

GSP를 활용한 함수지도에 관한 연구

오흥준*, 양명섭**

요약

함수는 현대 수학에 있어 기본이고 중요한 부분이다. 최근에는 함수의 개념과 그래프 그리기에 컴퓨터나 전자계산기를 활용한 교수법이 관심을 끌고 있다. 함수에 대한 설명에서는 컴퓨터의 사용에 관심이 집중되고 있다. 이런 관점에서, 멀티미디어를 활용한 수업에서 학생들이 Excel이나 GSP를 사용하여 함수의 성질을 연구하고 그래프를 그리는 것이 가능하게 되었다.

이 논문에서는 7차 교육과정 하에서 GSP를 배우고 가르치는 방법에 대하여 간략히 설명하였다. 아울러 GSP의 기본 성질을 소개하였다. 결론에서는 GSP를 사용하여 함수를 효과적이고 활동적으로 교육할 수 있는 교수법의 예를 제안하였다.

A Study on the Teaching Method for Function Mathematic Using GSP

Oh, Heungjoon*, Myung-Sub Yang**

ABSTRACT

Function is the basic and important part of modern mathematics. Recently there have been a number of interesting teaching methods for function concepts and graphs using computer or electronic calculator. Attention has been paid to the use of the computer in a description of the function. In fact, it is possible for students to research properties of function and plot their graphs using Excel or GSP in their classes provided with the multimedia system.

In this paper, we present a teaching and learning method using GSP in the text book which follows the 7th educational curriculum. And we introduce basic properties of GSP. In the conclusion of this paper, we suggest an example of effective and active teaching methods for function using GSP.

Key Words : Function, Graphic, Computer Assisted Instruction, teaching method, GSP

* 초당대학교 교양교직학부(✉hjoh@cdu.ac.kr)

** 초당대학교 IT융합학부

· 제1저자(First Author) : 오흥준 · 교신저자(Correspondent Author) : 양명섭

· 접수일(2012년 11월 12일), 수정일(1차 : 2013년 1월 28일), 게재확정일(2013년 2월 18일)

I. 서 론

급속히 빠른 과학기술의 발전으로 인하여 현대사회는 무수히 많은 지식정보들이 빠른 속도로 변화하고 있으며 이러한 정보들을 빠른 시간 내에 처리하기 위해서는 컴퓨터를 활용한 교육이 필수적이라는 주장이 많이 제기되어 왔다.[1] 그러나 현행의 교실 수업에서는 자, 삼각자, 각도기, 등을 이용하여 칠판에 도형을 그리고 있으며, 학생들은 교사가 그리는 도형만을 지켜보게 되고, 학생의 참여가 없는 수동적인 수업방식은 함수의 그래프를 그릴 때는 정확한 좌표보다는 임의로 잡은 좌표로 함수의 내용들을 공부하고 있다. 또한, 복잡한 계산이나 복잡한 도형들은 칠판 수업으로는 힘들고 어려운 함수의 그래프 문제에 봉착이 되면 문제 인식 단계부터 학생들은 풀기가 쉽지 않을 뿐만 아니라 여러 가지 한계점이 있다. 그러나 컴퓨터를 학습보조 도구로 사용한다면 칠판에서의 한계점으로부터 벗어날 수가 있다.

최근에는 다양하고 많은 종류의 교육용 소프트웨어가 출시되므로 인하여 컴퓨터를 교육적 측면에서 다양하게 활용할 수 있는 많은 연구가 이루어지고 있다. 그리고 지필 수업에 따르는 여러 가지 제약점을 극복하기 위하여 컴퓨터 소프트웨어의 그래픽 기능에 관심을 갖게 되고 이것이 수학학습의 효과를 증진시킨다는 결과가 발표되고 있다.[2]

본고에서 다루고자 하는 GSP(Geometer's Sketchpad)는 자와 컴퍼스를 가지고 작도하는 것과 같은 방법으로 컴퓨터 화면상에서 작도 할 수 있는 기하작도 프로그램이다. 이를 활용하여 현재 새롭게 편성되어 시행되고 있는 고등학교 수학 교과서에 알맞은 수업방안을 제시하는데 목적을 두고, 특히 함수를 그래프와 연계하여 지도하는 방법을 제시하고자 한다.

II. 수학교육에서 GSP의 활용

2.1 GSP의 개요

GSP(Geometer's Sketchpad)는 Morvian대학의 Dr. Doris Schattchneider와 Swartmore 대학의 Dr. Eugene Klotz의 지도아래 국립과학기초기금 연구인 Visual Geometry Project(VGP)사업의 일환으로 개발되었다. 윈도우용인 버전이 발표되면서 측정의 의한 변환, 스크립트 도구, 개선된 수학적 기호, 호, 작도할 수 있는 자취 및 궤적, 해석적이면서 그래프를 작도할 수 있는 능력 등을 고루 갖추게 되었다.

2.2 GSP의 특징

종이와 연필, 자, 컴퍼스만을 이용하여 기하학적 원리를 담은 도형과 그래프를 정확히 그리기에는 작성하면 여러 가지 제약이 따른다. 특히 수업시간에 자와 컴퍼스로 작도를 한다는 것은 시간의 제약 상 거의 불가능하다. GSP는 기본적으로 점, 직선, 원을 이용하여 여러 가지 도형과 그래프를 쉽게 그릴 수 있고 기하학적 관계와 성질의 알 수 있도록 개발된 소프트웨어이다.

GSP의 특징을 살펴보면 다음과 같다.

- 1) GSP는 기본적으로 점, 직선, 그리고 원을 이용하여 여러 기하학적 표현을 쉽고 명확히 구현할 수 있고 도형들의 본질적인 관련성을 쉽고 명백하게 나타낼 수 있다.
- 2) 스크립트를 이용하여 그림 그리는 과정을 기록하여 다시 재생 할 수도 있으며 애니메이션 기능을 사용하여 움직이는 도형의 흔적이나 자취를 구할 수 있다.
- 3) 도형의 여러 요소의 색상처리, 변환, 측정, 계산, 도형의 방정식의 표현이 쉽게 구현되고, 이

름표나 주석을 사용하여 여러 표현도 손쉽게 처리할 수 있다.

- 4) 정확한 작도를 할 수 있어서 기하법칙을 발견하는데 중요한 역할을 할 수 있다.
- 5) 극한 문제나 프랙털과 같은 유형의 문제들도 접근할 수 있다.

2.3 GSP를 통한 평면기하의 교육적 의의[3]

- 1) GSP는 정적인 상태의 인쇄 매체나 칠판보다 동적인 평면기하의 성질을 지도할 때 더 빠르고 명확하게 이해를 할 수 있다.
 - 2) GSP는 일반적인 그림 프로그램과 달리 자와 컴퍼스만을 사용하는 작도와 측정을 통하여 학생들의 흥미를 유발할 수 있고, 학생들이 직접 GSP를 사용한다면 학습욕구를 높일 수 있다.
 - 3) 평면기하의 성질을 발견적으로 찾아낼 수 있도록 자극할 때 GSP를 마치 실험도구로 사용하여 실제로 작도하고 측정하여 그 성질에 대한 가설을 학습자 스스로 세울 수 있도록 도와준다.
 - 4) 평면기하의 성질이 학생들에게 충분히 이해시킨 뒤 연역적인 증명을 위하여 GSP는 정확한 그림을 제공할 수 있다.
 - 5) GSP는 애니메이션과 끌기를 사용하여 평면기하의 성질을 연속적이고 역동적으로 관찰할 수 있다.
 - 6) Loop 기능을 사용하면 단순 반복을 통한 프랙털의 그림을 구현할 수 있다.
 - 7) GSP에서 제공되는 직교 좌표계와 극 좌표계를 통하여 평면기하의 여러 가지 성질에 대한 해석 기하학적인 접근이 가능하다.
- GSP 프로그램의 활용은 교수·학습 방법, 가르쳐야 할 수학 내용, 교사와 학생의 역할, 수학에 대한 흥미와 태도 등 많은 것을 변화시킬 수 있다.[4] 이러한 환경에서 교사는 실험을 촉진시키

며, 학생들로 하여금 아이디어를 정리하고 앞에서 학습한 내용과 관련시키는 기회를 제공할 수 있게 된다.

2.4 GSP사용의 개선점과 유의점

- 1) 컴퓨터에 무지한 학생들에게 사전 지도가 충분히 이루어진 후 GSP 수업이 진행되어야 한다.
- 2) 초보자나 수업 진행을 놓친 학생들을 위하여 사전에 교육된 도우미를 배치하여 수시로 도움을 받게 하여야 한다.
- 3) GSP 수업으로 만 편성된 수업이 되면 교사와 학생간의 대화 단절로 인하여 무미건조한 수업이 될 수 있으므로 여유 있는 수업으로 대화의 장을 마련하여야 한다.
- 4) 특수문자인 수식 대입이 더욱 쉽고 간단한 조작 방법으로 이루어져야 하는 사용상의 개선이 시급하다.
- 5) GSP에는 측정메뉴에서 길이, 각의 크기, 도형의 넓이 등이 바로 계산되어지기 때문에 기초적인 계산능력이 저하될 수 있다.
- 6) GSP에는 도형이나 그래프를 바로 그릴 수는 있는 기능이 있기 때문에 도형에 관련된 용어의 정확한 정의나 성질을 이해하지 못한 채 무의식적으로 도형을 그릴 수 있다.
- 7) GSP를 이용하여 문제 풀이를 하던가, 도형의 개념이나 성질 등을 더 잘 나타낼 수 있다고 해서 학생들의 실력이 향상되었다고 생각해서는 안 된다. 오히려 학생들의 창의력과 사고력을 향상시키는 것이 아니라 오히려 저해할 수 있다. 학생들의 수준 차나 사고력차이가 존재하기 때문에 GSP의 사용이 학생들에게 어떠한 영향을 미치는지를 고려하여 그에 맞는 학습 자료가 개발되어야 한다.

III. 본론

3.1 GSP를 활용한 교수-학습 과정 제시

3.1.1 단원의 설정이유

21세기의 정보화 사회에서는 각종 자료와 정보를 수집, 분석하여 종합, 판단할 수 있는 능력이 요구된다.[5]

수학교육에서 계산기 및 컴퓨터의 학습 보조 도구 활용은 행동주의 심리학에 그 바탕을 두고 있으며 이미 만들어져 있는 수학을 학생들에게 잘 전달하고 연습시키는 역할에 초점을 맞추고 있는 것으로 컴퓨터가 개념이나 기능을 가르칠 때는 개인교사의 역할을 한다. 대부분의 경우 컴퓨터는 정보를 제공하고 질문을 하며 학습자의 대답에 대해 평가하고 그 결과를 즉시 알려주며 그에 대한 보충심화학습을 제공한다.

3.1.2 지도 계획

표 1. 지도계획
Table 1. A guidance plan

단원	절명	학습내용	배당 시간
1. 평면좌표와 직선의 방정식	1-1 평면좌표 1-2 직선의 방정식	·두 점 사이의 거리와 선분의 내, 외분점 ·여러 가지 직선의 방정식 ·점과 직선 사이의 거리	6
2. 원의 방정식	2-1 원의 방정식 2-2 두 원의 위치 관계 2-3 원과 직선의 관계	·원의 방정식 ·두 원의 위치와 중심거리 ·원과 직선의 위치 관계와 판별식 ·접선의 방정식	5
3. 도형의 이동	3-1 평행이동 3-2 대칭이동	·도형의 방정식과 도형의 평행이동 ·원점, x축, y축, y=x에 대한 대칭이동	4
4. 부등식의 영역	4-1 부등식의 영역 4-2 최대값, 최소값	·부등식과 연립부등식의 영역 ·최대값과 최소값	3

5. 함수	5-1 함수의 뜻 5-2 합성함수 5-3 역함수	·함수를 기호로 나타내고 그래프 그리기 ·합성함수 ·일대일 대응과 역함수의 뜻 ·역함수의 성질과 그래프	4
6. 유리, 무리함수	6-1 이차함수의 활용 6-2 유리함수 6-3 무리함수	·이차함수의 최대, 최소 ·이차함수와 직선의 위치 관계 ·이차방정식과 이차부등식의 응용 ·유리함수의 뜻과 $y = \frac{cx+d}{ax+b}$ 의 그래프 ·무리함수의 뜻과 $y = \sqrt{ax+b+c}$ 의 그래프	7
7. 삼각함수와 그래프	7-1 삼각함수의 정의 7-2 삼각함수의 그래프	·일반각, 호도법 ·삼각함수의 뜻 · $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$ 의 그래프와 성질	7
8. 삼각함수의 성질	8-1 삼각함수의 성질 8-2 삼각방정식과 삼각부등식	·삼각함수 사이의 관계 ·삼각방정식 ·삼각부등식	5
9. 삼각형의 응용	9-1 사인, 코사인 법칙 9-2 삼각형의 넓이 9-3 삼각함수의 활용	·사인법칙 ·제일 코사인법칙 ·제이 코사인법칙 ·삼각형의 넓이	5

3.2 GSP를 활용한 원의 수업지도안제시

여기서는 GSP를 활용한 학습지도안(전개)과 그와 관련된 여러 가지 GSP 활용방안을 원에 한하여 제시하고자 한다.

3.2.1 원의 방정식 수업지도안

표 2. GSP를 활용한 원의 방정식 수업지도안
Table 2. The guidan plan for equation of circle using GSP.

제 목	원의 방정식
학습 주제	원의 정의를 이해하고 정의로부터 원의 방정식을 유도한다.
교수학습 단계	□ 도 입 ● 전개 □ 정리 및 과제부과 □ 심화보충활동

집단 구성	<input checked="" type="checkbox"/> 전체 <input type="checkbox"/> 소집단(동질) <input type="checkbox"/> 소집단(이질) <input checked="" type="checkbox"/> 개별
준비물/매체	•교사: 교과서, GSP파일 •학생: 교과서, 노트, 디스켓
교수학습 활동	• 원의 정의 : 평면 위의 한 점으로부터 일정한 거리에 있는 점들의 집합 • GSP 그림 제시 • 원 방정식의 표준형 좌표평면 위에서 중심이 $C(a, b)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식은 다음과 같이 구한다. 중심 $C(a, b)$ 에서 $\overline{CP} = r$ 인 임의의 점을 $P(x, y)$ 라고 하면 $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$ 따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 이다. [보기] 중심이 $(2, 1)$ 이고 반지름의 길이가 2인 원의 방정식을 구하여라. (풀이) 원의 방정식 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 에서 $a=2, b=1, r=2$ 이므로 구하는 원의 방정식은 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2^2$ 이다. • 원 방정식의 일반형 원의 방정식 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 을 전개하여 정리하면 $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$ 이 되므로 일반적으로 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다. $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \quad (A, B, C \text{는 상수})$ ■ 원 방정식의 일반형은 표준형으로 고쳐서 중심과 반지름을 구한다.
지도상 유의점	좌표평면 위에서 두 점 사이의 거리로부터 원의 방정식을 유도한다.
수업운영 아이디어	구체적인 조작활동을 통하여 원의 정의를 이해하도록 돕는다.
관련 웹사이트	http://mathought.com/index2.htm http://www.blume.net/~first/main.htm

[GSP 그림]

애니메이션 버튼을 눌러 한 정점으로부터 같은 거리에 있는 점들의 자취(원의 정의)를 보여준다.

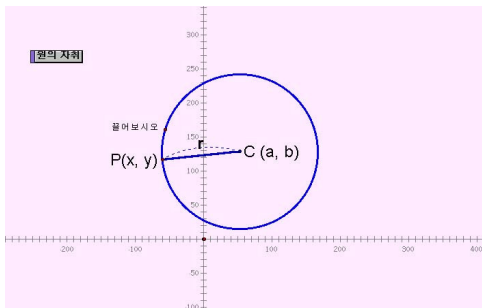


그림 1. GPS를 이용한 원의 자취
 Fig. 1 A trace of circle using GSP.

3.2.2 GSP를 활용한 원의 성질

3.2.2.1 원의 접선의 성질

다음 그림(그림 2.)에서 점 B가 움직일 때 각 EGH는 항상 직각을 유지한다. 점 G가 원 위에 올 때도 직각은 유지된다. 점 G는 선분 EF의 중점이고 직선 HI는 점 C를 지나며 직선 AB에 수직인 직선이다.

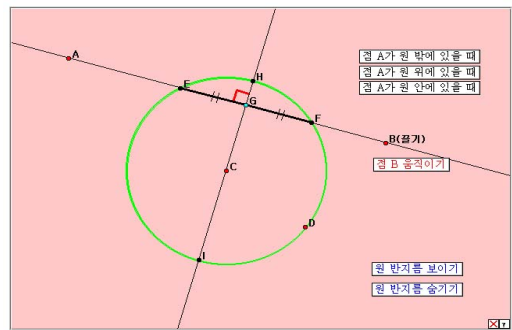


그림 2. GSP를 이용한 원의 접선
 Fig. 2 A tangent of circle using GSP.

[실험]

1. 점 B를 끌어 점 G의 자취를 관찰해 보자.
2. “점 B 움직이기” 버튼을 클릭하여 실제로 점 G가 그리는 자취가 무엇인지 관찰해 보자.
3. 버튼 “점 A가 원 밖에 있을 때”, “원 위에 있을 때”, “원 안에 있을 때”를 클릭하고 다시 “점 B 움직이기” 버튼을 클릭하여 보자.

3.2.2.2 두 원의 위치관계

두 원의 위치에 따라서 이 두 원의 중심사이의 거리와 반지름의 합과 차이 사이에 어떤 관계가 있을까? 아래 그림에서 선분 CD는 중심사이의 거리, 선분 PD는 두 원의 반지름의 합, 선분 QD는 두 원의 반지름의 차를 나타낸다.

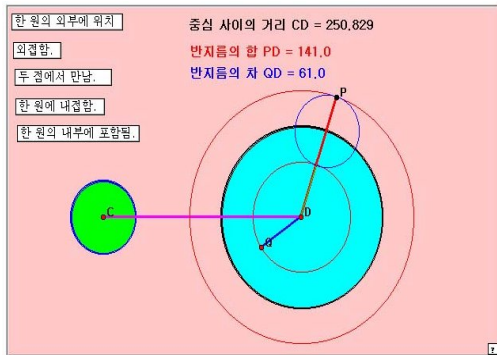


그림 3. GSP를 이용한 두 원의 관계
Fig. 3 The relationship of two circles using GSP.

[실험]

두 원의 위치관계를 나타내는 각 버튼들을 한 번씩 클릭 해보면서 위의 세 선분의 길이 사이에 어떤 대소 관계가 성립하는가를 조사해 보자.

IV. 결론

정보화 사회에서는 계산적인 알고리즘의 측면보다는 개념적 이해가 중요시되며, 창의적 문제 해결력, 추론 능력, 의사소통 능력, 표상능력, 수학 내의 여러 영역이나 인접교과와의 연관성의 탐구능력 등 다양한 고등 사고 능력이 총체적으로 요구된다.

본 연구에서는 기하를 포함한 수학의 증명을 학생들에게 가르칠 때는 칠판에 그래프나 도형을 그려 학생들에게 이해를 요구하기보다는 용어의 정의와 그래프나 도형을 통하여 직관적 사고력을 향상시킬 수 있는 방안으로 수업시간에 GSP를 활용하게 되었다. GSP는 기하교육에 유용한 소프트웨어로 학생들이 컴퓨터를 조작하여 도형을 쉽고 정확하게 작도할 수 있고 마음대로 조작할 수 있는 탐구활동을 통하여 개념적 이해나 추론을 하기 전

에 기하학적 대상들 사이의 관계를 직관적으로 파악할 수 있어서 증명교육의 어려움을 완화시킬 수 있다는 점이 기하교육의 문제점을 개선하는데 큰 도움이 될 것으로 본다.

교사는 학생들이 특정한 또는 몇 개의 도형의 성질들을 발견하도록 지도하거나, 다양한 해결방법이 예상되는 질문이나 문제를 학생들이 직접 경험할 수 있도록 노력해야 한다. 또 학생들은 특정한 개념을 이해하고 그 관련성을 파악할 수 있어야 하며, 언제나 그들이 발견한 사실들을 연구하고 토론해 보아야 한다. 어떠한 방법으로 GSP를 사용하던 그것은 탐구와 토론을 전제로 해야 한다.

따라서 본 연구는 함수부분의 그래프를 GSP를 활용하여 지도함으로써 보다 효과적인 교수-학습 지도안을 모색하고자 하였다. GSP를 활용한 교수-학습이 충분한 효과를 거두기 위해서는 다음과 같은 것이 선행되어야 할 것이다.

첫째, 교사는 GSP의 기능에 대해 숙달되어야 하며, 이를 활용하여 학생들의 창의적 사고력을 키울 수 있도록 지도할 수 있어야 한다.

둘째, 학생들의 기하학적인 사고를 키우기 위한 다양한 수업 활동을 위해서는 학생들의 수준 차나 사고력 차이를 고려하여야 하며, 그에 맞는 다양한 GSP 학습 자료가 개발되어야 한다.

셋째, 사전에 교육된 도우미를 배치하여 학생들이 수시로 친구의 도움을 받게 하며, 교사와 학생간의 대화 단절로 인하여 무미건조한 수업이 될 수 있으므로 여유 있는 수업으로 대화의 장을 마련하여야 한다.

GSP를 활용한 수업만이 기하 교육의 최상의 방법이라고는 단언 할 수 없다. 다만 다양한 자료의 활용과 개발이 교사의 몫이라 생각하며 수학교육에 있어서 컴퓨터의 활용은 당연히 수학교육의 목적에 부합되는 것이어야 한다. 수학교육에 컴퓨터 도입의 필요성과 그 활용의 의미를 깊게 인식하고

있지만 프로그램의 활용, 적용에 대한 소양이 부족한 실정이다. 따라서 컴퓨터 활용과 이를 이용한 다양한 교수-학습 자료의 개발 및 활용을 위하여 교사들의 끊임없는 노력과 연구가 있어야 하며 변화의 흐름에 대처할 수 있는 현장교사의 재교육, 교육시설 및 환경의 개선 등이 제도적 측면에서 함께 고려되어야 한다. 또한 컴퓨터를 활용해서 효과적으로 지도할 수 있는 것들에 대해서는 과감하게 컴퓨터를 도입하는 것이 필요하다. 이를 위해서는 컴퓨터를 어떻게 활용하는 것이 효과적인지에 관한 연구가 선행되어야 하며, 이런 연구를 바탕으로 바람직한 방향으로 교육과정이 개선되어야 할 것이다.

참고문헌

- [1] 신동선, 류희찬. *수학교육과 컴퓨터*. 서울: 경문사, 1998
- [2] 김민경, 김유진(2003). 정보 통신 기술 활용 교육의 수학교과 적용 방안 탐색. 한국수학교육학회지 시리즈A <수학교육> 41(3), pp.41-56.
- [3] 황우형, 차순규(2002). 탐구형 소프트웨어를 활용한 고등학교 해석기하교육에 관한 사례 연구. 한국수학교육학회지 시리즈A <수학교육> 41(3), pp.341-360.
- [4] 이칭찬. *교육방법과 교육공학*. 서울: 문음사, 1995
- [5] 서기순(2002). 수학과 제7차 교육과정. 경상남도 중등수학1급 정교사 자격연수교재, pp.330-338.
- [6] 강현구(2000). GSP를 활용한 함수 지도에 관한 연구. 충북대학교 교육대학원 석사학위 논문.
- [7] 박상호, 윤삼열. *고등학교 수학에서의 GSP 활용*. 서울: 수학사랑. 1999
- [8] 수학사랑 GSP활용 교재개발팀. *GSP의 활용 예제*. 서울: 수학사랑. 1998
- [9] 조한혁(2003). 컴퓨터와 수학교육, 한국수학교육학회지 시리즈A <수학교육> 42(2), pp. 177-191.

저자소개

오흥준(Oh, Heungjoon)



1988년 명지대학교 대학원 수학과 (이학석사)
1994년 명지대학교 대학원 수학과 (이학박사)

1995년~현재 초당대학교 교양교직학부 교수
※ 관심분야: 대수학, 암호론, 수학교육

양명섭(Myung-Sub Yangg)



1995년 전북대학교 대학원 전자계산학과 (공학석사)
1999년 전북대학교 대학원 전자계산학과 (공학박사)

2000년~현재 초당대학교 IT융합학부 교수
※ 관심분야: Machine Vision, Image Processing, Embedded System