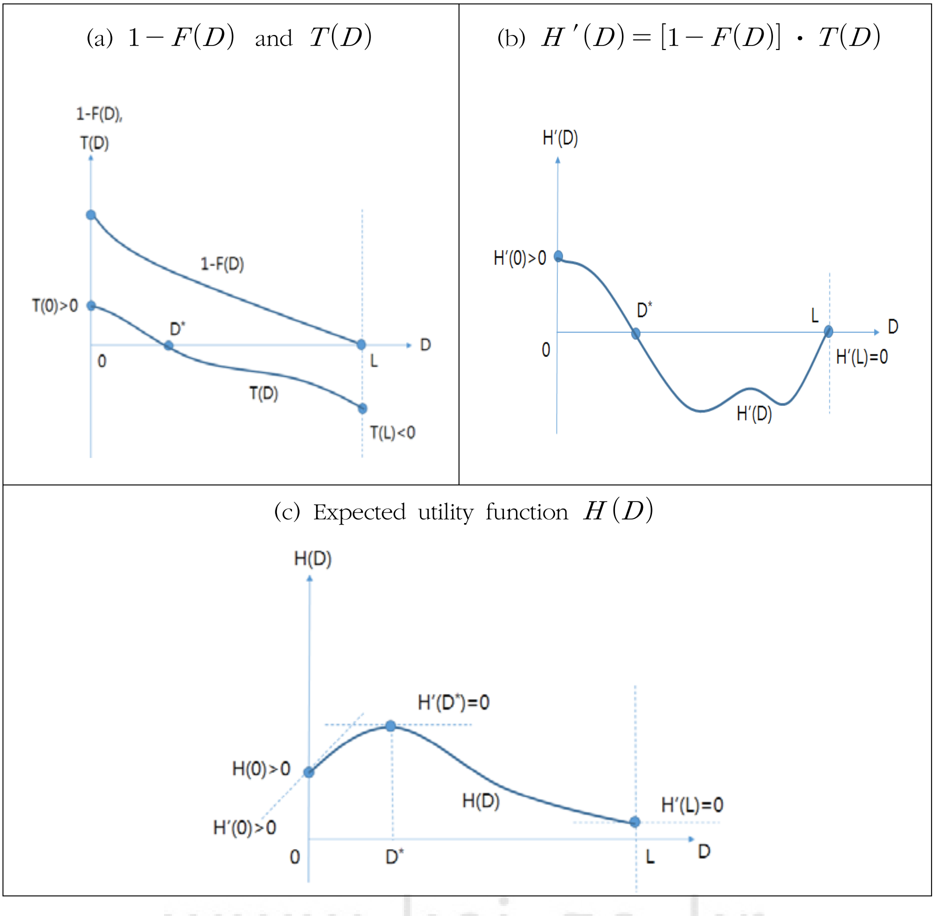
www.kci.go.kr

$0 < D < L$의 범위에서 $H(D)$가 엄격한 감소함수가 되므로 $D^* = 0$ 즉 전부보험이 유일한 최적보험이 된다(〈Figure 1〉의 (c) 참조). QED

(2) 일부보험의 증명: $0 < \lambda < \bar{\lambda} \rightarrow 0 < D^* < L$

$0 < \lambda < \bar{\lambda}$의 조건은 식 (4.2)와 (4.5)에 의해 이 $T(0) > 0$ 그리고 $T(L) < 0$ 과 상등한 내용이 된다. 또한 우리는 $T(D)$가 $D \in [0, L]$에 관해 연속인 감소함수임에 유의한다. 즉, $T(0) > 0$ ($\leftrightarrow 0 < \lambda$)이고 동시에 $T(L) < 0$ ($\leftrightarrow \lambda < \bar{\lambda}$)이면,

〈Figure 2〉 The case of $0 < \lambda < \bar{\lambda}$



www.kci.go.kr

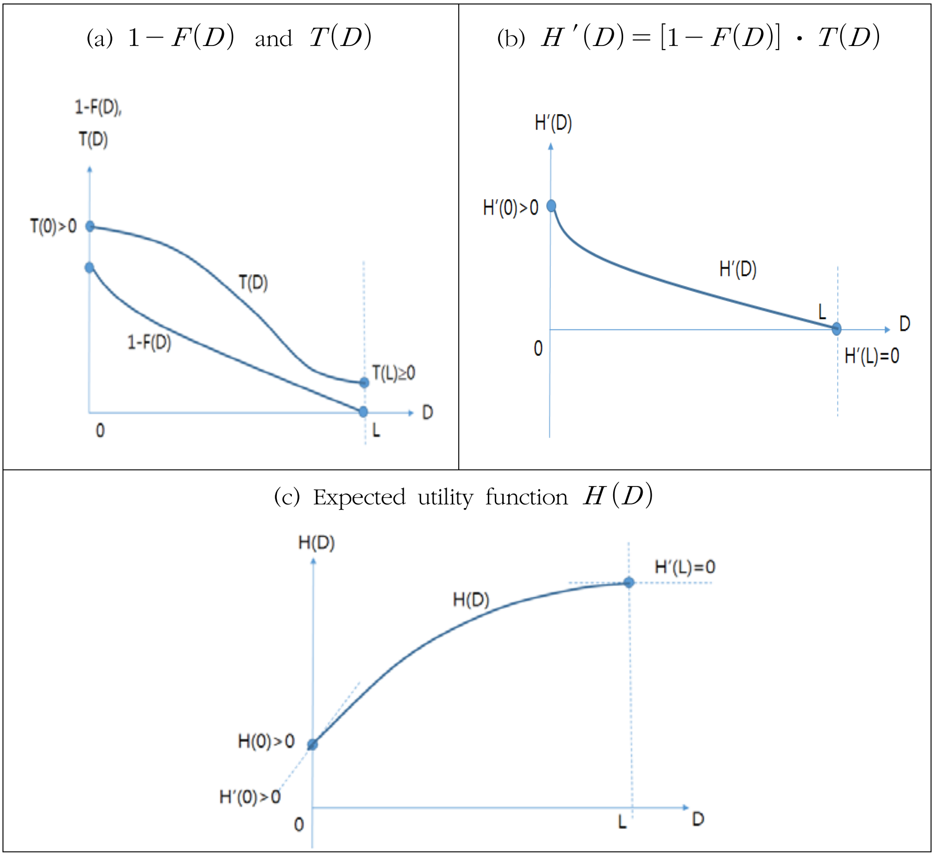
$T(D)$ 가 연속이고 엄격한 감소함수이기 때문에, $T(D)$ 는 $0 < D < L$ 의 구간에서 수평축(D 축)과 반드시 단 1회만 교차(single crossing; 싱글크로싱)한다. 요컨대 $0 < \lambda < \overline{\lambda}$ 의 조건하에서는 $T(D^*) = 0$ 를 충족하는 유일무이한(unique) D^* 가 반드시 존재하는 것이다(〈Figure 2〉의 (a) 참조). 따라서 $H'(D^*) = [1 - F(D^*)] \cdot T(D^*)$ 인데, $0 < D^* < L$ 그리고 $1 - F(D^*) > 0$ 이므로 $H'(D^*) = 0$ 은 $T(D^*) = 0$ 과 서로 동등한(equivalent) 내용이 된다. 즉, $H'(D)$ 는 $0 < D < L$ 의 구간 내에서 유일하게 $D = D^*$ 에서만 '0'이 된다. 따라서, $H'(D) = [1 - F(D)] \cdot T(D)$ 는 위에서 아래로 수평 D 축과 예컨대 $D = D^* \in (0, L)$ 에서 단 1회만 교차한다(〈Figure 2〉의 (b) 참조). 즉 $H(D)$ 가 단봉의(unimodal) 형태를 취하면서 유일무이한 최댓값을 갖는 경우다 (〈Figure 2〉의 (c) 참조). 요약하면, $0 < \lambda < \overline{\lambda}$ 의 경우 (즉, $T(0) > 0$ 그리고 $T(L) < 0$ 이면) $H'(D^*) = 0$ 를 충족하는 $D^* \in (0, L)$ 가 반드시 하나만 존재한다. QED

(3) 무보험의 증명: $\lambda \geq \overline{\lambda} \rightarrow D^* = L$

$T(D)$ 는 $0 < D < L$ 의 모든 구간에서 단조감소함수이다. 따라서 $\lambda \geq \overline{\lambda}$ 즉, $T(L) \geq 0$ 의 경우는, $0 \leq D < L$ 인 모든 D 의 구간에서 $T(D)$ 는 수평축(D 축)과 교차하지 않고 엄격한 양(+)의 값을 가진다. 즉, 모든 $D \in (0, L)$ 에서, $H'(D) = [1 - F(D)] \cdot T(D) > 0$ 이므로 $H(D)$ 는 단조증가함수가 되고 $H(D)$ 는 $D = L$ 에서 최대가 된다. 부연하면, $\lambda \geq \overline{\lambda}$ 의 경우 $0 < D < L$ 의 모든 구간에서 $H'(D) > 0$ 이 되고, 또한 이 경우 식 (3.10)에 의해 항상 $H''(D) < 0$ 이 된다. 요컨대, $\lambda \geq \overline{\lambda}$ 인 경우의 $H(D)$ 는 단조증가하는 오목함수가 된다(〈Figure 3〉의 (a), (b) 그리고 (c) 참조). QED

www.kci.go.kr

〈Figure 3〉 The case of $\lambda \geq \overline{\lambda}$



(a) $1-F(D)$ and $T(D)$

(b) $H'(D)=[1-F(D)]\cdot T(D)$

(c) Expected utility function $H(D)$

다시 한 번 강조하면, 식 (4.4)에서 정의된 $\overline{\lambda}$는 자기부담금 보험계약에서 부가보험료 요인 λ로 보험가입여부를 판별할 수 있는 바로메터가 된다. 즉 전적으로 보험사에 의해 책정하는 부가보험료 요인 λ가 보험계약자의 위험성향(효용함수)과 부보위험의 특성에 의해 결정되는 $\overline{\lambda}$보다 작으면($\lambda < \overline{\lambda}$), 잠재적 보험계약자는 반드시 자기부담금 보험계약을 구입한다($D^* < L$). 그리고 이 최대 부가보험료 요인 $\overline{\lambda}$의 정의에는 자기부담금 금액 D가 포함되어 있지 않음에 유의하면, 독자들은 효용함수와 잠재적 보험계약자의 부 그리고 손실위험 $\tilde{x}$의 확률분포의 정보만으로 간단히 최대 부가보험료 요인 $\overline{\lambda}$의 값을 계산할 수 있겠다.

www.kci.go.kr

V. 최적보험 보험료조건의 경제학적 해석

보험계약자의 관점에서 보면, 일반적으로 모든 보험계약에는 부가보험료라는 순비용($\lambda > 0$)이 들게 마련이다. 이 논문의 〈부록〉에서 확인해 볼 수 있는 것처럼, 자기부담금 보험계약에서도, 보험계약자가 높은 자기부담금을 설정할수록 부가보험료의 순지출이 경감되는 만큼 부의 기댓값이 향상되는 장점이 있기는 하지만, 한편 높은 자기부담금의 설정은 보험계약자에 대한 보험보호를 약화시키고 따라서 부의 변동성 위험도 증가시키게 된다(부록의 〈보조정리〉 참조바람). 그렇다면 보험계약자는 이런 이해상충의 과정에서, 보험료절감의 한계혜택과 보험보호의 감소라는 한계비용을 동시적으로 고려하면서 최적 자기부담금 수준을 결정할 것이다. 이 내용은 균형조건의 식에서 다음과 같이 구현된다.

식 (3.4)로부터, 내부해 $D^* \in (0, L)$가 존재하는 1차조건 $H'(D^*) = 0$은 다음 식으로 나타난다[10].

$$-P'(D^*) = \frac{u'(y_1)}{Eu'(\tilde{y})} \cdot [1 - F(D^*)] \tag{5.1}$$

위의 식 좌변에 한계보험료의 식 (2.7) $-P'(D^*) = (1+\lambda)[1 - F(D^*)]$ 를 적용하면 1차조건은 좀 더 간단히 표현된다.

$$\lambda \cdot [1 - F(D^*)] = \left(\frac{u'(y_1)}{Eu'(\tilde{y})} - 1 \right) \cdot [1 - F(D^*)] \tag{5.2}$$

또는 $1 - F(D^*) > 0$ 이므로

$$\lambda = \frac{u'(y_1)}{Eu'(\tilde{y})} - 1 \tag{5.3}$$

10) 물론 아래의 식에서 기말자산 y_1과 $\tilde{y}$는 최적 자기부담금액 D^*가 적용된 경우다. 즉, $y_1 = w - P(D^*) - D^*$, $\tilde{y} = w - P(D^*) - \min(\tilde{x}, D^*)$

www.kci.go.kr

식 (5.3)의 우변이 양(+)의 값을 갖는 것에 유의하면서[11] 식 (5.3)이 제시하는 균형조건을 한계혜택과 한계비용의 개념으로 해석할 수 있다. 먼저 좌변의 λ는, 부의 기댓값 관점에서, 기대보상금액 $EI_D(\tilde{x})$이 1단위 감소하는 경우의 보험료 절감에 따른 순혜택으로 볼 수 있다.[12] 즉, 표기를 간단히 하기 위해 $I \equiv EI_D(\tilde{x})$를 정의하고, 식 (3.1)을 참조하면,

$$\frac{\partial}{\partial I}E\tilde{y} = \frac{\partial}{\partial I}\left[w - P(D) - E\tilde{x} + I\right] = \frac{\partial}{\partial I}\left[w - (1+\lambda)I - E\tilde{x} + I\right] = -\lambda \quad ^{13)}$$

11) $[u'(y_1)/Eu'(\tilde{y})] - 1 > 0$ 인 이유는, $y_1 = w - P(D^*) - D^* \le w - P(D^*) - \min(\tilde{x}, D^*) = \tilde{y}$ 이고 또한 $u'' < 0$ 이기 때문이다. 이 내용은 구체적으로 다음과 같이 확인된다.

$$\begin{aligned}\frac{u'(y_1) - Eu'(\tilde{y})}{Eu'(\tilde{y})} &= \frac{u'(y_1) - \left[\int_0^{D^*} u'(y_0)f(x)dx + u'(y_1)[1 - F(D^*)]\right]}{Eu'(\tilde{y})} \\ &= \frac{F(D^*)u'(y_1) - \int_0^{D^*} u'(y_0)f(x)dx}{Eu'(\tilde{y})} \\ &= \frac{\int_0^{D^*}\left[u'(y_1) - u'(y_0)\right]f(x)dx}{Eu'(\tilde{y})} \\ &> 0\end{aligned}$$

참고로 언급하면, u가 위험중립형의 효용함수($u''=0$)인 경우 즉, 효용함수가 1차함수이면 $u(w) = aw + b(a > 0)$가 되는데, 이 경우 $u'(y_0) = u'(y_1) = a$이고, 따라서 $u'(y_1)/Eu'(\tilde{y}) - 1 = 0$ 이 된다. 요컨대 우리는 보험계약자가 지닌 위험회피에 관한 모든 정보가 균형조건 (5.3)의 식에 구체화되어 있다고 말할 수 있겠다.

12) 이 내용을 결정변수 D를 중심으로 다시 표현하면, 기대보상금액 $EI_D(\tilde{x})$가 1단위 만큼만 감소할 정도로 D가 증가되는 경우를 말한다. 즉, 우리의 모형에서 $\partial EI_D(\tilde{x})]/\partial D = -[1 - F(D)]$ 이므로, $EI_D(\tilde{x})$를 1단위 감소시키기 위해선 D를 $1/[1 - F(D)]$만큼 높이면 되겠다. 논문 부록에 있는 식 (A4)를 참고해 부연하면, 균형조건 (5.2)의 좌변 $\lambda[1 - F(D)] = \partial(E\tilde{y})/\partial D$의 내용은 다음과 같이 $\partial(E\tilde{y})/\partial I$를 경유해 표현할 수도 있다.

$$\frac{\partial}{\partial D}E\tilde{y} = \frac{\partial I}{\partial D} \cdot \frac{\partial}{\partial I}E\tilde{y} = -[1 - F(D)] \cdot (-\lambda) = \lambda[1 - F(D)]$$

13) λ는 기대보상금액 $EI_D(\tilde{x}) = I$가 1원 만큼만 감소할 정도로 D가 증가되는 경우, 부가보험료 절감으로 인한 순혜택(net benefit)으로도 해석할 수 있다. 즉, 식 (2.5)를 참조하면 보험료모형에서 부가보험료는 $\lambda \cdot EI_D(\tilde{x}) \equiv \lambda I$ 이므로 $\partial(\lambda I)/\partial I = \lambda$ 가 된다.

www.kci.go.kr

한편, 균형조건 (5.3)의 우변 $[u'(y_1)/Eu'(\tilde{y})]-1\ (>0)$은 기대보상금액 $I \equiv EI_D(\tilde{x})$가 1단위 만큼 감소할 정도로 D가 증가하는 경우에 발생하는 효용의 순손실 즉 효용의 관점에서 평가하는 순한계비용이 된다. 요컨대, 균형조건 (5.3)은 보험계약자가 자기부담금 수준을 높이는데서 발생하는 한계비용 $[u'(y_1)/Eu'(\tilde{y})]-1$ 이 그에 따른 한계혜택인 λ에 이를 때까지 자기부담금 보험계약을 구입하게 됨을 의미한다.

2. 한계비용함수의 단조성

1절에서는 최적보험의 균형조건으로 식 (5.3)을 유도했었다. 그런데 균형조건 (5.3)과 관련해, 정작으로 중요한 내용은, 한계비용 $[u'(y_1)/Eu'(\tilde{y})]-1$ 이 자기부담금액 $D\in(0,\ L)$의 ‘엄격한 증가함수’가 된다는 사실이다. 즉, 최적 자기부담금 수준을 높게 선택하는 보험계약자일수록 추가적인 자기부담금 상승에 따른 한계비용도 커지게 된다. 이 내용은 상당히 직관적이라고 하겠다. 부연하면, 상식적으로도, 낮은 보험담보를 구입한 (즉 높은 자기부담금이 설정된 보험을 구입한) 보험계약자의 경우 그 보험담보로 부터의 추가적인 담보이탈(자기부담금을 추가로 더 높임)은 상대적으로 높은 보험담보를 구입한 (즉 낮은 자기부담금이 설정된 보험을 구입한) 보험계약자보다 더 큰 부담(더 큰 효용의 상실)으로 작용할 것으로 생각되기 때문이다.

이 내용은 보다 엄격하게 확인될 수 있다. 식 (5.3)의 우변 즉, D 증가에 따른 한계비용 $[u'(y_1)/Eu'(\tilde{y})]-1$ 을 다음과 같이 D의 함수 $\Phi(D)$로 정의하면

$$\Phi(D) \equiv \frac{u'(w-P(D)-D)}{Eu'(w-P(D)-\min(\tilde{x},D))}-1 \tag{5.4}$$

다음 〈정리 3〉의 결과가 확인된다.

www.kci.go.kr

〈정리 3〉

한계비용 $\Phi(D)$는 구간 $[0, L]$에서 최소값 $\Phi(0)=0$ 그리고 최댓값 $\Phi(L)=\overline{\lambda}$을 가지며, 모든 $D\in(0, L)$에 관해 엄격한 증가함수가 된다. 즉,

$$\Phi'(D)>0$$

(증명) 위의 식 $\Phi(D)$를 D에 관해 미분하면 다음 결과를 얻을 수 있다:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dD}\Phi(D) &= \frac{d}{dD}\left[\frac{u'(w-P(D)-D)}{\int_0^D u'(w-P(D)-x)f(x)dx+u'(w-P(D)-D)[1-F(D)]}-1\right] \\ &= \frac{u''(y_1)(-P'-1)Eu'(\tilde{y})-u'(y_1)\left\{\int_0^D u''(y_0)(-P')dF(x)+u''(y_1)(-P'-1)[1-F(D)]\right\}}{[Eu'(\tilde{y})]^2} \\ &= \frac{u'(y_1)\int_0^D u''(y_0)P'dF(x)+u''(y_1)(-P'-1)\left\{Eu'(\tilde{y})-u'(y_1)[1-F(D)]\right\}}{[Eu'(\tilde{y})]^2} \\ &= \frac{u'(y_1)\int_0^D u''(y_0)P'dF(x)-u''(y_1)(P'+1)\int_0^D u'(y_0)dF(x)}{[Eu'(\tilde{y})]^2} \\ &> 0\end{aligned}$$

위의 식에서 부등호가 성립되는 이유는 $P'<0$ 그리고 내부해가 존재하는 경우 1차조건에 의해 $P'+1>0$이 되기 때문이다.[14)]

한편, 자기부담금액 D가 0^+(즉 전부보험)에 아주 접근하면 위험이 소멸되면서 한계비용 Φ도 '0'에 수렴하게 된다. 반대로, 자기부담금액 D가 L^-에 가까울 만큼 충분히 커지면 보험계약자는 무보험상태가 되면서 한계비용 Φ는 앞에서 정의된 최대 부가보험료 요인 $\overline{\lambda}$에 수렴한다. 우리는 이 내용을 다음과 같이 보다 엄격하게 확인할 수 있겠다.

14) 1차조건 $H'(D)=0$는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$-P'(D)\int_0^D u'(y_0)f(x)dx = [P'(D)+1]u'(y_1)[1-F(D)]$$

그런데 $-P'>0$이므로 위의 등식이 성립되려면 반드시 $P'+1>0$이어야 한다.

www.kci.go.kr

$$
\begin{aligned}
\lim_{D\to 0^+}\Phi(D) &= \lim_{D\to 0^+}\left[\frac{u'(y_1)}{Eu'(\tilde{y})}-1\right]\\
&= \lim_{D\to 0^+}\left[\frac{u'(y_1)}{\displaystyle\int_0^D u'(y_0)f(x)dx+u'(y_1)[1-F(D)]}-1\right]\\
&= 0
\end{aligned}
$$

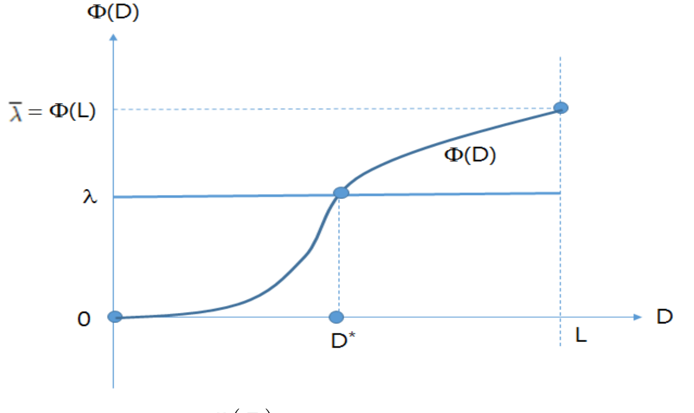
또한

$$
\begin{aligned}
\lim_{D\to L^-}\Phi(D) &= \lim_{D\to L^-}\left[\frac{u'(y_1)}{Eu'(\tilde{y})}-1\right]\\
&= \lim_{D\to L^-}\left[\frac{u'(w-P(D)-D)}{\displaystyle\int_0^L u'(w-P(D)-\min(x,\ D))f(x)dx}-1\right]\\
&= \frac{u'(w-L)}{Eu'(w-\tilde{x})}-1\\
&= \overline{\lambda}
\end{aligned}
$$

QED

〈정리 3〉의 결과는 아래의 〈Figure 4〉로 요약될 수 있겠다.

〈Figure 4〉 Determination of optimal level of deductible D^*



■ marginal cost function $\Phi(D)$:

$$\Phi(D)=\frac{u'(y_1)}{Eu'(\tilde{y})}-1\ ,\quad \Phi(0)=0\ ,\quad \Phi(L)=\overline{\lambda}=\frac{u'(w-L)}{Eu'(w-\tilde{x})}-1$$

www.kci.go.kr

3. 최적보험 보험료조건에 관한 재무경제학적 해석

이제 〈Figure 4〉를 이용하면 〈정리 3〉을 보다 가시적으로 수월하게 해석할 수 있겠다. 요컨대, D 증가의 한계혜택 λ는 수평축에 평행인 직선으로 그려지지만, D의 증가에 의한 한계비용 $\Phi(D)$는, $[0, L]$의 구간에서, $\Phi(0)=0$으로부터 시작해 모든 $D \in (0, L)$에서 양(+)의 값을 가지는 증가함수가 되면서 $D=L$에서 최댓값 $\Phi(L)=\overline{\lambda}$에 이른다. 그리고 균형조건 (5.3)에 의해, 내부해인 최적 자기부담금 D^*는, λ에서부터 수평축에 평행으로 그려지는 직선과 '0'에서부터 우상향하며 양(+)의 값을 가지는 $\Phi(D)$가 교차하는 점에서 결정된다.

첫째로 $\lambda=0$인 경우, 부가보험료가 없으므로 D 증가에 따른 순한계혜택 즉 부가보험료 절감이라는 혜택이 '0'이 된다. 그런데 D의 증가에 수반되는 한계비용 $\Phi(D)$은 모든 $D \in (0, L]$에서 양(+)의 값을 가진다. 즉, $\lambda=0$이면 모든 $D \in (0, L]$에서 '한계혜택<한계비용'이 되므로, 보험계약자는 가능한 한 모든 $D \in (0, L]$에서 D를 더 낮추어야만 하고, 결국은 한계비용 $\Phi(D)$이 '0'이 되는 $D^*=0$의 경계해(boundary solution 또는 corner solution)가 선택된다. 요컨대 전부보험에서만 '한계혜택=한계비용(즉, $\lambda=\Phi(0)$)'의 균형식이 성립되는 것이다.

두 번째로 D 증가의 한계혜택 λ가 $(0, \overline{\lambda})$의 범위에 있는 경우를 고려하면, 또한 이 때 D 증가의 한계비용 Φ도 모든 $D \in (0, L)$에서 엄격하게 증가하면서 양(+)의 값 $\Phi(D) \in (0, \overline{\lambda})$을 갖게 된다. 그렇다면 '한계혜택=한계비용[즉, $\lambda=\Phi(D^*)$]'이 충족되는 유일무이한 균형점 $D^* \in (0, L)$가 존재하게 되고, 따라서 이 경우 '엄격한 일부보험($0<D^*<L$)' 만이 최적이 된다.

끝으로, 부가보험료 요인 λ가 $[\overline{\lambda}, \infty)$의 범위에서 책정되면, 이런 경우 D의 증가에 한계혜택은 $\overline{\lambda}$ 이상이 되는데, D 증가에 한계비용은 보험담보(coverage)가 있는 모든 $D \in [0, L)$에서 $\overline{\lambda}$ 미만이 된다. 즉 모든 $D \in [0, L)$에서 '한계혜택>한계비용'이므로, 보험계약자는 보다 큰 한계혜택을 더 향유하기 위해 최대한 D의 수준을 높이려고 할 것이다. 따라서 보험계약자는 경계선상의 해 $D^*=L$을 최적으로 선택할 수밖에 없을 것이다.

www.kci.go.kr

4. 최대 부가보험료요인과 위험회피도

끝으로 최대 부가보험료한도 $\overline{\lambda}$ 에 관해 한 가지 흥미로운 사실을 하나만 더 언급하고 이 절을 마무리 짓기로 한다. 아래의 정리에서 확인할 수 있는 것처럼, 위험회피성향(ARA)이 큰 보험계약자일수록 그 계약자가 용인하는 최대 부가보험료 한도 $\overline{\lambda}$ 는 더욱 커지게 된다는 내용이다.

먼저 애로우-프라트(Arrow-Pratt)의 위험회피도는 다음과 같이 요약된다: 두 von Neumann-Morgenstern 효용함수 u_A 와 u_B 에서, $-u_A''(y)/u_A'(y) > -u_B''(y)/u_B'(y)$ 의 관계가 성립하면 u_A 는 u_B 보다 '더 위험회피적(more risk averse)'이라고 정의하고, 또 이 경우에 한해 $ARA_A(y) \geq ARA_B(y)$ 로 표기한다. 즉,

$$ARA_A(y) \geq ARA_B(y) \;\leftrightarrow\; -\frac{u_A''(y)}{u_A'(y)} > -\frac{u_B''(y)}{u_B'(y)}$$

또한 효용함수 $u_i\,(i = A, B)$에 적용되는 $\overline{\lambda_i}$ 를 다음과 같이 정의하기로 한다.

$$\overline{\lambda_i} \equiv \frac{u_i'(w-L)}{Eu_i'(w-\tilde{x})} - 1 \quad (i = A,\, B\,)$$

즉 효용함수 u_A 에서의 부가보험료 한도는 $\overline{\lambda_A}$, 그리고 효용함수 u_B 에서의 부가보험료 한도는 $\overline{\lambda_B}$ 로 표기한다. 그러면 부가보험료의 한도 $\overline{\lambda}$ 와 위험회피도 $ARA(y)$간에 성립되는 비교정태분석의 결과는 다음과 같이 요약될 수 있겠다.

〈정리 4〉

> 위험회피성향이 높은 보험계약자일수록 자기부담금 보험계약이 가능한 부가보험료의 한도 $\overline{\lambda}$ 는 더 커진다. 즉,
>
> $$ARA_A(y) > ARA_B(y) \quad \rightarrow \quad \overline{\lambda_A} > \overline{\lambda_B}$$

(증명) Pratt(1964)를 참조하면 본 분석모형에서 다음과 같은 일련의 상등한 식들을 확인할 수 있다.

www.kci.go.kr

$$ARA_A(y) \geq ARA_B(y) \leftrightarrow \ -\frac{u_A''(y)}{u_A'(y)} > \ -\frac{u_B''(y)}{u_B'(y)}$$

$$\leftrightarrow \ -\frac{d}{dy}ln\,u_A'(y) \ > \ -\frac{d}{dy}ln\,u_B'(y)$$

$$\rightarrow \ -\int_{w-L}^{w-x}\frac{d}{dy}ln\,u_A'(y)dy \ > \ -\int_{w-L}^{w-x}\frac{d}{dy}ln\,u_B'(y)$$

$$\leftrightarrow \ \ln u_A'(w-L)-\ln u_A'(w-x) \ > \ln u_B'(w-L)-\ln u_B'(w-x)$$

$$\leftrightarrow \ \ln\frac{u_A'(w-L)}{u_A'(w-x)} > \ln\frac{u_B'(w-L)}{u_B'(w-x)}$$

$$\leftrightarrow \ \frac{u_A'(w-L)}{u_A'(w-x)} > \frac{u_B'(w-L)}{u_B'(w-x)}$$

$$\leftrightarrow \ u_A'(w-L)u_B'(w-x) > u_B'(w-L)u_A'(w-x) \qquad (\because \ u_i > 0)$$

위의 부등식은 모든 $x \in (0,\ L)$에 대해 적용되므로 위의 식 양변에 $x \in (0,\ L)$에 관한 적분을 취해도 부등호의 방향은 변하지 않는다. 즉,

$$ARA_A(y) \geq ARA_B(y)$$

$$\rightarrow \ u_A'(w-L)\int_0^L u_B'(w-x)dF(x) > u_B'(w-L)\int_0^L u_A'(w-x)dF(x)$$

$$\leftrightarrow \ \frac{u_A'(w-L)}{\int_0^L u_A'(w-x)dF(x)} > \frac{u_B'(w-L)}{\int_0^L u_B'(w-x)dF(x)}$$

$$\leftrightarrow \ \overline{\lambda_A} > \overline{\lambda_B} \qquad \text{QED}$$

위의 정리는, 위험회피성향이 강한 잠재적 보험계약자일수록 보험구입을 위해 보다 많은 (부가)보험료를 지불할 의사(willingness-to-pay)가 있음을 잘 알려준다[15]. 그리고 동일한 의미지만, 최대 부가보험료요인 $\overline{\lambda}$는, 보험구입에 있어 잠재적 보험계약자가 수용할 수 있는 최대 부가보험료 요인을 뜻하므로, 잠재적 보험계약자의 보험가입욕구 또는 보험가입의지(willingness-to-insure)를 반영하는 지표

15) 이 내용과 이어지는 부의 효과에 관한 비교정태분석은 논문심사자의 제언에 의해 추가되었다. 저자는 논문의 완성도를 높여 준 심사자에게 감사의 마음을 전한다.

www.kci.go.kr

로도 사용될 수 있겠다. 이런 관점에서 보면 〈정리 4〉의 결과는 보다 쉽게, '위험회피도가 높을수록 보험가입에의 욕구는 더욱 커지게 된다'라고 이해될 수 있겠다. 익히 독자들이 숙지하고 있는 것처럼, 위험회피도가 높을수록 보험수요가 증가한다(Schlesinger 2013)는 보험경제학의 일반 상식과도 일치하는 내용이다. 종합하면, 잠재적 보험계약자의 위험회피성향이 높아지면, 계약자는 보험구입에의 의욕이 커짐과 동시에 그에 따라 최적보험수요도 증가하게 된다.

한편, 부의 효과(wealth effect)의 관점에서 이 결과를 다시 조명해 보면 Mossin(1968)의 정리와 잘 조화되는 직관적 내용이 유도된다. 즉 잠재적 보험계약자의 부가 증가하는 경우, $DARA$ 의[16] 계약자는 그만큼 보험구매욕구가 약해지고, 그에 따라 최적보험수요도 감소한다는, 즉 보험은 열등재(inferior goods)라는, 유명한 결과가 유도된다. 이 내용은 장을 바꿔 정리하기로 한다.

VI. 비교정태분석: 부의 효과

이번 VI장에선 두 가지 부의 효과를 규명해 본다. 즉 부의 증감이 최대 부가보험료 요인 $\overline{\lambda}$ 및 최적보험수요 D^* 에 미치는 영향을 확인하는 것이다. 이를 위해, 먼저 Arrow-Pratt를 따라, 효용함수 $u(w)$ 에서 위험회피도$ARA(w) = -u'(w)/u''(w)$ 가 w 에 관해 증가하는 경우, u 를 $IARA$(increasing absolute risk aversion)의 효용함수라고 정의한다. 같은 방법으로, ARA 가 w 에 관계없이 항상 일정하면 u 를 $CARA$(constant absolute risk aversion)의 효용함수, 그리고 ARA 가 w 에 관해 감소함수이면 u 를 $DARA$(decreasing absolute risk aversion)의 효용함수로 정의한다.

1. 최대 부가보험료요인에 미치는 부의 효과

위의 정의를 적용하면, 예를 들어 $DARA$ 의 경우, 보험계약자의 부가 증가하면

16) $DARA$ 의 정의는 다음 장에서 확인할 수 있다.

www.kci.go.kr

위험회피도는 감소하게 되므로, 〈정리 4〉에 의해 최대 부가보험료요인 $\overline{\lambda}$도 작아지게 된다. 이 내용은 다음 〈정리 5〉로 요약될 수 있겠다.[17)]

〈정리 5〉

$$(1)\quad DARA \quad \rightarrow \quad \frac{d\overline{\lambda}}{dw} < 0$$

$$(2)\quad CARA \quad \rightarrow \quad \frac{d\overline{\lambda}}{dw} = 0$$

$$(3)\quad IARA \quad \rightarrow \quad \frac{d\overline{\lambda}}{dw} > 0$$

즉, $DARA$의 보험계약자는 부가 증가하면 보험가입에의 욕구가 약해진다. 그리고 이 내용은 $DARA$의 경우 최적보험수요도 감소한다는 내용과 그대로 연계된다.

2. 최적 자기부담금에 미치는 부의 효과

지금부턴 보험계약자가 보유하고 있는 부의 증감이 최적 자기부담금액에 미치는 효과를 조사해 본다. 특히 $DARA$의 경우 자기부담금계약의 보험수요가 열등재(inferior goods)가 된다는 것은, Mossin(1968), Schlesinger (1981) 그리고 Turnbull (1983) 등에 의해, 이미 여러 차례 증명된 바 있다. 그런데 이들 연구들은 모두 사전에 내부해의 존재를 미리 가정하거나(Mossin 1968) 또는 2차조건이 충족되는 경우를 가정하고(Schlesinger 1981, Turnbull 1983) 분석을 수행했었다. 하지만, 앞서 언급된 바와 같이, 자기부담금 분석모형에서의 기대효용함수는 일반적으로 전역적인 오목함수가 되지 못한다. 이런 맥락에서, 〈정리 1〉과 〈정리 2〉의 결과는 최적 자기부담금에 관한 비교정태분석에서도 유용하게 활용될 수 있다. 요약하면, 〈정리 1〉은 1차조건이 충족되는 경우 반드시 2차조건은 자동적으로 충족되며, 또한 〈정리 2〉는 우리로 하여금, 보험료가 과도한 경우만 아니라면(즉 $0 < \lambda < \overline{\lambda}$),

17) 아래 〈정리 5〉는 〈정리 4〉에 의해 자명한 내용이 되므로 수리적 증명과정은 생략하기로 한다.

www.kci.go.kr

기대효용함수에 관해 오목성 등의 추가적인 제약조건 없이 비교정태분석을 수행할 수 있게 해 준다. 이런 내용은 기존연구와 분명한 차별성을 보인다고 하겠다. 이와 더불어, 〈정리 2〉에서 제시되는 보험료조건 $0 < \lambda < \overline{\lambda}$ 은, 무보험과 전부보험의 선택을 사전에 배제시킴으로써, 비교정태분석의 결과를 엄격한 부등호(> 또는 <) 만으로 보다 명확하게 표현할 수 있게 하는 장점도 제공한다. 요컨대, 본 분석모형에서 부의 효과는 다음과 같이 정리된다.

〈정리 6〉

$0 < \lambda < \overline{\lambda}$ 인 경우,
(1) $DARA \quad \rightarrow \quad \dfrac{dD^*}{dw} > 0$
(2) $CARA \quad \rightarrow \quad \dfrac{dD^*}{dw} = 0$
(3) $IARA \quad \rightarrow \quad \dfrac{dD^*}{dw} < 0$

(증명) 먼저 1차조건 $H'(D) = 0$ 으로부터 다음과 같은 함수 K 및 그 부분미분함수 K_1 및 K_2 를 정의한다.

$$K(D,\, w) \;\equiv -P'(D)\left\{\int_0^D u'(y_0)f(x)dx + u'(y_1)[1-F(D)]\right\} - u'(y_1)[1-F(D)]$$

$$K_1(D,\, w) \equiv \partial K/\partial D$$

$$K_2(D,\, w) \equiv \partial K/\partial w$$

그러면 〈정리 1〉에 의해 H 는 엄격한 준오목함수가 되므로 $H'(D^*) = 0$ 이 되는 최적 자기부담금 D^* 가 존재하면 반드시 2차조건 $H''(D^*) < 0$ 이 충족된다. 따라서, $K_1 = H''(D^*) < 0$ 이므로 음함수정리(implicit function theorem)에 의해 다음과 같이 정의되는 함수 k 가 존재한다.

$$D^* = k(w), \text{ 그리고 } k'(w) = -\frac{K_2}{K_1}$$

www.kci.go.kr

한편 k' 의 부호는 다음과 같이 유도되는 K_2 의 부호와 일치한다.

$$K_2 = -P'(D)\left\{\int_0^D u''(y_0)f(x)dx + u''(y_1)[1-F(D)]\right\} - u''(y_1)[1-F(D)]$$

위의 식 우변의 부호를 결정짓는 데는, 위험회피성향 이외에, 효용함수에 관한 추가적인 가정이 필요하다. 먼저, $DARA$ 인 경우를 고려하면, 본 분석모형에서 $y_1 < y_0$ 이므로 다음 부등호가 성립된다.

$$ARA(y_0) = -\frac{u''(y_0)}{u'(y_0)} < -\frac{u''(y_1)}{u'(y_1)} = ARA(y_1)$$

따라서 다음 관련식들이 쉽게 확인될 수 있다.

$$u''(y_0) = -ARA(y_0)\,u'(y_0) > -ARA(y_1)\,u'(y_0)$$
$$u''(y_1) = -ARA(y_1)\,u'(y_1)$$

위의 식에서, 특히 $ARA(y_1)$ 은 x 를 포함하지 않은 상수이므로 다음 부등식이 유도된다.

$$\begin{aligned}
K_2 &= -P'(D)\left\{\int_0^D u''(y_0)f(x)dx + u''(y_1)[1-F(D)]\right\} - u''(y_1)[1-F(D)] \\
&> -P'(D)\left\{\int_0^D -ARA(y_1)\,u'(y_0)f(x)dx - ARA(y_1)\,u'(y_1)[1-F(D)]\right\} \\
&\quad + ARA(y_1)\,u'(y_1)[1-F(D)] \\
&= -ARA(y_1)\times \\
&\quad \left[-P'(D)\left\{\int_0^D u''(y_0)f(x)dx + u''(y_1)[1-F(D)]\right\} - u''(y_1)[1-F(D)]\right] \\
&= -ARA(y_1)\,H'(D) \\
&= 0 \qquad (\because \text{1차조건에 의해 } H'(D)=0)
\end{aligned}$$

$CARA$ 와 $IARA$ 의 경우도 위와 유사한 과정을 거쳐 증명된다. QED

www.kci.go.kr

종합하면, $DARA$의 경우, 보험계약자 부의 증가는 보험가입에의 의지(willingness-to-pay 또는 willingness-to-insure)를 약화시키면서 동시에 최적보험수요도 감소시킨다. 다시 한 번 강조하면, 〈정리 6〉은 기존연구와는 달리 2차조건에의 어떤 가정도 부가되지 않고 유도된 결과물이다.

VII. 요약 및 맺음말

본 연구에서 무엇보다 중요한 내용은, 모든 연구결과들이, 비례적 부가보험료와 보험계약자의 위험회피성향($u'' < 0$) 이외에는, 다른 어떤 추가적인 가정없이 도출되었다는 사실이다. 이 점이 기존의 자기부담금 연구와의 가장 큰 차이점으로 간주될 수 있겠다. 요컨대, 본 논문의 주된 연구결과는 다음과 같이 정리된다.

1. 본 연구는 먼저 최적 자기부담금을 선택하는 보험계약자의 기대효용함수가 '엄격한 준오목함수'임을 확인했다. 따라서 자기부담금 보험계약의 경우, 만약 1차조건을 충족하는 최적 자기부담금이 존재한다면 그 자기부담금은 2차조건을 자동적으로 충족시키며 목적함수를 전역적으로 극대화시키는 유일한 내부해가 된다. 만약 내부해가 존재하지 않는 경우라면, 보험계약자의 기대효용함수는 단조증가 내지는 단조감소한다.
2. 또한 기대효용함수의 준오목성에 기초해, 전부보험, 일부보험 또는 무보험이 되는 보험료조건이 명시적 형태로 제시됐다. 아울러 자기부담금 증가에 수반되는 한계비용함수 $\Phi(D)$가 자기부담금 수준의 엄격한 증가함수가 됨을 규명했고, 또 그 결과를 이용해 각 균형조건들에 대해 다음과 같은 경제학적인 해석을 시도했다
   (1) 부가보험료 요인이 $\lambda = 0$, 즉 자기부담금 증가의 한계혜택이 '0'인 경우, 모든 $D \in (0, L]$에서 한계비용은 $\Phi(D) > 0$ 이므로 보험계약자는 한계비용 $\Phi(D)$가 '0'이 되는 전부보험($D^* = 0$)을 구입한다.

www.kci.go.kr

(2) $\overline{\lambda} \equiv [u'(w-L)/Eu'(w-\tilde{x})]-1$ 를 정의하면, 자기부담금 증가의 한계혜택인 부가보험료 요인 λ가 '$0<\lambda<\overline{\lambda}$'의 범위에서 책정되는 경우, 한계비용함수 $\Phi(D)$는 모든 $D\in(0, L)$에서 단조증가하고 따라서 $\lambda=\Phi(D^{*})$ 즉 자기부담금 증가의 '한계혜택=한계비용'이 충족되는 유일한 해 D^{*}가 존재한다. 즉, 보험계약자는 엄격한 일부보험 ($0<D^{*}<L$)을 구입하는 것이다.

(3) 부가보험료 요인이 과도하게 높은 $\overline{\lambda}\le\lambda$ 의 경우, 모든 $D\in[0, L)$에서 '한계혜택〉한계비용'이 되기 때문에 보험계약자는 자기부담금 상승에 따른 보험료절감의 한계혜택을 극대화할 수 있는 무보험($D^{*}=L$)을 최적으로 선택한다.

3. 위험회피성향(ARA)이 강한 보험계약자일수록, 자기부담금 보험계약이 가능한 부가보험료의 한도 $\overline{\lambda}$는 더 커지고, 따라서 자기부담금 보험계약의 구입가능성은 그만큼 더 높아진다.

4. $DARA$의 보험계약자인 경우, 부의 증가는 최대 부가보험료요인을 낮춤과 동시에 최적 자기부담금 보험수요도 감소시킨다.

부록: 자기부담금 보험계약이 보험계약자 부의 분포에 미치는 영향

잠재적 보험계약자가 보험을 구입하는 근본 이유 중의 하나는 아마도 자산의 변동위험성을 감소시키려는 것일 것이다. 그리고 계약자는 그 대가로 순비용을 지불해야만 한다. 보험료에는 일반적으로 부가보험료가 포함되기 때문이다. 이번 부록에서는 다음 〈보조정리〉를 통해, 부의 변동가능성을 간단히 분산(variance)으로 측정할 때, 자기부담금 보험계약이 부의 기댓값을 희생하는 대가로 부의 안정성을 도모하는 계약임을 확인한다. 그런데 아마도 여기서의 문제점은 비례보험계약에서처럼 그 분석이 간단치 않다는데 있을 것이다. 그 이유는 보상함수 $I_D(x)$ 및 보험계약자의 부 y가 손실액 x 그리고 결정변수인 자기부담금 수준 D에 관해 모두 1차함수가 아닌 비선형함수(non-linear function)가 되기 때문이다.

www.kci.go.kr

〈보조정리〉

부가보험료가 있는 경우, 자기부담금 수준이 높아지면 부의 기댓값과 분산은 모두 증가한다. 즉, $\lambda > 0$ 이면, 모든 $D \in (0, L)$에 대해,

$$\frac{dE\tilde{y}}{dD} > 0\ , \quad \frac{dVAR(\tilde{y})}{dD} > 0$$

(증명) (1) 먼저 $dE\tilde{y}/dD > 0$을 확인하기로 한다. 보험계약 후 계약자가 갖게 되는 부의 기댓값은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$E\tilde{y} = w - P(D) - E\min(\tilde{x}, D) = w - P(D) - \int_0^D [1 - F(x)]dx \quad \text{(A1)}$$

위의 식 우변은 라이프니쯔공식으로 다음과 같이 간단히 D에 관해 미분된다. 즉 $\lambda > 0$ 이면, 모든 $D \in [0, L)$에 대해

$$\frac{dE\tilde{y}}{dD} = \lambda \cdot [1 - F(D)] > 0 \quad \text{(A2)}$$

참고로 말하면, 식 (A2)에서 자기부담금이 자산의 기댓값에 미치는 영향을 다음과 같이 두 단계로 구분하여 생각할 수 있겠다. 본문에서 정의된 $I \equiv EI_D(\tilde{x})$ 를 기억하면

$$\frac{dE\tilde{y}}{dD} = \frac{dI}{dD} \cdot \frac{dE\tilde{y}}{dI} = -[1 - F(D)] \cdot (-\lambda) > 0 \quad \text{(A3)}$$

요컨대, 자기부담금이 1단위 증가하면 보험담보가 감소되면서 기대보상금액 $EI_D(\tilde{x})$ 는 $1 - F(D)$ 만큼 감소하고,[18] 또한 기대보상금액 $EI_D(\tilde{x})$ 1단위의 증가는 부가보험료 요인으로 인해 부의 기댓값을 λ 만큼 순감소시키기 때문에, 결과적

18) 본문 2장의 보험료에서 이미 언급된 것처럼, $1 - F(D)$ 는 자기부담금 보험계약에서 보험계약자가 손실을 보상받는 확률을 의미한다. 즉, $-[1 - F(D)]$ 는 자기부담금 1단위의 상승으로 인해 감소되는 기대보상금액이라고 할 수 있겠다.

www.kci.go.kr

으로 자기부담금의 1단위 증가는 부의 기댓값을 $\lambda \cdot [1-F(D)]$ 만큼 높이게 된다.

만약 보험료가 부가보험료가 없이 순보험료로만 책정되면, 보험계약자의 기말 자산 기댓값은 자기부담금 수준 D와는 관계없이 항상 일정한 값을 가진다. 즉 $\lambda=0$ 이면 모든 $D \in [0, L]$ 에 대해

$$\frac{dE\tilde{y}}{dD} = \lambda \cdot [1-F(D)] = 0 \tag{A4}$$

(2) 자기부담금 보험계약 후에 보험계약자가 보유하게 되는 분산위험을 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} VAR(\tilde{y}) &= VAR[w-\tilde{x}-P(D)+I_D(\tilde{x})] \\ &= VAR[\tilde{x}-I_D(\tilde{x})] \\ &= E[\tilde{x}-I_D(\tilde{x})]^2 - \left\{E[\tilde{x}-I_D(\tilde{x})]\right\}^2 \end{aligned} \tag{A5}$$

여기서 $\overline{F}(x) \equiv 1-F(x)$ 를 정의하면[19], 위의 식 우변 첫째항은 다음과 같이 변형될 수 있다.

$$\begin{aligned} E[\tilde{x}-I_D(\tilde{x})]^2 &= E\left[\min(\tilde{x}, D)\right]^2 \\ &= \int_0^D x^2 f(x)dx + \int_D^L D^2 f(x)dx \\ &= -\int_0^D x^2 d\overline{F}(x) + D^2[1-F(D)] \\ &= -\left[x^2 \cdot \overline{F}(x)\right]_{x=0}^D + 2\int_0^D x\overline{F}(x)dx + D^2[1-F(D)] \\ &= 2\int_0^D x\overline{F}(x)dx \end{aligned} \tag{A6}$$

유사한 방법으로 식 (A5)의 우변 두 번째 항 $E[\tilde{x}-I_D(\tilde{x})]$ 도 다음과 같이 나타난다.

19) 보험계리학(actuarial science)에서 자주 사용되는 $\overline{F}(x) \equiv 1-F(x)$ 는 보통 생존함수(survival function) 라고 부른다. Kaas et al.(2008, p. 62) 또는 이재원(2005, p. 49) 참조 바람.

www.kci.go.kr

$$E[\tilde{x} - I_D(\tilde{x})] \ = E\min(\tilde{x},\, D) \ = \int_0^D [1 - F(x)]dx \tag{A7}$$

이제 위의 식 (A6)과 (A7)를 (A5)에 대입하면 $VAR(\tilde{y})$는 다음과 같이 표현된다.

$$VAR(\tilde{y}) = 2\int_0^D x[1 - F(x)]dx - \left\{\int_0^D [1 - F(x)]dx\right\}^2 \tag{A8}$$

끝으로 라이프니쯔공식을 적용해 위의 식 (A8)을 미분하면 다음 결과를 얻는다. 즉 모든 $D \in (0,\, L)$에 대해

$$\begin{aligned} \frac{d}{dD}VAR(\tilde{y}) \ &= \frac{d}{dD}\left[2\int_0^D x[1 - F(x)]dx - \left\{\int_0^D [1 - F(x)]dx\right\}^2\right] \\ &= 2D[1 - F(D)] - 2\int_0^D [1 - F(x)]dx \cdot [1 - F(D)] \\ &= 2[1 - F(D)]\left\{D - \int_0^D [1 - F(x)]dx\right\} \\ &= 2[1 - F(D)]\left[D - E\min(\tilde{x},\, D)\right] \qquad \text{(A9)} \\ &> 0 \end{aligned}$$

네 번째 등호는 $E\min(\tilde{x},\, D) = E[\tilde{x} - I_D(\tilde{x})] = \int_0^D [1 - F(x)]dx$ 에 의해 성립된다. QED

물론 ⟨보조정리⟩에서 사용한 분산이 적절한 위험측정수단이 되는가에는 의문의 여지가 있다. 하지만 위험성을 평가할 때 직관적으로 간편하게 적용할 수 있는 수단은 역시 분산이 된다. ⟨보조정리⟩의 경우처럼, 분산을 이용하는 경우, 우리는 부의 변동위험성을 감소시켜 주는 자기부담금 보험계약의 역할을 충분히 짐작할 수 있다.

www.kci.go.kr

참고문헌

이재원, **확률과 보험통계**, 경문사, 2005.

(Translated in English) JaeWon Lee, *Probability and Insurance Statistics*, KyoungMun-Sa, 2005.

Arrow, K. J., "Uncertainty and the Welfare Economics of Medical Care," *in Aspects of the Theory of Risk Bearing*, Helsinki: Johnsonin Saatie, 1965.

Boyd, S. and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.

Cummins, J. D., and O. Mahul, "The Demand for Insurance with an Upper Limit on Coverage", *Journal of Risk and Insurance*, 2004, pp. 253-264.

Demers, Fanny and Michel Demers, "Increases in Risk and the Optimal Deductible", *Journal of Risk and Insurance*, 1991, pp. 670-699.

Eeckhoudt, L. and C. Gollier, *Risk: Evaluation, Management and Sharing,* New York: Harvester Wheatsheaf, 1995.

Eeckhoudt, L., C. Gollier, and H. Schlesinger, *Economic and Financial Decisions under Risk*, Princeton University Press, 2005.

Gaffney, C. and Adi Ben-Israel, "A Simple Insurance Model: Optimal Coverage and Deductible", *Annals of Operational Research* 237, 2016, pp. 263-279.

Gollier, C., and H. Schlesinger, "Arrow's Theorem on the Optimality of Deductibles: A Stochastic Dominance Approach," *Economic Theory,* 1996, pp. 359-363.

Kaas, R., M. Goovaerts, J. Dhaene, and M. Denuit, *Modern Actuarial Risk Theory*, 2nd ed., Springer, 2008.

Meyer, Jack and Michael B. Ormiston, "Analysing for Demand for Deductible Insurance", *Journal of Risk and Uncertainty*, Vol. 18, 1999, pp. 223-230.

www.kci.go.kr

Mossin, J., "Aspects of Rational Insurance Purchasing," *Journal of Political Economy*, 1968, pp. 553-568.

Pratt, John W., "Risk Aversion in the Small and in the Large." *Econometrica,* January-April 1964, pp. 122-136.

Raviv, A., "The Design of an Optimal Insurance Policy", *American Economic Review* 69, 1979, pp. 84-96.

Schlesinger, H., "The Optimal Level of Deductiblity in Insurance Contracts," *Journal of Risk and Insurance*, 1981, pp. 465-481.

______, "The Theory of Insurance Demand", *The Handbook of Insurance*, 2nd edition, G. Dionne (ed), Springer Science+Business Media, 2013, pp. 167-184.

Sydsaester, K., P. Hammond, A. Seierstad, and A. Strøm, *Further Mathematics for Economic Analysis*, 2nd ed., Prentice Hall, 2008.

Turnbull, S., "Additional Aspects of Rational Insurance Purchasing", *Journal of Business*, 1983, pp. 217-229.

Zhou, C., W. Wu, and C. Wu, "Optimal Insurance in the Presence of Insurer's Loss Limit", *Insurance: Mathemtics and Economics* 46, 2010, pp. 300-307.

www.kci.go.kr

Abstract

It is well-known in the insurance economics that the objective function with expected utility may not be concave in the deductible level purchased by the insured, unlike coinsurance case. First, we show that given the proportional loading, expected utility function with respect to deductible level is strictly quasi-concave. In addition, as our main contribution, we establish a set of premium conditions under which a risk-averse individual selects full, partial or no coverage level, and gives an intuitive economic interpretation. Moreover, we also consider the comparative statics effects of changes in risk aversion and in wealth. In comparison with the existing literature; for example, Schlesinger (1981), all the findings of this article are obtained only by proportional loading assumption without further restriction on the expected utility function.

※ **Key words:** deductible, demand for insurance, no coverage, partial insurance, full insurance

www.kci.go.kr