



Journal of Knowledge Information Technology and Systems

ISSN 1975-7700

<http://www.kkits.or.kr>

Symmetric Properties of the Generalized Tangent Polynomials and Computation of their Zeros

Ho Yong Jung, Won Yang Park, Sang Young Jei*

Department of Economics & Statistics, Korea University

A B S T R A C T

This study describes the symmetrical properties and root calculations of generalized tangent polynomials following the study of the generalized tangent polynomials using the characteristics of numbers. The generalized tangent polynomial has the relational characteristics of the number of Genocchi and the polynomial of Genocchi, and the number of Euler and the polynomial of Euler. In this study, the symmetrical properties of generalized tangent polynomials are demonstrated by dividing them into three parts. This study also uses the Mathematica software program to approach numerically. The results of symmetrical properties are identified by graphs and figures through the Mathematica software program. Next, the calculation of root for generalized tangent polynomials is taken, for example, when the generalized tangent polynomial index is 3. The calculation of root of generalized tangent polynomial is shown by tables and graphs through the Mathematica software program. In this study, the symmetrical properties and root calculations of generalized tangent polynomials were conducted through the Mathematica software program. As a result, two guesses were possible in this study. The first generalized tangent polynomial would be a function of reflective substitution analytical plurality, and the second generalized tangent polynomial would have real zeros. Looking forward to a numerical approach using the Mathematica software program in the field of generalized tangent polynomial research, this study concludes.

© 2019 KKITS All rights reserved

KEYWORDS : Generalized tangent numbers & polynomials, Euler numbers & polynomials, Genocchi numbers & polynomials, Symmetric, Numerical investigation on the zeros

ARTICLE INFO: Received 28 February 2019, Revised 8 April 2019, Accepted 12 April 2019.

*Corresponding author is with the Department of Economics & Statistics, Korea University, 2511 Sejong-ro

Sejong, 30019, KOREA.

E-mail address: syjei@korea.ac.kr

1. 서론

일반화된 탄젠트 다항식은 제노찌 수와 다항식, 오일러 수와 다항식과의 관계적인 특성을 갖고 있다.[1] $\alpha, x, y \in \mathbb{C}$ 이고 n 이 음이 아닌 정수 일 때, 탄젠트 다항식의 정리는 (1)식이다.

$$\tilde{T}_n^{(\alpha)}(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tilde{T}_{n-k}^{(\alpha)}(x)y^k. \quad (1)$$

(1)식과 탄젠트 다항식의 생성함수를 이용하여 (2)식으로 증명할 수 있다. 이어서 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 일 때, (3)식을 도출할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{T}_n^{(\alpha)}(x+y) \frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{2}{e^{2t} + 1} \right)^\alpha e^{(x+y)t} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{T}_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} y^n \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tilde{T}_{n-k}^{(\alpha)}(x) y^k \frac{t^n}{n!}. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\tilde{T}_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n \tilde{T}_n^{(\alpha)}(x-2\alpha). \quad (3)$$

다음으로 탄젠트 다항식과 제노찌 및 오일러 다항식의 관계는 치환법을 사용하여 나타낼 수 있다.

$n \geq k (n, k \in \mathbb{N})$, $G^*(n) = G_{n+1} \frac{2^n}{n+1}$ 일 때, 제노찌 다항식과 탄젠트 다항식의 관계에 대한 정리는 (4)식과 같다.[2]

$$\begin{aligned} \tilde{T}_n^{(\alpha)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (n-k)! \\ &\times \sum_{\substack{v_1+\dots+v_\alpha \\ =n-k}} \frac{G^*(v_1) \cdots G^*(v_\alpha)}{(v_1! \cdots v_\alpha!)} x^k. \end{aligned} \quad (4)$$

(4)식은 제노찌 다항식과 탄젠트 다항식의 관계에 대한 정리이며, 생성 함수의 성질을 이용하여 증명할 수 있다. (5)식에서 $G^*(k) = G_{k+1} \frac{2^k}{k+1}$ 이라 할 때, (6)식으로 나타낼 수 있고 α 차수로 확장 가능하다. 따라서 $v_i \geq 0$ 일 때, (7)식을 도출할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{2t}{e^t + 1} &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{t^n}{n!} \quad (|t| < \pi) \\ \frac{2}{e^t + 1} &= \sum_{n=0}^{\infty} G_{n+1} \frac{2^n}{n+1} \frac{t^n}{n!}. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{2}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} G^*(n) \frac{t^n}{n!}. \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{e^{2t} + 1} \right)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v_1+\dots+v_\alpha=n} G^*(v_1) \cdots G^*(v_\alpha) \\ &\times \frac{G^*(v_1) \cdots G^*(v_\alpha)}{(v_1! \cdots v_\alpha!)} t^n. \end{aligned} \quad (7)$$

(5)식부터 (7)식을 바탕으로 일반화된 탄젠트 다항식을 추론하면 (8)식과 같다.

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{e^{2t} + 1} \right)^\alpha e^{xt} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (n-k)! \\ &\times \sum_{\substack{v_1+\dots+v_\alpha \\ =n-k}} \frac{G^*(v_1) \cdots G^*(v_\alpha)}{(v_1! \cdots v_\alpha!)} x^k \frac{t^n}{n!}. \end{aligned} \quad (8)$$

$G^*(n) = G_{n+1} \frac{2^n}{n+1}$ 에 의해서 $G^*(n)$ 의 값을 구하면 다음과 같다.

$$G^*(0) = 2, G^*(1) = -1, G^*(2) = 0, \\ G^*(3) = \frac{1}{2}, G^*(4) = 0, G^*(5) = -1, \dots$$

$$\rho^{(\alpha)}(n, l) = \binom{n}{l} \sum_{k=0}^{n-1} w(n-1, k) \alpha^k \text{ 일 때, (9)식}$$

을 도출할 수 있고 (10)식으로 정리할 수 있다.[3]

$$\rho^{(\alpha)}(n, k) = \binom{n}{k} (n-k)! \\ \times \sum_{\substack{v_1+\dots+v_\alpha \\ = n-k}} \frac{G^*(v_1) \cdots G^*(v_\alpha)}{(v_1! \cdots v_\alpha!)}. \quad (9)$$

$$k! \rho^{(\alpha)}(n, k) = \tilde{T}_{n-k}^{(\alpha)} \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (10)$$

$$w(n, k) = (-1)^k \sum_{j=k}^n 2^{n-j} S(n, j) s(j, k) \text{ 일 때,}$$

(10)식의 정리는 (11)식부터 (14)식으로 증명할 수 있다. (11), (12)식으로 (13)식을 도출할 수 있다.

$$k! \rho^{(\alpha)}(n, k) = \frac{d^k}{dx^k} \tilde{T}_n^{(\alpha)}(x)|_{x=0}. \quad (11)$$

$$\left(\frac{2}{e^{2t}+1}\right)^\alpha t^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^k}{dx^k} \left(\tilde{T}_n^{(\alpha)}(x)|_{x=0}\right) \frac{t^n}{n!} \\ = k! \sum_{n=k}^{\infty} \rho^{(\alpha)}(n, k) \frac{t^n}{n!}. \quad (12)$$

$$\left(\frac{2}{e^{2t}+1}\right)^\alpha t^k = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{T}_n^{(\alpha)} \frac{t^n}{n!} t^k. \quad (13)$$

$n \geq k (n, k \in \mathbb{N}), v_i \geq 0, E^*(n) = E_n 2^n$ 일 때, 오일러 다항식과 탄젠트 다항식의 관계에 대한 정리는 (14)식과 같다.[4]

$$\tilde{T}_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (n-k)! \\ \times \sum_{\substack{v_1+\dots+v_\alpha \\ = n-k}} \frac{E^*(v_1) \cdots E^*(v_\alpha)}{(v_1! \cdots v_\alpha!)} x^k. \quad (14)$$

(14)식을 증명하기 위해, (4)식과 생성 함수를 이용하여 관계를 찾는다. ($|t| < \pi$) 일 때, 생성 함수의 특성은 (15)식과 같다.

$$\frac{2t}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{t^n}{n!} \\ = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} n E_{n-1} \frac{t^n}{n!}. \quad (15)$$

(15)식의 생성 함수의 특성과 (4)식을 이용하여 (16)식으로 정리할 수 있다.[5]

$$G^*(n) = G_{n+1} \frac{2^n}{n+1} = E_n 2^n = E^*(n). \quad (16)$$

$E_n 2^n = E^*(n)$ 에 의해서 $E^*(n)$ 의 값을 구하면 다음과 같다.

$$E^*(1) = -1, E^*(2) = 0, E^*(3) = 2, \\ E^*(4) = 0, E^*(5) = -16, \dots$$

결과적으로, $G^*(n) = E^*(n)$ 이라는 것을 확인할 수 있다. (16)식으로 일반화된 탄젠트 다항식 $\tilde{T}_n^{(\alpha)}(x)$ 과 오일러 다항식 $E_n^{(\alpha)}(x)$ 의 관계를 확인할 수 있다.[6] α 가 실수 혹은 복소수 매개변수 일 때, (17)식으로 정리할 수 있다. (17)식을 탄젠트 다항식의 생성 함수로 변형하면 (18)식과 같다.

$$\tilde{T}_n^{(\alpha)}(x) = 2^n E_n^{(\alpha)}\left(\frac{x}{2}\right). \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{T}_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{2}{e^{2t} + 1}\right)^\alpha e^{xt} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n E_n^{(\alpha)}\left(\frac{x}{2}\right) \frac{t^n}{n!}. \end{aligned} \quad (18)$$

(17), (18)식은 일반화된 탄젠트 다항식 $\tilde{T}_n^{(\alpha)}(x)$ 과 제노찌 다항식 $G_n^{(\alpha)}(x)$ 의 관계를 나타낸다. $n, \alpha \in \mathbb{N}$ 일 때, (19)식을 도출할 수 있다.

$$\frac{1}{2^n} \binom{\alpha+n}{\alpha} \tilde{T}_n^{(\alpha)}(x) = G_{\alpha+n}^{(\alpha)}(x). \quad (19)$$

(19)식을 일반화된 탄젠트 다항식 $\tilde{T}_n^{(\alpha)}(x)$ 의 생성 함수를 이용하여 (20)식으로 증명할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{T}_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{2}{e^{2t} + 1}\right)^\alpha e^{xt} \\ &= \frac{1}{(2t)^\alpha} \left(\frac{4t}{e^{2t} + 1}\right)^\alpha e^{xt} \\ &= \frac{1}{2^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n G_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^{n-\alpha}}{n!} \\ &= \frac{1}{2^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\alpha+n} G_n^{(\alpha)}(x)}{\binom{\alpha+n}{\alpha} \alpha!} \frac{t^n}{n!}. \end{aligned} \quad (20)$$

본 논문의 구성은 1장에서 다항식간 관계를 이용하여 2장에서 일반화된 탄젠트 다항식의 대칭성을 정의한다. 3장에서 일반화된 탄젠트 다항식의 근을 조사하고 4장에서 결론으로 마무리한다.

2. 일반화된 탄젠트 다항식의 대칭성

2장에서는 복소수를 사용한 일반화된 탄젠트 다항식의 새로운 대칭 결과를 연구한다. 대칭성을 연구하기 위해서는 일반화된 탄젠트 다항식의 정의가 필요하다. $\alpha \in \mathbb{C}$ 일 때, 일반화된 탄젠트 다항식 $\tilde{T}_n^{(\alpha)}(x)$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{T}_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2}{e^{2t} + 1}\right)^\alpha e^{tx}. \quad (21)$$

(21)식으로부터 w_1, w_2 가 홀수인 정수라고 할 때, (22)식으로 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^l \binom{l}{n} \sum_{i=0}^{w_2-1} \sum_{j=0}^{w_1-1} (-1)^{i+j} w_1^{l-n} w_2^n \\ &\times \tilde{T}_{l-n}^{(m)}\left(w_2x + 2j \frac{w_2}{w_1}\right) \tilde{T}_n^{(m)}\left(w_1y + 2i \frac{w_1}{w_2}\right) \\ &= \sum_{n=0}^l \binom{l}{n} \sum_{i=0}^{w_2-1} \sum_{j=0}^{w_1-1} (-1)^{i+j} w_2^{l-n} w_1^n \\ &\times \tilde{T}_{l-n}^{(m)}\left(w_1x + 2j \frac{w_1}{w_2}\right) \tilde{T}_n^{(m)}\left(w_2y + 2i \frac{w_2}{w_1}\right). \end{aligned} \quad (22)$$

$B(t)$ 를 다음과 같이 정의하면, (22)식의 정리를 증명할 수 있다.

$$\begin{aligned} B(t) &: \\ &= \frac{(-1)^{w_1+w_2} (e^{2w_1w_2t} + 1)^{2m} e^{w_1w_2t(x+y)}}{(e^{2w_1t} + 1)^{m+1} (e^{2w_2t} + 1)^{m+1}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B(t) &:= \left(\frac{2}{e^{2w_1t} + 1}\right)^m e^{w_1w_2tx} \\
 &\times \sum_{i=0}^{w_2-1} (-1)^i e^{2iw_1t} \left(\frac{2}{e^{2w_1t} + 1}\right)^m \\
 &\times e^{w_1w_2ty} \sum_{j=0}^{w_1-1} (-1)^j e^{2jw_2t} \\
 &= \sum_{j=0}^{w_1-1} (-1)^j \left(\frac{2}{e^{2w_1t} + 1}\right)^m e^{w_1t\left(w_2x + 2j\frac{w_2}{w_1}\right)} \\
 &\times \sum_{i=0}^{w_2-1} (-1)^i \left(\frac{2}{e^{2w_2t} + 1}\right)^m e^{w_2t\left(w_1x + 2i\frac{w_1}{w_2}\right)} \\
 &= \sum_{j=0}^{w_1-1} (-1)^j \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{T}_l^{(m)} \left(w_2x + 2j\frac{w_2}{w_1}\right) \frac{(w_1t)^l}{l!} \\
 &\times \sum_{i=0}^{w_2-1} (-1)^i \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{T}_n^{(m)} \left(w_1y + 2i\frac{w_1}{w_2}\right) \frac{(w_2t)^n}{n!}.
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
 B(t) &:= \left(\frac{2}{e^{2w_2t} + 1}\right)^m e^{w_1w_2tx} \\
 &\times \sum_{i=0}^{w_1-1} (-1)^i e^{2iw_2t} \left(\frac{2}{e^{2w_1t} + 1}\right)^m \\
 &\times e^{w_1w_2ty} \sum_{j=0}^{w_2-1} (-1)^j e^{2jw_1t} \\
 &= \sum_{j=0}^{w_2-1} (-1)^j \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{T}_l^{(m)} \left(w_1x + 2j\frac{w_1}{w_2}\right) \frac{(w_2t)^l}{l!} \\
 &\times \sum_{i=0}^{w_1-1} (-1)^i \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{T}_n^{(m)} \left(w_2y + 2i\frac{w_2}{w_1}\right) \frac{(w_1t)^n}{n!}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

(23), (24)식의 증명으로 정리된 식은 (22)식으로 나타난다. (22)식의 정리에서 $w_1 = 1$ 일 때, (25)식의 따름정리를 확인할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 &\sum_{n=0}^l \binom{l}{n} \sum_{i=0}^{w_2-1} (-1)^i w_2^n \tilde{T}_{l-n}^{(m)} \\
 &\times (w_2x) \tilde{T}_n^{(m)} \left(y + 2i\frac{1}{w_2}\right) \\
 &= \sum_{n=0}^l \binom{l}{n} \sum_{j=0}^{w_2-1} (-1)^j w_2^{l-n} \tilde{T}_{l-n}^{(m)} \\
 &\times \left(x + 2i\frac{1}{w_2}\right) \tilde{T}_n^{(m)}(w_2y).
 \end{aligned} \tag{25}$$

따라서 (22), (25)식을 통해 일반화된 탄젠트 다항식은 정확히 대칭성을 갖고 있는 것으로 확인했다. (26)식부터는 $i, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 일 때, 거듭제곱 합의 다항식을 $\tilde{P}_l(n)$ 으로 정의하고 대안 거듭제곱 합의 다항식과 일반화된 탄젠트 다항식의 관계에 대해 확인한다.

$$\tilde{P}_l(n) = 2^{1+l} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (i)^l. \tag{26}$$

$n \geq 1$ 일 때, $\tilde{P}_l(n)$ 과 $\tilde{T}_n^{(\alpha)}(x)$ 의 관계는 (27)식으로 정리하고 (28)식으로 증명이 가능하다.

$$(-1)^{n-1} \tilde{T}_l(2n) + \tilde{T}_l = \tilde{P}_l(n). \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
 &\sum_{l=0}^{\infty} \left((-1)^{n-1} \tilde{T}_l(2n) + \tilde{T}_l \right) \frac{t^l}{l!} \\
 &= (-1)^{n-1} \frac{2}{e^{2t} + 1} e^{2nt} + \frac{2}{e^{2t} + 1} \\
 &= 2 \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \sum_{l=0}^{\infty} 2^l i^l \frac{t^l}{l!}.
 \end{aligned} \tag{28}$$

(21), (26)식의 정의를 통해서 대안 거듭제곱 합의 다항식 $\tilde{P}_l(n)$ 과 일반화된 탄젠트 다항식 $\tilde{T}_n^{(\alpha)}(x)$ 간의 대칭관계를 확인할 수 있다. 또한

w_1, w_2 가 홀수인 정수라고 할 때, (29)식으로 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \tilde{T}_{n-l}^{(m-1)}(w_1 y) \\ & \times \sum_{s=0}^l \binom{l}{s} w_1^{l-s} w_2^{n-l+s} \tilde{T}_{l-s}^{(m)}(w_2 x) \tilde{P}_s(w_1) \\ & = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \tilde{T}_{n-l}^{(m-1)}(w_2 y) \\ & \times \sum_{s=0}^l \binom{l}{s} w_2^{l-s} w_1^{n-l+s} \tilde{T}_{l-s}^{(m)}(w_1 x) \tilde{P}_s(w_2). \end{aligned} \tag{29}$$

$C(t)$ 를 다음과 같이 정의하면, (29)식의 정리를 증명할 수 있다.

$$C(t) := \frac{(-1)^{w_1-1} 2^{2m} (e^{2w_1 w_2 t} + 1) e^{w_1 w_2 t(x+y)}}{(e^{2w_1 t} + 1)^m (e^{2w_2 t} + 1)^m}.$$

$$\begin{aligned} C(t) & := \left(\frac{2}{e^{2w_1 t} + 1} \right)^m e^{w_1 w_2 t x} \\ & \times \sum_{i=0}^{w_1-1} 2(-e^{2w_2 t})^i \left(\frac{2}{e^{2w_2 t} + 1} \right)^{m-1} e^{w_1 w_2 t y} \\ & = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{T}_l^{(m)}(w_2 x) \frac{(w_1 t)^l}{l!} \sum_{s=0}^{\infty} \tilde{P}_s(w_1) \frac{(w_2 t)^s}{s!} \\ & \times \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{T}_n^{(m-1)}(w_1 y) \frac{(w_2 t)^n}{n!} \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \tilde{T}_{n-l}^{(m-1)}(w_1 y) \right) \times \\ & \left. \sum_{s=0}^l \binom{l}{s} w_1^{l-s} w_2^{n-l+s} \tilde{P}_s(w_1) \tilde{T}_{n-s}^{(m)}(w_2 x) \right) \frac{t^n}{n!}. \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} C(t) & := \left(\frac{2}{e^{2w_2 t} + 1} \right)^m e^{w_1 w_2 t x} \\ & \times \sum_{i=0}^{w_2-1} 2(-e^{2w_1 t})^i \left(\frac{2}{e^{2w_1 t} + 1} \right)^{m-1} e^{w_1 w_2 t y} \\ & = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{T}_l^{(m)}(w_1 x) \frac{(w_2 t)^l}{l!} \sum_{s=0}^{\infty} \tilde{P}_s(w_2) \frac{(w_1 t)^s}{s!} \\ & \times \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{T}_n^{(m-1)}(w_2 y) \frac{(w_1 t)^n}{n!} \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \tilde{T}_{n-l}^{(m-1)}(w_2 y) \right) \times \\ & \left. \sum_{s=0}^l \binom{l}{s} w_2^{l-s} w_1^{n-l+s} \tilde{P}_s(w_2) \tilde{T}_{n-s}^{(m)}(w_1 x) \right) \frac{t^n}{n!}. \end{aligned} \tag{31}$$

(30), (31)식의 증명으로 정리된 식은 (29)식으로 나타나고, (29)식의 정리는 계수 비교 방법을 통해 일반화된 탄젠트 다항식의 대칭성을 확인할 수 있다. 또한 w_1, w_2 가 홀수인 정수라고 할 때, (32)식으로 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} w_1^{n-l} w_2^l \tilde{T}_{n-l}^{(m-1)}(w_2 x) \\ & \times \sum_{i=0}^{w_2-1} (-1)^{1+i} \tilde{T}_i^{(m)} \left(w_1 y + \frac{w_1}{w_2} + 2i \frac{w_1}{w_2} \right) \\ & = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} w_2^{n-l} w_1^l \tilde{T}_{n-l}^{(m-1)}(w_1 x) \\ & \times \sum_{i=0}^{w_1-1} (-1)^{1+i} \tilde{T}_i^{(m)} \left(w_2 y + \frac{w_2}{w_1} + 2i \frac{w_2}{w_1} \right). \end{aligned} \tag{32}$$

$D(t)$ 를 다음과 같이 정의하면, (32)식의 정리를 증명할 수 있다.

$$D(t) := \frac{(-1)^{w_1} 2^{2m-1} (e^{2w_1 w_2 t} + 1) e^{w_1 w_2 t(x+y)}}{(e^{2w_1 t} + 1)^m (e^{2w_2 t} + 1)^m}.$$

$$\begin{aligned}
 D(t) &:= \left(\frac{2}{e^{2w_1t} + 1} \right)^{m-1} e^{w_1w_2tx} \\
 &\times \sum_{i=0}^{w_2-1} (-1)^i e^{2w_1ti} \left(\frac{2}{e^{2w_2t} + 1} \right)^m e^{w_1w_2ty} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{T}_n^{(m-1)}(w_2x) \frac{(w_1t)^n}{n!} \\
 &\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{w_2-1} (-1)^{i+1} \tilde{T}_n^{(m)} \\
 &\times \left(w_1y + \frac{w_1}{w_2} + \frac{w_1}{w_2} 2i \right) \frac{(w_2t)^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} w_1^{n-l} w_2^l \\
 &\times \tilde{T}_{n-l}^{(m-1)}(w_2x) \sum_{i=0}^{w_2-1} (-1)^{i+1} \\
 &\times \tilde{T}_l^{(m)} \left(w_1y + \frac{w_1}{w_2} + \frac{w_1}{w_2} 2i \right) \frac{t^n}{n!}. \tag{33}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D(t) &:= \left(\frac{2}{e^{2w_2t} + 1} \right)^{m-1} e^{w_1w_2tx} \\
 &\times \sum_{j=0}^{w_1-1} (-1)^{j+1} e^{2w_2tj} \left(\frac{2}{e^{2w_1t} + 1} \right)^m e^{w_1w_2ty} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{T}_n^{(m-1)}(w_1x) \frac{(w_2t)^n}{n!} \\
 &\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{w_1-1} (-1)^{j+1} \tilde{T}_n^{(m)} \\
 &\times \left(w_2y + \frac{w_2}{w_1} + \frac{w_2}{w_1} 2j \right) \frac{(w_1t)^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} w_2^{n-l} w_1^l \\
 &\times \tilde{T}_{n-l}^{(m-1)}(w_1x) \sum_{i=0}^{w_1-1} (-1)^{j+1} \\
 &\times \tilde{T}_l^{(m)} \left(w_2y + \frac{w_2}{w_1} + \frac{w_2}{w_1} 2j \right) \frac{t^n}{n!}. \tag{34}
 \end{aligned}$$

(33), (34)식의 증명으로 정리된 식은 (32)식으로

나타난다. 따라서 (32)식으로 일반화된 탄젠트 다항식의 대칭성을 확인할 수 있다.[7] (32)식에서 $w_1 = 1$ 일 때, (35)식과 같은 따름정리를 확인할 수 있다.[8]

$$\begin{aligned}
 &\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} w_2^l \tilde{T}_{n-l}^{(m-1)}(w_2x) \\
 &\times \sum_{i=0}^{w_2-1} (-1)^i \tilde{T}_l^{(m)} \left(y + \frac{1}{w_2} + 2i \frac{1}{w_2} \right) \\
 &= \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} w_2^{n-l} \tilde{T}_{n-l}^{(m-1)}(x) \tilde{T}_l^{(m)}(w_2y + w_2). \tag{35}
 \end{aligned}$$

3. 일반화된 탄젠트 다항식의 근에 대한 수치상 조사

3장에서는 일반화된 탄젠트 다항식 $\tilde{T}_n^{(\alpha)}(x)$ 의 근과 특성을 분석하고, 복소평면에서 일반화된 탄젠트 다항식의 근이 흩어져있는 현상을 관찰한다.[9] α 가 실수 또는 복소수 매개변수이고 $|t| < \frac{\pi}{2}$ 일 때, 일반화된 탄젠트 다항식 $\tilde{T}_n^{(\alpha)}(x)$ 은 생성 함수에 의해 (36)식과 같이 정의된다.

$$\left(\frac{2}{e^{2t} + 1} \right)^\alpha e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{T}_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!}. \tag{36}$$

(36)식에 수를 대입하여 나열하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}_0^{(\alpha)}(x) &= 1, \tilde{T}_1^{(\alpha)}(x) = -\alpha + x, \\
 \tilde{T}_2^{(\alpha)}(x) &= -\alpha + \alpha^2 - 2\alpha x + x^2, \\
 \tilde{T}_3^{(\alpha)}(x) &= 3\alpha^2 - \alpha^3 - 3\alpha x \\
 &\quad + 3\alpha^2 x - 3\alpha x^2 + x,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_4^{(\alpha)}(x) &= 2\alpha + 3\alpha^2 - 6\alpha^3 + \alpha^4 \\ &\quad + 12\alpha^2x - 4\alpha^3x - 6\alpha x^2 \\ &\quad + 6\alpha^2x^2 - 4\alpha x^3 + x^4, \\ \tilde{T}_5^{(\alpha)}(x) &= -10\alpha^2 - 15\alpha^3 + 10\alpha^4 \\ &\quad - \alpha^5 + 10\alpha x + 15\alpha^2x \\ &\quad - 30\alpha^3x + 5\alpha^4x + 30\alpha^2x^2 \\ &\quad - 10\alpha^3x^2 - 10\alpha x^3 + 10\alpha^2x^3 \\ &\quad - 5\alpha x^4 + x^5, \\ \tilde{T}_6^{(\alpha)}(x) &= -16\alpha - 30\alpha^2 + 15\alpha^3 + 45\alpha^4 \\ &\quad - 15\alpha^5 + \alpha^6 - 60\alpha^2x - 90\alpha^3x \\ &\quad + 60\alpha^4x - 6\alpha^5x + 30\alpha x^2 \\ &\quad + 45\alpha^2x^2 - 90\alpha^3x^2 + 15\alpha^4x^2 \\ &\quad + 60\alpha^2x^3 - 20\alpha^3x^3 - 15\alpha x^4 \\ &\quad + 15\alpha^2x^4 - 6\alpha x^5 + x^6. \end{aligned}$$

$n = 1, \dots, 10$ 이고 $\alpha = 3, -7 \leq x \leq 7$ 일 때, $\tilde{T}_n^{(\alpha)}(x)$ 의 10개의 다항식이 한 곳으로 모이는 것을 <그림 1>로 확인할 수 있다.[10]

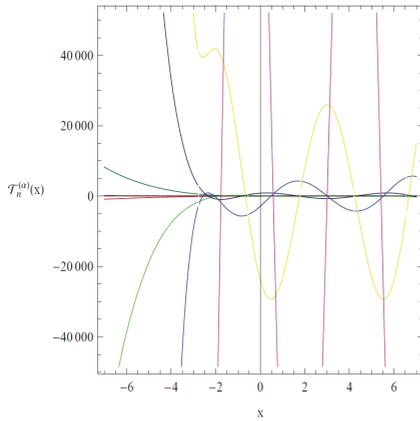


그림 1. 일반화된 탄젠트 다항식의 곡선 $\tilde{T}_n^{(3)}(x)$
Figure 1. Curve of generalized tangent polynomials

$$\tilde{T}_n^{(3)}(x)$$

$\tilde{T}_n^{(\alpha)}(x)$ 의 0에 대한 값은 Mathematica를 사용해서 얻어진 수치적 결과이며, <표 1>로 나타냈다.

표 1. real and complex zeros of $\tilde{T}_n^{(3)}(x)$ 의 수

Table 1. Numbers of real and complex zeros of $\tilde{T}_n^{(3)}(x)$

degree n	real zeros	complex zeros
1	1	0
2	2	0
3	3	0
4	4	0
5	5	0
6	6	0
7	7	0
8	4	4
9	5	4
10	6	4
11	7	4
12	8	4
13	5	8
14	6	8
15	7	8
16	8	8
17	9	8

$n = 50, x \in \mathbb{C}$ 일 때, Beautiful of zeros의 조각을 <그림 2>로 나타냈다.[11]

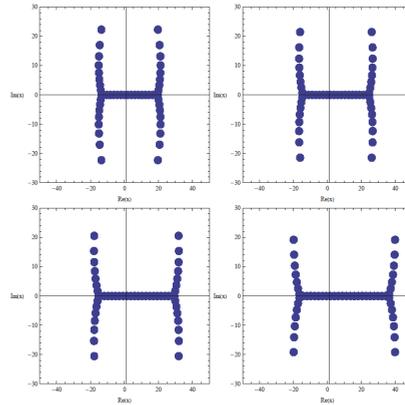


그림 2. $\tilde{T}_n^{(\alpha)}(x)$ 의 제로, $n = 20, 30, 40, 50$
Figure 2. Zeros of $\tilde{T}_n^{(\alpha)}(x)$ for $n = 20, 30, 40, 50$

왼쪽 위 $\alpha = 3$, 오른쪽 위 $\alpha = 5$, 왼쪽 아래 $\alpha = 7$, 오른쪽 아래 $\alpha = 10$ 일 때를 나타낸다. <그림 3>은 $1 \leq n \leq 50$ 일 때, Stacks of zeros

를 3-D 구조로 나타낸 것이다.

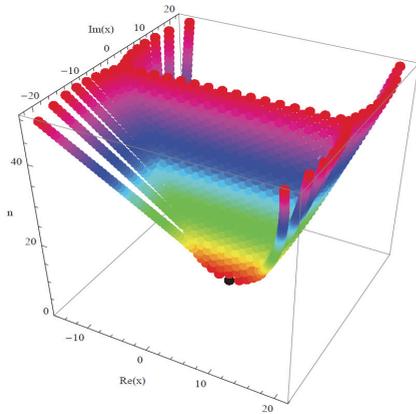


그림 3. Stacks of zeros of $\tilde{T}_n^{(\alpha)}(x)$, $1 \leq n \leq 50$
 Figure 3. Stacks of zeros of $\tilde{T}_n^{(\alpha)}(x)$, $1 \leq n \leq 50$

<그림 3> 3-D 모형에서 일반화된 탄젠트 다항식의 복소수 근에 규칙적인 구조를 확인했다.[12] <표 2>는 $\tilde{T}_n^{(\alpha)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ 의 조건을 만족하는 근사적 해결책이며, <그림 4>는 real zeros의 그래프다.[13]

표 2. $\tilde{T}_n^{(3)}(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ 일 때, 근사적 해결책

Table 2. Approximate solutions of $\tilde{T}_n^{(3)}(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$

degree n	x
1	3.0000
2	1.2679, 4.7321
3	0, 3.0000, 6.0000
4	-0.99102, 1.5606, 4.4394, 6.9910
5	-1.7693, 0.30667, 3.0000, 5.6933, 7.7693
6	-2.3430, -0.83839, 1.6889, 4.3111, 6.8384, 8.3430
7	-2.5731, -2.0564, 0.47548, 3.0000, 5.5245, 8.0564, 8.5731
8	-0.66972, 1.7604, 4.2396, 6.6697
9	-1.7674, 0.58002, 3.0000, 5.4200, 7.7674
10	-2.7721, -0.55494, 1.8056, 4.1944, 6.5549, 8.7721

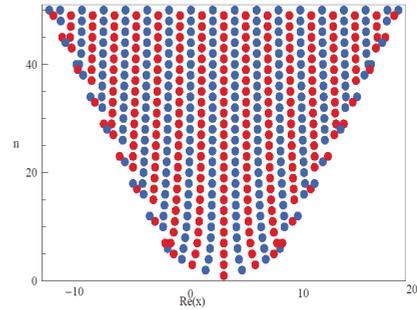


그림 4. Real zeros of $\tilde{T}_n^{(\alpha)}(x)$, $1 \leq n \leq 50$
 Figure 4. Real zeros of $\tilde{T}_n^{(\alpha)}(x)$, $1 \leq n \leq 50$

4. 결론

본 연구에서는 두 가지의 추측이 가능하다. 첫 번째로 $\tilde{T}_n^{(\alpha)}(x)$ 에서 $x \in \mathbb{C}$ 일 때, $Im(x) = 0$ 을 만족하는 반사대칭 분석적 복소수 함수일 것이다.[15] 컴퓨터를 사용하여 많은 n 에 대하여 확인했다. 현재까지는 첫 번째 추측에 대하여 실패하거나 다른 n 에 대한 새로운 결과가 없었으나 본 연구에서는 $\tilde{T}_n^{(\alpha)}(x) = 0$ 일 때, 가능한 정의 및 정리를 제시하였다.

두 번째로 $\tilde{T}_n^{(\alpha)}(x) = 0$ 일 때, n 을 갖는 것은 가능한 정리를 보였다. n 은 $\tilde{T}_n^{(\alpha)}(x)$ 의 차수이기 때문에 $C_{\tilde{T}_n^{(\alpha)}(x)}$ 가 복소수 0일 때, 실제 평면 $Im(x) = 0$ 에 놓여 있는 real zeros의 수는 $R_{\tilde{T}_n^{(\alpha)}(x)} = n - C_{\tilde{T}_n^{(\alpha)}(x)}$ 로 나타낼 수 있다.

본 연구는 일반화된 탄젠트 다항식의 연구 분야에서 Mathematica 소프트웨어를 이용하여 수치적 접근 방법을 사용하는 새로운 접근법이 사용될 것으로 기대하며 마친다.

References

- [1] D. Kim, T. Kim, *Some identities involving Genocchi polynomials and numbers*, ARS Combinatoria, Vol. 121, pp. 403-412, 2015.
- [2] H. Ozden, I. N. Cangul, and Y. Simsek, *Hurwitz type multiple Genocchi zeta function*, Numerical Analysis and Applied Math. AIP Conf. Proc. Vol. 1148, No. 1, pp. 781-784, 2009.
- [3] S. H. Rim, J. H. Jin, E. J. Moon, and S. J. Lee, *Some identities on the q -Genocchi polynomials of higher-order and q -Stirling numbers by the fermionic p -adic integral on \mathbb{Z}_p* , International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Art. ID 860280, 2010.
- [4] C. S. Ryoo, *Some identities of the twisted q -Euler numbers and polynomials associated with q -Bernstein polynomials*, Journal of Computational Analysis & Applications, Vol. 14, pp. 239-248, 2012.
- [5] M. Acikgoz, and S. Araci, *A study on the integral of the product of several type Bernstein polynomials*, IST Transaction of Applied Mathematics-Modelling and Simulation, Vol. 1, No. 1, pp. 10-14, 2010.
- [6] N. S. Jung, H. Y. Lee, and C. S. Ryoo, *Some relations between twisted (h, q) -Euler numbers with weight α and q -Bernstein Polynomials with weight α* , Discrete Dynamics in Nature and Society, Article ID 176296, 2011.
- [7] H. Y. Lee, N. S. Jung, and C. S. Ryoo, *Generalized ω -Euler Numbers and Polynomials*, ISRN Applied Mathematics, Article ID 475463, 2012.
- [8] C. S. Ryoo, *A numerical investigation on the zeros of the tangent polynomials*, J. App. Math. & Informatics, Vol. 32, No. 3-4, pp. 315-322, 2014.
- [9] S. C. Woon, *Analytic continuation of Bernoulli numbers, a new formula for the Riemann zeta function, and the phenomenon of scattering of zeros*, arXiv preprint physics/9705021, 1997.
- [10] C. S. Ryoo, *A numerical computation on the structure of the roots of q -extension of Genocchi polynomials*, Applied Mathematics Letters, Vol. 21, pp. 348-354, 2008.
- [11] T. Kim, *On the q -extension of Euler and Genocchi numbers*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 326, No. 2, pp. 1458-1465, 2007.
- [12] A. P. Veselov, and J. P. Ward, *On the real zeroes of the Hurwitz zeta-function and Bernoulli polynomials*, arXiv preprint math/0205183, 2002.
- [13] C. S. Ryoo, *Calculating zeros of the second kind Euler polynomials*, Journal of Computational Analysis & Applications, Vol. 12, pp. 828-833, 2010.
- [14] C. S. Ryoo, *Calculating zeros of the q -Euler polynomials*, Proceeding of the Jangeon Mathematical Society, Vol. 12, pp. 253-259, 2009.
- [15] B. A. Kupersmidt, *Reflection symmetries of q -Bernoulli polynomials*, J. Nonlinear Math. Phys, Vol. 12, pp. 412-422, 2005.

일반화된 탄젠트 다항식의 대칭적 성질 및 근의 계산

정효용¹, 박원양², 제상영³

¹고려대학교 경제통계학부 박사과정

²고려대학교 경제통계학부 석사과정

³고려대학교 경제통계학부 교수

요 약

본 연구는 수의 특성들을 이용한 일반화된 탄젠트 수와 다항식의 관한 연구에 이어 일반화된 탄젠트 다항식의 대칭적 성질 및 근의 계산에 대해 설명한다. 일반화된 탄젠트 다항식은 제노제 수와 다항식, 오일러 수와 다항식과의 관계적인 특성을 갖고 있다. 본 연구에서는 관계적인 특성을 이용하여 일반화된 탄젠트 다항식의 대칭적 성질을 세 부분으로 나누어 증명한다. 또한 본 연구에서는 Mathematica 프로그램을 이용하여 수치적 방법으로 접근한다. Mathematica 프로그램을 통해 대칭적 성질에 대한 결과는 그래프와 그림으로 확인한다. 다음으로 일반화된 탄젠트 다항식에 대한 근의 계산은 일반화된 탄젠트 다항식의 지수가 3일 때를 예로 들어 근을 구한다. 일반화된 탄젠트 다항식의 근의 계산은 Mathematica 프로그램을 통해 표와 그래프로 나타낸다. 본 연구에서는 일반화된 탄젠트 다항식의 대칭적 성질 및 근의 계산을 Mathematica 프로그램을 통해 진행했다. 결과적으로 본 연구에서는 두 가지 추측이 가능했다. 첫 번째로 일반화된 탄젠트 다항식은 반사대칭 분석적 복소수 함수일 것이고, 두 번째로 일반화된 탄젠트 다항식이 real zeros를 갖는다는 것이다. 일반화된 탄젠트 다항식의 연구 분야에서 Mathematica 프로그램을 이용한 수치적 접근 방법을 기대하며, 본 연구를 마무리한다.



Ho Yong Jung received the M.S. degree and the Ph.D. degree in the Department of mathematics from Hannam University in 2009 and 2017, respectively. He has been a Ph.D. in the Department of Economics & Statistics at Korea University since 2017. His research interests focus on the scientific computing, functional analysis and Economics of Industry. He is a regular member of the KKITS.

E-mail address: tiger8049@korea.ac.kr



Won Yang Park received the bachelor's degree in the Department of Economics from the Korea University in 2018. He has been a M.S. in the Department of Economics & Statistics at Korea University since 2018. His current research interests include Econometrics, Economics of Agriculture, Economics of Industry. He is a regular member of the KKITS.

E-mail address: parkwonyang@korea.ac.kr



Sang Young Jei received the bachelor's degree in the Department of Economics from the Korea University in 1999. He received the M.S. in the Department of Economics from University of Illinois in 2002. He received the Ph.D. in the Department of Economics from University of Missouri in 2009. He has been a professor in the Department of Economics & Statistics at Korea University since 2009. His current research interests include Econometrics, Macroeconomics, EMD. He is a regular member of the KKITS.

E-mail address: syjei@korea.ac.kr