



A Study on Controller Design for Time Delayed System

Houng-Kun Joung, Dong-Kyun Lim*

Department of Mechanical & Automotive Engineering, Hanyang Cyber University

ABSTRACT

This study compared methods of designing a robust PID controller, which satisfies the design specification in a system with time delay, and has robustness and stability at the same time. This study compared the PID controller tuning method of Ziegler and Nichols and the PID controller design method by using the suggested by Grassi of H^∞ . The PID controller tuning methods of Ziegler and Nichols include a step response method, a frequency response method, and a modified method. The PID controller tuning methods of Ziegler and Nichols are widely used in industrial fields and are easy to design mathematically. They are PID control tuning methods widely used for the systems that the dynamic characteristics of a plant are not fully known. The PID controller design method using Grassi of H^∞ is a PID tuning method that H^∞ norm, which guarantees the stability and robustness, uses the convex optimization method. This study compared the method of Ziegler and Nichols and the method proposed by Grassi of H^∞ to propose a controller tuning method guaranteeing the stability and robustness, supposed to be guaranteed by a PID controller. Moreover, the performance of two methods was compared through simulations. In order to consider the design specifications for the frequency domain, simulations were compared after dividing the design conditions into a low-frequency barrier, satisfying the command follow-up and external disturbance canceling performances, and a high-frequency barrier, corresponding to the low sensitivity performance against the sensor noise.

© 2017 KKITS All rights reserved

KEYWORDS : PID Control, H^∞ Control, Time Delay, Second Order System, Small Gain Theory

ARTICLE INFO: Received 3 November 2017, Revised 6 December 2017, Accepted 8 December 2017.

*Corresponding author is with the Department of Mechanical & Automotive Engineering, Hanyang Cyber

University, E-mail addresses : eiger07@hycu.ac.kr , Tel : +82 2 2290 0301 , Fax : +82 2 2290 0600

1. 서론

제어공학 엔지니어들의 주요한 관심사는 설계 사양을 만족시키면서 동시에 강인성(Robustness)과 안정성(Stability)을 동시에 갖는 제어기 설계를 하는 것이 목적이다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 수학적 이론에 근거를 둔 최적제어가 LQR(Linear Quadratic Regulator)[1][21]과 LQG-LTR[3], H^∞ [3][4] 등 많은 방법들이 제안 되었다. 최근의 방법 들은 최악의 경우에서도 주어진 성능을 만족시키는 목적으로 설계가 이루어지기 때문에 제어기 들은 제어대상에 비하여 높은 차수가 된다. 그렇지만 컴퓨터의 성능과 연산능력의 향상 때문에 복잡한 제어기를 설계하더라도 구현하는 문제는 어렵지는 않다. 그럼에도 불구하고 투자 대비 효과 측면에 있어서 PID 제어기의 탁월성 때문에 아직도 산업계에서는 최신 최적제어 이론들 보다 간단하고 친숙한 PID 제어기가 널리 사용되고 있다[5]. 본 논문에서 비교하는 제어기 설계방법은 산업현장에서 널리 사용하고 있는 Ziegler-Nichols의 제어기 설계 방법[6][7]과 Grassi[8][9]의 제어기 설계 방법을 비교하여 PID제어기의 안정성과 강인성을 보장하도록 하는 제어기 동조에 대한 방법을 제안한다.

2. 제어기 설계 비교

2.1 Ziegler와 Nichols(Z-N)방법

Z-N 방법[6]은 계단 응답 방법과 주파수 응답 방법 그리고 변형된 방법 등이 있으나, 본 논문에서는 계단 응답 방법과 주파수 응답방법만 기술한다[7].

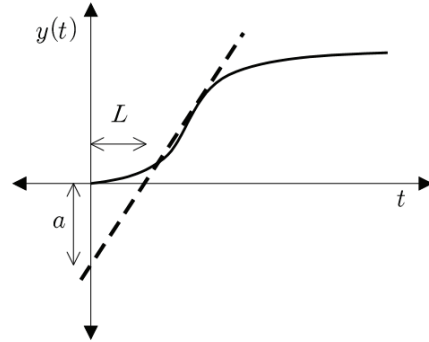


그림 1 계단 응답에서 Z-N 파라미터 a 와 L
Figure 1 Z-N Parameters, a and L in the Step Response

계단 응답 방법은 <그림 1>에서 단위입력에 대한 응답곡선에서 기울기가 가장 크게 되는 점에 접선을 연결하여 플랜트의 부동시간(dead time) L 과 접선의 y 절편 a 를 측정하고 이를 통하여 <표 1>의 관계를 통하여 PID 제어기의 파라미터를 계산한다.

표 1 Z-N의 계단 응답 방법에 대한 PID 제어기 동조 규칙
Table 1 PID Controller Tuning Rule for the Step Response Method of Z-N

제어기	K_p	K_i	K_d
P	$1/a$	-	-
PI	$0.9/a$	$3L$	-
PID	$1.2/a$	$2L$	$L/2$

주파수 응답 방법은 플랜트에 비례제어 동작만을 이용하여 비례 제어기를 0에서 출력이 처음으로 진동을 유지하는 임계값 K_u 까지 증가 시킨다. 이 때 나타나는 진동의 주기를 한계주기(Ultimate Period) T_u 라 하며, PID 제어기의 파라미터 값은 K_u 와 T_u 를 이용한 표 2의 관계식으로부터 계산한다.

표 2 Z-N의 주파수 응답 방법에 대한 PID 제어기 동조 규칙
Table 2 PID Controller Tuning Rule for the Frequency Response Method of Z-N

제어기	K_p	K_i	K_d
P	$0.5K_u$	-	-
PI	$0.4K_u$	$0.8T_u$	-
PID	$0.6K_u$	$0.5T_u$	$0.125T_u$

Z-N 동조 방법은 산업 현장에서 널리 사용되어 왔으며 특히, 플랜트의 동특성을 정확히 알 수 없는 공정제어 시스템에서 널리 사용되는 PID 제어 동조 방법이다.

2.2 Grassi의 H^∞ 를 이용한 PID제어기 설계

PID 제어 방법에 H^∞ 와 같은 최적제어 기법을 도입하는 연구는 Ho와 Datta[14], Grimble[15], Maffezzoni와 Rocco[16], Panagopoulos[17]등 최근에 있어서 많이 시도되고 있는 분야이다. 특히, Grassi[8][9]는 H^∞ 노음이 불록형 최적화(convex optimization) 기법을 사용하는 PID 동조 방법에 대하여 연구하였다. PID 제어기의 최적 제어 입력 $u(s)$ 를 정의 하면 식 1과 같다.

$$u(s) = \left(K_p + K_i \frac{1}{s} + K_d \frac{s}{\tau s + 1} \right) e(s) \quad (1)$$

여기서, $e(s)$ 는 오차 신호이며, τ 는 측정 오차에 대한 영향을 제한하기 위해 미분요소에 저주파 필터의 역할로 추가 하였다. 식 1에 의하여 PID 제어기는 식 2와 같이 표현 할 수 있다.

$$G_c(s) = \frac{K_1 s^2 + K_2 s + K_3}{s(\tau s + 1)} \quad (2)$$

K_1 과 K_2 , 그리고 K_3 와 PID 제어기의 설계 파라미터와의 관계는 식 3과 같다.

$$K_p = K_2 - K_3 \tau, K_i = K_3, K_d = K_1 - K_2 \tau + K_3 \tau^3 \quad (3)$$

H^∞ 방법을 사용하여 PID 제어기를 설계하는 방법은 플랜트 $P(s)$ 에 PID 제어기 $G_c(s)$ 를 추가하여 만드는 개루프 전달함수가 목표로 하는 개루프 전달함수(target loop transfer function)에 H^∞ 노음의 측면에서 최대한 가깝게 만드는 것이다. 목표 시스템을 $L(s)$, $W_1(s)$ 를 고정된 가중치 함수(Weight Function)이라 할 때, PID 제어기 설계는 식 4의 최적화 문제로 나타낼 수 있다.

$$\min_{K_1, K_2, K_3} \| W_1(PG_c - L) \|_\infty \quad (4)$$

여기서 $\| \cdot \|_\infty$ 는 H^∞ 노음을 의미하고 $\| F \|_\infty = \sup F(j\omega)$ 로 정의한다. “Small Gain 정리[14]에 의하여 페루프 시스템 안정도와 강인성을 보장하기 위한 식 5의 충분조건을 얻을 수 있다.

$$\left\| \frac{1}{1+L}(PG_c - L) \right\|_\infty < 1 \quad (5)$$

식 5로부터 선택될 가중함수 $W_1(s)$ 에 대한 식 6의 조건을 찾을 수 있다.

$$\left| \frac{1}{1+L(j\omega)} \right| \leq \| W_1(j\omega) \|, \forall \omega \quad (6)$$

$$\| W_1(PG_c - L) \|_\infty < 1 \quad (7)$$

식 6을 만족하는 가중함수 $W_1(s)$ 를 선택하여 식 4의 최적해가 식 7을 만족한다면 항상 식 4를 만족시킬 수 있으므로 이러한 방법으로 설계된 PID 제어기는 플랜트를 항상 안정하도록 만들 수 있다.

Grassi는 이를 위하여 목표 시스템을 $L(s) = \lambda/s$, 그리고 가중 함수 $W_1(s)$ 를 $s/(s + \lambda_1)$, $\lambda_1 = 0.1\lambda$ 으로 선택하도록 제안하였다.

3. Simulation

본 논문에서는 시뮬레이션을 통한 사례연구를 위하여 Matlab를 사용하였다[10-12].

설계 사례에서 2차 시스템을 선정한 이유는 Z-N의 방법은 플랜트의 동특성을 알 수 없어도 시행착오 방법에 의하여 PID제어기를 설계할 수 있고 또한 고차 시스템에서도 적용이 가능하나 Grassi의 방법의 경우에는 플랜트의 차수가 고차화가 될수록 설계 사양에 따라서 목표시스템이 달라지기 때문에 가중함수의 선택이 어려워지는 단점이 있다. 따라서 본 논문에서는 선형시불변 시스템인 2차 시스템의 전달함수로 시뮬레이션을 하였다. 그리고 플랜트가 1차 시스템인 경우에는 오차가 많이 발생하여 본 논문에서 적용하지 않았다.

3.1 설계 사례 1

첫 번째로 두 개의 극점이 실수인 시간지연이 있는 2차 시스템에 대한 시뮬레이션 상의 비교이다. 시간지연이 있는 2차 시스템을 다음과 같이 선정하였다.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} e^{-s}$$

이에 대한 설계 사양으로 명령 추종 및 외란 제거

를 위한 장벽 $B_r(\omega)$ 과 센서 잡음 및 모델링 오차의 저감도 성능에 대한 장벽 $B_n(\omega)$ 을 <표 3>과 같이 정의 한다.

표 3 설계 사례 1의 주파수역 설계 사양
Table 3 Frequency Domain Design Specifications in Design Example 1

장벽	장벽	경계주파수
$B_r(\omega)$	$m_r = 30dB$	$\omega \leq 0.01$
	0	$\omega > 0.01$
$B_n(\omega)$	0	$\omega \leq 10$
	$e_{\max}^{-1}(\omega) = 10/\omega$	$\omega > 10$

표 4 계단 응답의 정량적 비교
Table 4 Comparison with the Step Response

	Overshoot	Setting Time	Rising Time
Z-N	1.05	5.99	1.72
Grassi	1.17	4.94	1.42

2장에서 제시한 두 가지의 제어기 설계방법을 이용하여 구한 PID 제어기 설계 파라미터 값을 구하면 <표 4>와 같다. <그림 2>는 본 논문에서 Z-N 방법과 Grassi의 방법으로 구한 페루프 전달함수의 형상을 비교하였다. 그리고 두 가지 방법의 계단 응답에 대한 정량적 비교는 <그림 3>과 <표 4>와 같다. 설계 사례 1에서 계단 응답에 있어서 Z-N방법과 Grassi방법을 비교하였을 때 오버슈트를 제외하고는 Grassi의 방법의 성능이 우수함을 알 수 있다.

표 4 설계 사례 1의 PID 제어기 설계 파라미터 비교
Table 4 Comparison of PID Controller Design Parameters in Design Example 1

	K_p	K_i	K_d
Z-N	2.1710	1.3451	0.2814
Grassi	3.3710	0.1121	0.03492

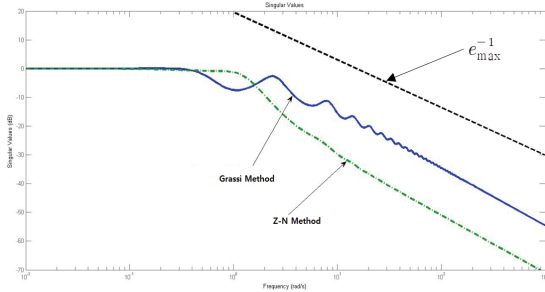


그림 2 폐루프 전달함수의 형상
Figure 2 The Shape of the Closed Loop Transfer Function

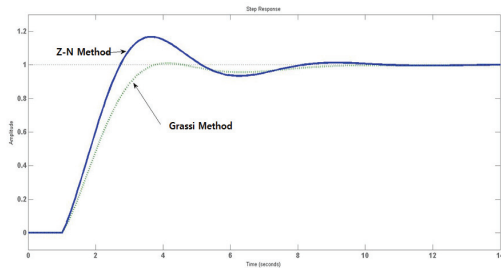


그림 3 폐루프 전달함수에 대한 계단 응답
Figure 3 The Step Response of the Closed Loop Transfer Function

3.2 설계 사례 2

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 3} e^{-2s}$$

두 개의 극점이 공액 복소근인 시간지연이 있는 2차 시스템에 대한 시뮬레이션 상의 비교이고 위와 같이 시간지연이 있는 2차 시스템을 선정하였다. 이에 대한 설계 사양으로 명령 추종 및 외란 제거를 위한 장벽 $B_r(\omega)$ 과 센서 잡음 및 모델링 오차의 저감도 성능에 대한 장벽 $B_n(\omega)$ 을 <표 5>와 같이 정의 한다.

표 5 설계 사례 2의 주파수역 설계 사양
Table 5 Frequency Domain Design Specifications in Design Example 2

장벽	장벽	경계주파수
$B_r(\omega)$	$m_r = 30dB$	$\omega \leq 0.01$
	0	$\omega > 0.01$
$B_n(\omega)$	0	$\omega \leq 1$
	$e_{max}^{-1}(\omega) = 10/\omega$	$\omega > 1$

표 6 설계 사례 2의 PID 제어기 설계 파라미터 비교
Table 6 Comparison of PID Controller Design Parameters in Design Example 2

	K_p	K_i	K_d
Z-N	0.9470	0.9783	0.8184
Grassi	0.6420	0.6933	0.6020

<그림 4>에서 보이는 것처럼 Z-N의 방법과 Grassi 방법은 둘 다 모델링 오차의 장벽인 $e_{max}^{-1}(j\omega)$ 를 침범하지 않지만 Grassi 방법이 이득에 대한 여유가 좋은 결과를 알 수 있다. 본 논문에서 비교하는 두 가지 방법의 계단 응답에 대한 정량적 비교는 <그림 5>와 <표 7>과 같다. 계단 응답에 있어서 오버 슈트, 정착 시간 및 상승 시간에서 Grassi 방법이 약간 우수하다.

표 7 계단 응답의 정량적 비교
Table 7 Comparison with the Step Response 2

	Overshoot	Setting Time	Rising Time
Z-N	1.059	10.96	2.980
Grassi	1.069	12.01	3.421

4. 결론

본 논문에서는 시간지연이 있는 시스템에서 안정성과 강인성, PID 제어의 단순성과 유연성, 보장하기 위한 제어기 설계 방법으로 Z-N방법과 Grassi 방법을 비교 연구하였다. 설계 사례 1과 2위 계단 응답에서 오버슈트를 제외한 정착시간과 상승시간

에서 Grassi의 방법이 빠른 응답을 볼 수 있었고 주파수 영역에서도 마찬가지로 특이값이 Z-N방법보다 우수하나 Grassi가 제안한 방법은 설계 사양에 따라서 목표 시스템이 달라질 수 있다는 단점이 있으며 이로 인해 가중함수의 선택이 어려워지는 단점이 있고 Z-N의 방법은 시행착오방법으로 인한 반복적인 수행이 필요하나 수학적 방법이 필요 없고 또한 플랜트의 동특성을 정확히 알 수 없는 공정 제어 시스템에서 널리 사용하고 있다. 따라서 본 논문에서 비교한 두 가지의 방법 중 Z-N의 방법은 Grassi가 제안한 방법보다 우수성은 떨어지지만 제어기 설계 시 더 용이하다는 것을 알 수 있다.

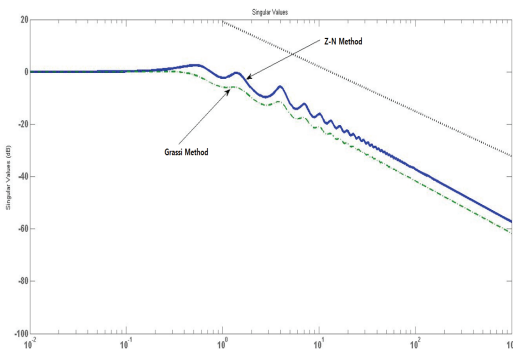


그림 4 폐루프 전달함수의 형상

Figure 4 The Shape of the Closed Loop Transfer Function

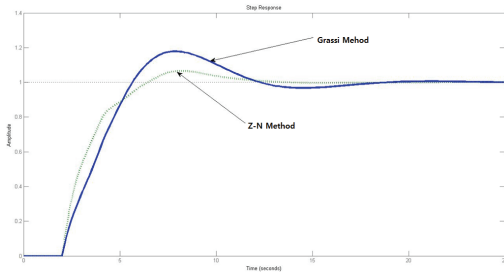


그림 5 폐루프 전달함수에 대한 계단 응답

Figure 5 The Step Response of the Closed Loop Transfer Function

References

- [1] R. E. Kalman, *A new approach to linear filtering and prediction problems*, Trans. of the ASME, Journal of Basic Eng., Vol. 82, pp. 35-45, 1960.
- [2] R. E. Kalman, *Contributions to the theory of optimal control*, Bol. Soc. Mat. Mex., Vol. 5, pp. 102-119, 1960.
- [3] G. Stein and J. Doyle, *Robustness with observers*, IEEE Trans. on Auto. Control, AC-24, pp. 607-611, 1979.
- [4] J. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis, *State space solutions to standard H^2 and H^∞ control problems*, IEEE Trans. Auto. Control, AC-34, pp. 831-847, 1989.
- [5] K. J. Astrom and K. J. Hagglund, *PID controllers: Theory, design, and tuning*, 2nd ed. Research Triangle Park, NC:ISA, 1995.
- [6] J. G. Ziegler, and N. B. Nichols, *Optimum settings for automatic controllers*, Trans. ASME, 64, pp. 759-768, 1942.
- [7] K. J. Astrom, and T. Hagglund, *Automatic tuning of PID controllers*, Instrument Society of America, Research Triangle Park, North Carolina, 1988.
- [8] E. Grassi, K. S. Tsakalis, S. Dash, S. V. Gaikwad, W. MacArthur, and G. tein, *Integrated system identification and PID controller tuning by frequency loop-shaping*, IEEE Trans. Contr. Syst. Technol., Vol. 9, No. 2, pp. 285-294, 2001.
- [9] E. Grassi, and K. S. Tsakalis, *PID controller tuning by frequency loop-shaping*, Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision & Control, pp. 4776-4781, 1996.
- [10] G. J. Balas, J. C. Doyle, K. Glover, A. Packard, and R. Smith, *User's guide to the analysis and synthesis toolbox for MATLAB*, The Mathworks Inc., 1991.
- [11] F. M. Callier, and C. A. Desoer, *Linear system theory*, Springer-Verlag New York, Inc., 1991
- [12] H. Saadat, *Computational aids in control systems using MATLAB*, McGraw-Hill, 1993.

- [13] B. Shahian, and M. Hassul, *Control system design using MATLAB*, Englewood Cliffs, NJ. Prentice-Hall, 1993.
- [14] M. T. Ho, A. Datta, and S. P. Bhattacharya, *Control system design using low order controllers : Constant gain, PI and PID*, Proc. of the American Control Conference, pp. 571-578, 1997.
- [15] M. J. Grimble, *H^∞ controllers with a PID structure*, J. of Dynamic Syst. Meas. And contr., 112, pp. 325-336, 1990.
- [16] C. Mattezzoni, and P. Rocco, *Robust tuning of PID regulators based on step-response identification*, European J. of Contr, 3, pp. 125-136, 1997.
- [17] H. Panagopoulos, and K. J. Astrom, *PID control design and loop shaping*, Proceedings of the 1999 IEEE International Conference an Control Applications, pp. 103-108, 1999.

시간지연이 있는 시스템을 위한 제어기 설계에 관한 연구

정형근¹, 임동균¹

¹한양사이버대학교 기계자동차공학부

요 약

본 논문은 시간지연이 있는 시스템에서 설계사양을 만족시키면서 동시에 강인성(Robustness)과 안정성(Stability)을 갖는 강인한 PID 제어기 설계 방법에 대한 비교 연구이다. 본 논문에서 비교하는 설계 방법은 Ziegler와 Nichols의 PID제어기 동조 방법과 Grassi의 H^∞ 를 이용한 PID제어기 설계 방법이다. Ziegler와 Nichols의 PID제어기 동조 방법은 계단응답방법과 주파수 응답방법 그리고 변형된 방법이 있다. Ziegler와 Nichols의 PID제어기 동조 방법은 산업현장에서 널리 쓰이고 있고 또한 수학적으로도 설계가 용이하고 플랜트의 동특성을 정확히 알 수 없는 시스템에서 널리 사용되는 PID 제어 동조 방법이다. Grassi의 H^∞ 를 이용한 PID제어기 설계 방법은 안정도와 강인성이 보장되는 H^∞ 노름이 볼록형 최적화(convex optimization) 기법을 사용하는 PID 동조 방법이다. 본 논문에서는 Ziegler와 Nichols의

방법과 Grassi가 제안한 방법 두 가지를 비교하여 PID제어기가 보장하는 안정성과 강인성을 보장하도록 하는 제어기 동조에 대한 방법을 제안한다. 그리고 시뮬레이션을 통하여 두 가지 방법에 대한 성능 비교를 하였고 주파수영역의 설계사양을 고려하기 위해서 명령추종 및 외란제거 성능에 만족하는 저주파 영역과, 센서잡음에 대한 저감도 성능에 해당하는 고주파영역으로 설계조건을 선정하여 시뮬레이션하여 비교하였다.



Hong-Kun Joung received the bachelor's degree in the Department of Electrical Engineering from the Semyung University in 2002.

He received the M.S. degree and the Ph.D. degree in the Department of Electrical Engineering from Hanyang University in 2004 and 2017, respectively. From 2011 to 2017, he was a Assistant professor at Korea Polytechnic College. He has been a Adjunct professor in the Department of Mechanical & Automotive Engineering at Hanyang Cyber University since 2017. His current research interests include Control System, Motor Control System, Power Electronics. He is a Regular member of the KKITS.

E-mail address: : 21c8545@hanyang.ac.kr



Dong-Kyun Lim received the bachelor's degree and M.S. degree and the Ph.D. degree in the Department of Electronics and Communication Engineering from Hanyang University in 1985, 1987

and 2001, respectively. He has been a professor in the Mechanical & Automotive Engineering at Hanyang Cyber University since 2003. His current research interests include Control System, Motor Control System, Power Electronics. He is a life member of the KKITS.

E-mail address: : eiger07@hycu.ac.kr