Journal of Knowledge Information Technology and Systems(JKITS), Vol. 14, No. 2, pp. 137-144, April 2019
https://doi.org/10.34163/jkits.2019.14.2.004

Journal of Knowledge Information Technology and Systems
ISSN 1975-7700
http://www.kkits.or.kr

A Study on the Generalized Tangent Polynomials Using the Characteristics of Numbers

Ho Yong Jung, Won Yang Park, Sang Young Jei*

Department of Economics & Statistics, Korea University

ABSTRACT

Recently, Korean mathematicians and foreign mathematicians have been studying the number of Bernoulli and the polynomial of Bernoulli, the number of Euler and the polynomial of Euler, the number of Genocchi and the polynomial of Genocchi, and the number of tangent and the polynomial of tangent. In specially, main studies are the generalized Bernoulli numbers and polynomials, the generalized of Euler numbers and polynomials, the generalized of Genocchi numbers and polynomials, and the generalized of tangent numbers and polynomials. In this study, we study generalized tangent numbers and polynomials in line with recent research trends. Firstly, the relationship between Bernoulli numbers and polynomials, Euler numbers and polynomials, Genocchi numbers and polynomials, and Stirling numbers of the first kind and Stirling numbers of the second kind are studied using the generating function. Next, tangent numbers and polynomials are derived through the generating function corresponding to the real parameters and complex parameters. In conclusion, we investigate properties of the generalized tangent numbers and polynomials as some identities including the generalized tangent numbers and polynomials. In further research, we will conduct a study on the calculation of the symmetric properties and roots of tangent polynomials using the newly proven generalized tangent numbers and polynomials.

KEYWORDS: Bernoulli numbers & polynomials, Euler numbers & polynomials, Genocchi numbers & polynomials, Tangent numbers & polynomials, Complex parameter, Stirling numbers of the first kind, Stirling numbers of the second kind

ARTICLE INFO: Received 28 January 2019, Revised 3 March 2019, Accepted 12 April 2019.

*Corresponding author is with the Department of Economics & Statistics, Korea University, 2511 Sejong-ro Sejong, 30019, KOREA.
E-mail address: syjei@korea.ac.kr

1. 서 론

최근에 많은 수학자들은 베르누이 수와 다항식, 오일러 수와 다항식, 제노찌 수와 다항식, 탄젠트 수와 다항식을 연구했으며, 연구 과정에서 수와 다항식에 관하여 일반화 하고 있다.[1]

베르누이 다항식에는 중요한 특성과 근사식이 있으며, 근사식은 정수론과 수치해석에 모두 유용하게 쓰일 수 있다.[2]

1690년도에 Jacob Bernoulli는 베르누이 수 $B_n(n \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\cdots\})$와 관련된 합 $S_n(m)$을 병행하여 베르누이 다항식 $B_n(x)$을 처음으로 소개했으며, (1)식과 같다.[3]

$$\begin{aligned} S_m(n) &= \sum_{k=0}^{n-1} k^m \\ &= \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} n^{m+1-k} B_k. \end{aligned} \tag{1}$$

1738년도에 Euler는 베르누이 다항식을 연구하기 위해, 실용적인 의미의 급수 전개에 기초하여 (2)식의 생성함수를 사용했다.[4]

$$F(x,t) = \begin{cases} \dfrac{t}{e^t - 1} e^{xt} & \text{if } t \neq 0, \\ 1 & \text{if } t = 0. \end{cases} \tag{2}$$

$F(x,t)$은 $\{|t| < 2\pi\}$ 범위에서 분석이 가능하다. 따라서 $F(x,t)$은 원점으로 수렴하는 수렴멱급수 t에 의해서 확장이 가능하며, (3)식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{t}{e^t - 1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}. \tag{3}$$

(1)식부터 (3)식까지 B_n으로 정리하면 (4)식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k} \right) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} x^k \right) \frac{t^n}{n!}. \end{aligned} \tag{4}$$

결과적으로, 베르누이 다항식은 차수가 n이고 최고차항 계수가 1인 다항식이다.[5]

본 연구의 구성은 다음과 같다. 2장에서 베르누이 수와 다항식, 오일러 수와 다항식, 제노찌 수와 다항식과 Stirling number의 관계에 대해 소개한다. 3장에서 탄젠트 수와 다항식의 성질에 대해 정의하고, 4장에서는 일반화된 탄젠트 수와 다항식의 성질을 증명한다. 5장에서 본 연구의 결론과 추후 연구에 대해 제시하고 마무리 짓는다.

2. 베르누이, 오일러, 제노찌 수 및 다항식과 Stirling number의 관계

베르누이 수 B_n, 오일러 수 E_n, 제노찌 수 G_n는 (5)식의 생성함수로 정의된다.[6]

$$\begin{aligned} \frac{t}{e^t - 1} &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} \quad (|t| < 2\pi), \\ \frac{2}{e^t + 1} &= \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^n}{n!} \quad (|t| < \pi), \\ \frac{2t}{e^t + 1} &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{t^n}{n!} \quad (|t| < \pi). \end{aligned} \tag{5}$$

$\mathbb{N}$이 양수인 정수의 집합이라고 가정할 때, (5)식의 각 생성함수들을 통해 (6)식을 도출할 수 있다.

$$G_{2n+1} = B_{2n+1} = 0 \ \ (n \in \mathbb{N}),$$
$$G_n = 2(1-2^n)B_n. \tag{6}$$

또한, 제노찌 수 G_n은 (7)식에 의해 점화관계를 확인 할 수 있다.[7]

$$\begin{aligned} &G=0, \ \ G=1, \\ &G_n = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}G_k \quad (n \ge 2), \\ &G_{2n+1} = 0(n \ge 1) \\ &G_2 = -1, G_4 = 1, G_6 = -3, G_8 = 17, \\ &G_{10} = -155, G_{12} = 2073, \cdots . \end{aligned} \tag{7}$$

다음으로 제1종 스털링 수와 제2종 스털링 수를 정의한다. 제1종 스털링 수 $s(n,k)$은 (8)식과 (9)식의 조건에 의해 (10)식으로 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} (x)_n &= x(x-1)\cdots(x-n+1) \\ &= \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k, \end{aligned} \tag{8}$$

$$(\log(1+x))^k = k!\sum_{n=k}^{\infty} s(n,k)\frac{x^n}{n!}. \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &s(n,0) = 0(n>0), \ s(n,n) = 1(n \ge 0), \\ &s(n,1) = (-1)^{n-1}(n-1)!(n>0), \\ &s(n,k) = 0(k>n, k<0), \\ &s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k). \end{aligned} \tag{10}$$

제2종 스털링 수 $S(n,k)$은 (11)식과 (12)식의 조건에 의해 (13)식으로 정의할 수 있다.[8]

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\frac{x^n}{n!}, \tag{11}$$

$$(e^x-1)^k = k!\sum_{n=k}^{\infty} S(n,k)\frac{x^n}{n!}. \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &S(n,0) = 0(n>0), \ \ S(n,n) = 1(n \ge 0), \\ &S(n,1) = 1(n>0), \\ &S(n,k) = 0(k>n, k<0), \\ &S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k). \end{aligned} \tag{13}$$

탄젠트 수 T_n와 탄젠트 다항식 $T_n(x)$은 (14)식과 (15)식으로 나타낼 수 있다.[9]

$$\frac{2}{e^{2t}+1} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n \frac{t^n}{n!}, \tag{14}$$

$$\left(\frac{2}{e^{2t}+1}\right)e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} T_{n,q}(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{15}$$

실수 매개변수 또는 복소수 매개변수를 α라고 할 때, 베르누이 다항식 $B_n^{(\alpha)}(x)$, 오일러 다항식 $E_n^{(\alpha)}(x)$, 제노찌 다항식 $G_n^{(\alpha)}(x)$은 (16)식의 생성함수로 정의된다.[10]

$$\begin{aligned} &\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} \\ &\qquad\qquad (|t| < 2\pi), \\ &\left(\frac{2}{e^t+1}\right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} \\ &\qquad\qquad (|t| < \pi), \\ &\left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} \\ &\qquad\qquad (|t| < \pi). \end{aligned} \tag{16}$$

3. 탄젠트 수와 다항식

고차 탄젠트 다항식 $T_n^{(k)}(x)$과 고차 탄젠트 수 $T_n^{(k)}$의 생성함수는 (17)식과 (18)식이다.[11]

$$\left(\frac{2}{e^{2t}+1}\right)^k e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(k)}(x)\frac{t^n}{n!}, \tag{17}$$

$$\left(\frac{2}{e^{2t}+1}\right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(k)}\frac{t^n}{n!},\ |t|< \frac{\pi}{2}. \tag{18}$$

(17)식과 (18)식의 k값이 1일 때, 탄젠트 다항식 $T_n(x)$과 탄젠트 수 T_n로 정의할 수 있다.

4. 일반화된 탄젠트 수와 다항식의 성질 증명

4장에서는 일반화된 탄젠트 다항식의 확장 조건에 대한 관계를 연구하고, $T_n(x)$와 $\widetilde{T}_n^{(\alpha)}(x)$사이의 성질에 대하여 정리한다.

4.1 일반화된 탄젠트 수

복소수 α에 관한 일반화된 탄젠트 다항식을 만들기 위해서는 앞에서 정의했던 x가 실수인 탄젠트 방정식 $\widetilde{T}_n(x)$을 이용해야 한다.

$n\in \mathbb{N}\cup\{0\}$이고 x가 임의의 실수일 때, (19)식과 같이 정의할 수 있다.[12]

$$\left(\frac{2}{e^{et}+1}\right)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{T}_n(x)\frac{t^n}{n!},\ \left(|t|< \frac{\pi}{2}\right). \tag{19}$$

(19)식의 정의와 (8)식, (12)식을 이용하여 (20)식으로 전개할 수 있다. 결과적으로 $\widetilde{T}_n(x)$로 정리하면 (21)식과 같다.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{T}_n(x)\frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{2}{e^{2t}+1}\right)^x \\
&= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}(e^{2t}-1)}\right)^x \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{2^j}\binom{x+j-1}{j}(e^{2t}-1)^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{2^j}\binom{x+j-1}{j}j!\sum_{n=j}^{\infty}2^n S(n,j)\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j 2^{n-j} j!\binom{x+j-1}{j}S(n,j)\frac{t^n}{n!},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}_n(x) &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j 2^{n-j} j!\binom{x+j-1}{j}S(n,j) \\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j 2^{n-j} S(n,j)(x+j-1)\cdots(x+1)x \\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j 2^{n-j} S(n,j)\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}s(j,k)x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{j=k}^{n}2^{n-j}S(n,j)s(j,k)x^k.
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\widetilde{T}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} w(n,k)x^k,$$

$$w(n,k) = (-1)^k\sum_{j=k}^{n}2^{n-j}S(n,j)s(j,k). \tag{21}$$

일반화된 탄젠트 다항식의 생성함수를 실수에서 복소수로 확장할 수 있다. 일반화된 탄젠트 다항식 $\widetilde{T}_n^{(\alpha)}(x)$의 복소수 매개변수 α는 x와 α를 해로 갖고 차수가 n인 생성함수에 의해 정의된다.[13]

4.2 일반화된 탄젠트 다항식

복소수 매개변수 α를 (22)식으로 정의할 수 있으며, $n \geq k(n,k,l \in \mathbb{N})$일 때, (23)식으로 나타낼 수 있다.

$$\left(\frac{2}{e^{et}+1}\right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{T}_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!}, \ \left(|t| < \frac{\pi}{2}\right). \tag{22}$$

$$\widetilde{T}_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{l=0}^{n} \rho^{(\alpha)}(n,l)x^l,$$
$$\rho^{(\alpha)}(n,l) = \binom{n}{l}\sum_{k=0}^{n-l} w(n-l,k)\alpha^k. \tag{23}$$

또한, (22)식의 정의와 (21)식을 통해 (24)식의 결과를 얻을 수 있다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{T}_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2}{e^{2t}+1}\right)^{\alpha} e^{xt}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} w(n,k)\alpha^k \frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty} x^k \frac{t^n}{n!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\sum_{k=0}^{n-l} w(n-l,k)\alpha^k x^l \frac{t^n}{n!}. \tag{24}$$

(24)식에서 $\binom{n}{l}\sum_{k=0}^{n-l} w(n-l,k)\alpha^k = \rho^{(\alpha)}(n,l)$로 대체하면 (25)식으로 정리할 수 있다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{T}_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n} \rho^{(\alpha)}(n,l)x^l \frac{t^n}{x!}. \tag{25}$$

(25)식으로부터 $\rho^{(\alpha)}(n,l)$의 값을 찾는다면 (26)식과 같다.

$$\rho^{(\alpha)}(0,0) = 1,$$
$$\rho^{(\alpha)}(1,0) = -\alpha,$$
$$\rho^{(\alpha)}(1,1) = 1,$$
$$\rho^{(\alpha)}(2,0) = -\alpha^2 - \alpha,$$
$$\rho^{(\alpha)}(2,1) = -2\alpha,$$
$$\rho^{(\alpha)}(2,2) = 1,$$
$$\cdots. \tag{26}$$

(25)식의 정리에서 $n = 1,2,3,\cdots$이라 할 때, (27)식의 다항식을 찾을 수 있다.

$$\widetilde{T}_1^{(\alpha)}(x) = x - \alpha,$$
$$\widetilde{T}_2^{(\alpha)}(x) = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \alpha,$$
$$\widetilde{T}_3^{(\alpha)}(x) = x^3 - 3\alpha x^2 + 3\alpha^2 x - 3\alpha x - \alpha^3 + 3\alpha^2,$$
$$\cdots. \tag{27}$$

$\widetilde{T}_n^{(\alpha)}(x)$은 α를 포함하는 x해를 갖는 최고차항 계수가 1인 다항식이다.[14]

일반화된 탄젠트 다항식과 제1종 스털링 수, 제2종 스털링 수사이의 관계를 찾기 위해, 제1종 스털링 수, 제2종 스털링 수와 관련된 $w(n,k)$를 사용했다.[15]

$l,k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$일 때, (28)식과 같이 정리할 수 있다. (28)식의 정리를 탄젠트 다항식으로 다시 증명하면 (29)식과 같다.

본 연구는 (29)식에서 비교 계수 $\frac{t^n}{n!}$에 의한 정리를 끝으로 마무리한다.

$$\widetilde{T}_n^{(\alpha)}(2\alpha-x)=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\sum_{k=0}^{n-l}w(n-l,k)\times\alpha^k(-1)^l(x-2\alpha)^l. \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{T}_n^{(\alpha)}(2\alpha-x)\frac{t^n}{n!}&=\left(\frac{2}{e^{2t}+1}\right)^{\alpha}e^{(2\alpha-x)t}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{T}_n^{(\alpha)}\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-2\alpha)^n\frac{t^n}{n!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\sum_{k=0}^{n-l}w(n-l,k)\\&\quad\times\alpha^k(-1)^l(x-2\alpha)^l\frac{t^n}{n!}.\end{aligned} \tag{29}$$

5. 결 론

본 연구에서는 최근 국내외 수학 연구 흐름에 맞춰 일반화된 탄젠트 수와 다항식을 연구했다.

베르누이 수와 다항식, 오일러 수와 다항식, 제노찌 수와 다항식과 제1종, 제2종 스털링 수의 관계를 통해 탄젠트 수와 다항식을 전개했다.

결과적으로, 제1종, 제2종 스털링 수와 고차 탄젠트 수 $T_n^{(k)}$, 고차 탄젠트 다항식 $T_n^{(k)}(x)$을 확장하여 새롭게 일반화된 탄젠트 수 $T_n(x)$와 다항식 $\widetilde{T}_n^{(\alpha)}(x)$을 증명 했다.

향후 본 연구에서 보이지 못한 일반화된 탄젠트 수 및 다항식의 Symmetric 성질에 대한 연구, 일반화된 탄젠트 다항식의 근을 계산하여 나타내는 연구로 이어갈 것이다.

References

[1] L. Carlitz, *q-Bernoulli numbers and polynomials*, Duke Mathematical Journal, Vol. 15, No. 12, pp. 987-1000, 1948.

[2] J. Bernoulli, *Ars conjectandi, opus posthumum. Accedit Tractatus de seriebus infinitis, et epistola gallice scripta de ludo pilae reticularis*, impensis Thurnisiorum, fratrum, 1713.

[3] P. G. Todorov, *On the theory of the Bernoulli polynomials and numbers*, Int. Journal of Math. Analysis, Journal of mathematical analysis and applications, Vol. 104, No. 2, pp. 309-350, 1984

[4] C. S. Ryoo, T. Kim, and L. C. Jang, *Some relationships between the analogs of Euler numbers and polynomials*, Journal of Inequalities and Applications, Article ID 086052, p. 22, 2007.

[5] L. Carlitz, *Expansions of q-Bernoulli numbers*, Duke Mathematical Journal, Vol. 25, pp. 355-364, 1958.

[6] T. Kim, J. Choi, and Y. H. Kim, *q-Bernstein polynomials associated with q-Stirling numbers and Carlitz's q-Bernoulli numbers*, Abstract and Applied Analysis, Article ID 150975, p. 11, 2010.

[7] I. N. Cangul, V. Kurt, H. Ozden, and Y. Simsek, *On the higher-order-w−q-Genocchi numbers*, Advanced Studies in Contemporary Mathematics, Vol. 19, No. 1, pp. 39-57, 2009.

[8] Y. H. Kim, H. Y. Jung, and C. S. Ryoo, *On the generalized Euler polynomials of the second kind*, Journal of applied mathematics & informatics, Vol. 31, No. 5_6, pp. 623-630, 2013.

[9] C. S. Ryoo, *A note on the tangent numbers and polynomials*, Adv. Studies Theor. Phys. Vol. 7, No. 9, pp. 447-454, 2013

[10] H. Y. Lee, N. S. Jung, and C. S. Ryoo,

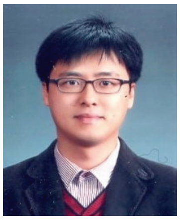
Some indentites of the Genocchi numbers and polynomials associated with bernstein polynomials, Journal of applied mathematics & informatics, Vol. 29, No. 5_6, pp. 1221-1228, 2011.
[11] C. S. Ryoo, *A note on the tangent numbers and polynomials*, Adv. Studies Theor. Phys. Vol. 7, No. 9, pp. 447-454, 2013.
[12] C. S. Ryoo, *On the analogues of tangent numbers and polynomials ssociated with p-Adic integral on* $\mathbb{Z}p$, Applied Mathematical ciences, Vol. 7, No. 64, pp. 3177-3183, 2013.
[13] C. S. Ryoo, H. Y. Lee, and N. S. Jung, *Some identites on the (h, q)-Euler numbers with weight* α *and q-Bernstein polynomials*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 5, No. 69, pp.3429-3437, 2011.
[14] T. Kim, J. Choi, Y. H. Kim, and C. S. Ryoo, *On the fermionic padic integral representation of Bernstein polynomials associated with Euler numbers and polynomials*, Journal of Inequalities and Applications, Article ID 864247, p. 12, 2010.
[15] Y. Simsek, *Generating functions of the twisted Bernoulli numbers and polynomials associated with their interpolation functions*, Advanced Studies in Contemporary Mathematics, Vol. 16, No. 2, pp. 251-278, 2008.

수의 특성들을 이용한 일반화된 탄젠트 다항식에 관한 연구

정호용[1], 박원양[2], 제상영[3]
[1]*고려대학교 경제통계학부 박사과정*
[2]*고려대학교 경제통계학부 석사과정*
[3]*고려대학교 경제통계학부 교수*

요 약

최근에 많은 수학자들은 베르누이 수와 다항식, 오일러 수와 다항식, 제노찌 수와 다항식, 탄젠트 수와 다항식을 연구하고 있다. 특히, 베르누이 수와 다항식, 오일러 수와 다항식, 제노찌 수와 다항식, 탄젠트 수와 다항식의 일반화에 대해 연구하고 있다. 본 연구에서는 최근 연구 흐름에 맞춰서 일반화된 탄젠트 수와 다항식에 대해 연구한다. 우선 생성함수를 이용하여 베르누이, 오일러, 제노찌 수 및 다항식과 제1종 스털링 수, 제2종 스털링 수와의 관계를 연구한다. 다음으로 실수 및 복소수 매개변수에 해당하는 생성함수를 통해 탄젠트 수와 다항식을 도출한다. 결론적으로 도출된 탄젠트 수와 다항식을 일반화하여 성질에 대해 정의 및 증명한다. 추후 연구에서는 새롭게 증명한 일반화된 탄젠트 수와 다항식을 이용하여 탄젠트 다항식의 시메트릭 성질과 근의 계산에 관한 연구를 진행할 것이다.



Ho Yong Jung received the M.S. degree and the Ph.D. degree in the Department of mathematics from Hannam University in 2009 and 2017, respectively. He has been a Ph.D. in the Department of Economics & Statistics at Korea University since 2017. His research interests focus on the scientic computing, functional analysis and Economics of Industry. He is a regular member of the KKITS.

E-mail address: tiger8049@korea.ac.kr

Won Yang Park received the bachelor's degree in the Department of Economics from the Korea University in 2018. He has been a M.S. in the Department of Economics & Statistics at Korea University

since 2018. His current research interests include Econometrics, Economics of Agriculture, Economics of Industry. He is a regular member of the KKITS.
E-mail address: parkwonyang@korea.ac.kr

Sang Young Jei received the bachelor’s degree in the Department of Economics from the Korea University in 1999. He received the M.S. in the Department of Economics from University of Illinois in 2002. He rceived the Ph.D. in the Department of Economics from University of Missouri in 2009. He has been a professor in the Department of Economics & Statistics at Korea University since 2009. His current research interests include Econometrics, Macroeconomics, EMD. He is a regular member of the KKITS.
E-mail address: syjei@korea.ac.kr