수학적 증명의 조망가능성*

―비트겐슈타인의 수학철학을 중심으로―

박만엽 (중앙대 강사)

주제분류 논리철학

주요어 수학철학, 증명, 조망가능성, 반-플라톤주의, 다채성

요약문

이 논문의 주된 목적은 비트겐슈타인의 수학철학을 중심으로 수학적 증명의 문제를 다루는 데 있어서 핵심적 역할을 하는 '조망가능성' 개념을 해명함과 동시에 그것이 후기의 철학에서 어떤 식으로 연관되는지를 논의하는 데 있다. 비트겐슈타인의 수학철학을 특징짓는 주된 요인들 중 하나인 반-플라톤주의는 외연주의에 대한 거부와 밀접한 관련이 있다. 무한에 대한 비트겐슈타인의 논점은 우리의 인식적 능력의 한계에 있는 것이 아니라 '무한' 개념의 논리적 문법을 철저하게 탐구하는 데 있다. 수학적 증명의 조망가능성에 대한 문제는 러셀의 논리주의 비판에로 연결되며, 동어반복적 변형으로부터 산수식을 증명할 수 있다는 러셀 식의 증명 방식은 조망가능하지 않다. 창조적 개념형성을 강조하는 비트겐슈타인의 증명에 대한 관점은 증명의 유형을 구성하는 것을 옹호한다. 비트겐슈타인을 엄격한 유한주의로 해석하는 더밋의 논증은 무한이 법칙의 속성이지 외연의 속성이 아니라는 비트겐슈타인의 생각을 제대로 반영하지 못하다는 점에서 설득력이 없다. 증명의 조망가능성 개념을 철학에로 확장시킨 후기 비트겐슈타인의 철학적 관점은 수학의 다채성 개념이 철학에도 적용되고 있음을 보이는 결정적 단서가 된다. 결론적으로 비트겐슈타인이 증명을 조망가능성과 연결시킨 것은 증명에 대한 그의 독특한 사고방식의 전환, 즉 봄의 방식을 일깨우기 위한 생각에서 비롯된 것이다.

* 이 논문은 2002년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-2002 -074-AS1511).

1. 들어가는 글

수학에 대한 비트겐슈타인의 철학적 저작들은 철학과 수학의 경계들에 대해 의문을 던지는 것에서 출발한다. 비트겐슈타인은 수학과 철학 사이의 경계선을 흐리게 하자는 것이 아니라 수학과 철학을 분리하는 전통적 방식에 문제가 있음을 보이는 데 주력한다. 그의 목적은 수학과 철학에 놓인 잘못된 경계들을 극복하는 데 있다. 때문에 수학과 철학의 상호작용에 남다른 관심을 가졌던 그의 작업은 철학자들이 주장해 온 '자명함' '명확성' 그리고 '필연성' 등과 같은 개념들에 대해 비범할 정도로 명민한 탐구를 지속적으로 해온 것으로 평가할 수 있다. 다시 말해서 비트겐슈타인은 순수하게 수학적이라고 생각되어온 문제들의 배후에 있는 철학적 문제들을 드러내고자 한다. 이를테면 그는 논리학이나 어떤 다른 계산 체계도 수학의 기초에 기여할 수 없다는 기존의 입장과는 전혀 다른 주장을 한다.

비트겐슈타인의 수학철학을 해명하는 작업이 어렵다고 평가하는 것은 대부분 이런 이유에 기인한다. 뿐만 아니라 그의 수학철학은 초기, 중기, 후기에 걸쳐 끊임없는 사고실험을 통해 계속 변하기 때문에 이러한 어려움은 더욱 커질 수밖에 없다. 예컨대 집합론에 대해서도 초기의 『논고』에서는 전혀 '쓸데없는' 것이라고 하는 반면, 중기에서는 무의미한 것으로 그리고 후기의 『탐구』에 오면 현기증을 일으키는 개념의 혼란이 있는 것으로 말하고 있다. 이러한 사고의 변화는 일관적이지 못하다는 약점이 있지만, 그럼에도 불구하고 그의 끝없는 철학적 사고실험에 대한 탐구 정신은 평가를 받을 만하다. 한 마디로 그의 수학철학은 전혀 '새로운' 것이기 때문에 기존의 철학적 용어나 개념적 장치를 가지고 그것을 규정하는 작업은 한계에 부딪칠 수밖에 없다. 비트겐슈타인은 우리들이 사물들을 바라보는 방식에 문제를 제기하면서, 조망의 문제와 관련해서 새로운 봄의 방식을 추구한다. 이러한 관점은 그의 철학 전체에도 마찬가지로 적용된다. 비트겐슈타인의 철학적 관심은 어떤 새로운 진리의 발견보다는 이미 우리에게 친숙하고 명백한 사실들을 진지하게 보려는 탐구적 정신[1]과 창조적인 개념 형성에 있었다. 비트겐슈타인의 이러한 탐구 정신은 다음의 구절에 잘 나타나 있다.

> 우리가 제시하고 있는 것은 참으로 인간의 자연사에 대한 소견들이다; 그렇지만 우리의 관심사는 진지한 기여가 아니라, 오히려 아무도 의심하지 않았고 언제나 우리의 눈앞에 있기 때문에 고찰되지 않은 채 그저 지나쳐 버린 사실들에 대한 확인이다(*RFM,* I §142; *PI*, §415).[2]

---

1) 이 점과 관련해서 비트겐슈타인은 '같은 것이 다시 행해지는 것' 혹은 '같은 방식에 입각해 규칙을 적용하는 것'으로 생각하는 것이 이미 확정되어 있다는 점을 인정하지 않는다. 1948년 비트겐슈타인은 드루리Drury와의 대화에서 비트겐슈타인 자신이 헤겔과 비슷하지 않느냐는 물음에 다음과 같이 말한 바가 있다: "아니다. 나는 헤겔의 입장과 같다고 생각하지 않는다. 내가 보건대, 헤겔은 언제나 서로 다르게 보이는 것들이 실제로는 같은 것이라는 점을 말하길 바랐던 것처럼 생각된다. 반면에 나의 관심은 같게 보이는 것들이 실제로는 다르게 보인다는 점을 밝히는 데 있다." Rhee (1984), *Recollections of Wittgenstein,* Oxford, 157쪽 in Wang (1991), "To and from Philosophy-Discussions with Gödel and Wittgenstein", *Synthese* vol. 88, 247쪽, 각주 5에서 재인용. 또한 비트겐슈타인은 이미 1930-2년 강의에서 "변증법의 목적은 우리의 어느 곳에 애매성이 있는가를 발견하는 것이어야 한다"고 말한 바가 있다.

2) 필자는 앞으로 비트겐슈타인의 저작을 인용할 적에는 따로 주석을 달지 않고 그냥 본문에 넣는 관례를 따를 것이다. 비트겐슈타인의 저작에 관한 약어는 본 논문의 참고문헌에 괄호로 묶어 놓았다. 이를테면 *RFM,* I §142는 『수학의 기초에 관한 고찰』 1부 142절을 뜻하고, '§'표시가 없는 숫

비트겐슈타인에 의하면 수학은 인간의 실천적 활동에 의한 산물이다. 수학은 기호들을 변형시키는 과정이며, 하나의 명제에서 다른 명제를 추론하는 것이다. 따라서 수학적 추론은 보다 높은 어떤 수학적 실재 혹은 이상에 의해서 지지되지 않는다. 수학은 오히려 인간의 문화, 인류학적 사실의 한 부분에 속하는 것이다. 이런 맥락에서 비트겐슈타인이 집요하게 탐구했던 증명에 대한 생각은 보통의 수학적 증명에 대한 생각과는 판이한 특성을 갖는다. 흔히 우리는 하나의 증명에 의해 이것은 반드시 이렇게 되어야만 한다는 것은 참이라고 말한다. 그러나 비트겐슈타인에 의하면, 여기서 그 말이 의미하는 바는 우리가 어떤 결과를 결정했으며, 우리가 사용하는 언어의 사용을 이런 식으로 고정해야만 한다고 말하는 것이다. 때문에 "증명은 나로 하여금 다음과 같이 말하도록 한다: 그것은 그렇게 되어야만 한다. … 나는 증명을 다 하고 나서 말한다: '그래, 그것은 그래야만 해; 나는 언어의 사용을 그렇게 확정 시켜야만 해.' 그 …여야만 함은 내가 언어에 설치해 놓은 철로에 상응한다고 나는 말하고 싶다."(*RFM,* Ⅲ §30) 수학에서의 옳은 추론은 일정한 종류의 규약이나 사용에 의해 결정된다. 이러한 생각의 밑바닥에는 이른바 가족 유사성 원리[3]로 잘 알려진 후기 비트겐슈타인의 비본질주의에로의 사상적 전환이 깔려 있음을 엿볼 수 있다.

비트겐슈타인에게 있어서 수학은 증명 기술(奇術)들의 다채로운 혼합MOTLEY이며[4](*RFM,* Ⅲ §46), 앞에서 지적한 것처럼 가족을 이루는 것이다. 수의 개념도 가족 유사성에 의해 연결되어 있는 개념이다. 또한 논리적 추론 규칙들은 언어 놀이의 규칙들이고, 논리적 필연성은 언어의 문법의 필연성이다. 이는 법률의 강제성과도 비교되는 그러한 인간적인 개념이다. "규범들의 그물을 형성하는"(*RFM,* Ⅶ §67) 수학은 결국 하나의 인류학적 현상이다.

이 글은 비트겐슈타인의 수학철학을 중심으로 수학적 증명의 문제를 다루는 데 있어서 핵심적 역할을 하는 '조망가능성'Übersehbarkeit[5] 개념을 해명함과 동시에 그것이 후기의 철학에서 어떤 식으로 연관이 있는지를 논의하는 데 초점을 둘 것이다. 그러기 위해서 2절에서는 비트겐슈타인의 수학철학을 특징짓는 주된 요인 중의 하나인 반-플라톤주의를 문법의 문제와 관련시켜 논할 것이다. 3절에서는『수학의 기초에 관한 고찰』에 등장하는 증명의 조망가능성 문제가 러셀의 논리주의 비판과 어떤 식으로 연결되는지를 보일 것이다. 또한 여기서는 증명과 실험의 구분을 통해 수학적 증명이 어떠한 특성을 갖는지를 말할 것이다. 4절에서는 증명의 조망가능성 문제는 자연스럽게 무한의 문제와 연결되는데, 여기서는 무한을 규칙의 부분으로 생각하는 비트겐슈타인을 엄격한 유한주의로 해석하는 일련의 철학자들, 특히 더밋의 논증에 초점을 맞추어 그러한 해석이 정당하지 못함을 보일 것이다. 5절에서는 증명의 조망가능성 개념을 철학에로 확장시킨 후기 비트겐슈타인의 철학적 관점을『탐

자는 그냥 책의 쪽수를 가리킨다.

3) 가족유사성 원리에 관해서는 Suter (1989), *Interpreting Wittgenstein,*『비트겐슈타인과 철학』, 남기창 옮김, 서광사, 1998, 51-70쪽, 참고.

4) 플로이드는 특히 비트겐슈타인에게 있어서 수학과 논리학이 우리의 일상 언어에 있는 '증명 기술들의 다채로운 혼합'임을 강조한다. Floyd (2000), "Wittgenstein, Mathematics and Philosophy", in *The New Wittgenstein,* edited Alice Crary and Rupert Read, Routledge, London and New York. 232쪽.

5) 비트겐슈타인의 저작에는 또한 'Übersichtlichkeit'라는 용어도 등장한다, 번역상의 약간의 차이는 있겠지만 이 글에서는 모두 조망가능성으로 번역해 사용한다. 비트겐슈타인이 조망가능성이라는 용어를 사용할 적의 의미는 인식론적 명확성이 아니라는 점은 이 글을 통해 분명하게 밝혀질 것이다.

구』 §122와 『논고』의 6.45 구절과 비교함으로써 '영원의 상'이라는 특권적인 믿음에서 세속적인 '조망'의 개념으로 바뀌게 되는 점을 중심으로 논함으로써 비트겐슈타인이 수학의 주된 특성으로 간주했던 '다채성' 개념이 철학에도 적용되고 있음을 보일 것이다.

2. 반-플라톤주의와 문법

증명을 수학적 대상에 관한 진리의 근원으로 생각하는 수학자들은 인식론적으로 수학의 본질을 찾는 데서 수학의 확실성을 추구한다. 그러나 비트겐슈타인은 하나의 수학적 표현을 공적인 기록에 넣기 위해서는 여러 가지 다른 기술들이나 논증 형식들을 사용할 수 있으며, 하나의 논증이 증명이라는 자격을 얻기 위해서 반드시 만족해야만 하는 일련의 구문론적 혹은 의미론적 조건들이 미리 결정되지 않는다는 입장을 취한다. 비트겐슈타인에게 있어서 증명은 하나의 도구, 언어의 도구 역할을 한다. 결과적으로 증명은 '발견의 도구'[6)]가 아니다. 수학적 증명에 대한 비트겐슈타인의 생각은 전적으로 수학에 있어서 반-플라톤주의에서 출발한다.

수학에서 플라톤주의[7)]는 우리의 마음과는 독립적으로 실재하는 수학적 대상들, 즉 자연수, 실수, 집합, 함수, 순서쌍 등과 같은 것들이 추상적이며, 변하지 않으며 수학적 대상들의 관계는 필연적으로 성립한다는 점에서, 수학적 진리에 대한 '발견'을 목표로 하며, 그 목표는 수학의 영역에 대한 지도를 그리는 데 있다.[8)] 플라톤주의는 이러한 철학적 근거에 입각해서 일반적으로 받아들인 가정들과 순수 수학의 방법들을 문제시하지 않는다.[9)] 고전수학의 본성을 규명하려는 인식론적 물음과 관련해서, 실재론에서는 플라톤이 상기설에서 완전한 형상, 즉 이데아 세계를 파악할 수 있는 영혼의 능력을 가정하는 것처럼, 수학적 실재론자인 괴델 역시 수학적 진지를 알 수 있는 인간의 능력을 설명하기 위해 수학적 대상들을 지각하는 것과 유사한 일종의 '영혼의 눈'과 같은 종류의 직관적 능력을 가정하고 플라톤적 체계에 원칙적으로 동의한다. "플라톤적 이데아들이 우주에 형태를 부여한다고 하는 가정은 너무도 자연스러우며, 철학적으로는 가장 경제적이다."[10)]

그러나 비트겐슈타인에 의하면, 플라톤적 실재론은 수학적 대상들에 관한 자연의 이야기를

6) Wright (2001), *Rails to Infinity,* Harvard University Press, 422-9쪽, 참고.

7) 플라톤주의라는 명칭은 폴 베르네이Paul Bernays가 1934년 행한 '수학에 있어서 플라톤주의에 대하여'라는 강연에서 공식적으로 붙여졌다. 플라톤주의는 어떤 단일한 이설 혹은 일정한 철학적 이론이 아니다. 그것은 수학의 발견적 그림을 구성하기 위해 만들어진 표현들을 묶어놓은 것이다. Benacerraf (1982), *Philosophy of Mathematics,* 『수학의 철학』, 박세희 옮김, 아카넷, 396-416쪽 참고.

8) 러셀은 수학적 대상에 대한 실재론자의 입장을 다음과 같이 말한다: "모든 지식은 반드시 인식된 것이어야 한다. 그렇지 않을 경우, 그것은 단순히 착각으로 전락할 것이기 때문이다. 산수는 콜럼부스가 서인도 제도를 발견한 것과 똑같은 의미에서 발견되어야 하는 것이다. 또한 콜럼부스가 인디언들을 만들어내지 않은 것처럼, 우리도 또한 수를 만들어내는 것이 아니다. … 사고의 대상이 될 수 있는 것은 어떤 것이건 간에 존재를 갖는다. 그러한 존재는 그것이 사고의 대상이 됨으로써 비롯된 결과가 아니라 사고의 대상이 되기 위한 전제조건인 것이다." Russell (1901), "Is Position in Space and Time absolute or relative?" *Mind,* X, 『수리철학』, S, Barker 지음, 이종권 옮김(1985), 종로서적, 118쪽, 재인용.

9) Wright (1980), *Wittgenstein on the Foundation of Mathematics,* 117쪽, 참고.

10) Wang (1991), "To and from Philosophy-Discussions with Gödel and Wittgenstein", in *Synthese,* vol. 88, August, 275쪽.

수집한 “수들의 자연사” 혹은 “광물학으로서의 산수”(*RFM,* Ⅳ §11)이며, 수학적 명제들을 수학적 대상들에 관한 진술들로 간주하고, 이러한 대상들을 수학적 탐구로 생각하는 것은 일종의 미신과도 같은 “수학적 연금술”(*RFM,* Ⅴ §16)에 지나지 않는다. 또한 논리학이 “일종의 초-물리학”(*RFM,* Ⅰ §8)이라는 생각에도 동의하지 않는다. 비트겐슈타인의 이러한 관점은 수학적 존재에 대한 외연주의를 거부한 것과 관련이 있으며, 이는 궁극적으로 그의 수학철학이 플라톤주의, 엄격한 유한주의와 차이가 있음을 알리는 결정적 단서가 된다.

비트겐슈타인이 플라톤주의를 거부하는 내용은 대체로 다음과 같다: 비트겐슈타인에게 있어서, (1) 수학적 실재물들은 진정한 대상이 아닐 뿐더러 추상적, 혹은 자기-보존적이지도 않다. (2) 수학적 명제들은 기술(記述)들이 아니다. 수학은 수학적 실재물들을 기술하지 않는다. (3) 수학적 계산들은 어떤 심원한 영역에 대한 탐험이 아니라 잘 정의된 논리적 공간들을 탐구하는 것이다. 비트겐슈타인이 결코 단순한 이유에서 플라톤주의를 거부하는 것이 아니다. 그는 수학에 대한 자신의 철학적 탐구를 위한 새로운 생각을 제시하는 데 큰 의의를 두고 있다. 비트겐슈타인이 내놓는 대안은 플라톤주의의 존재론적 쟁점을 문법적 쟁점으로 전환하는 것이다. 플라톤주의자들이 수학적 실재에 대한 정확한 기술에 의해 수학적 명제의 진리를 확고히 한다면, 비트겐슈타인은 그러한 진리의 자리에 문법으로 대치시킨다. “수학에서 우리가 문법적 명제들에 대해 확신하게 된다는 것을 기억하자. 따라서 이 확신의 표현, 결과는 우리가 어떤 규칙을 받아들이고 있다는 것이다.”(*RFM,* Ⅲ §26) 이런 이유로 해서 비트겐슈타인에게 있어서 수학을 구성하는 많은 규칙 체계들은 다양한 언어를 실질적으로 행하는 문법들인 것이다. 이를테면 산수는 수들을 가지고 계산하는 문법인 반면, 기하학은 시각적 공간에 있는 대상들을 기술하는 문법이다. 비트겐슈타인은 수학의 문법적 본성들을 드러냄으로써 수학의 기초에 대한 많은 문제들을 해소하고자 한다. 특히 그는 수학적 명제의 적용가능성과 분명한 일반성, 필연성과 규범적 본성들의 배후에 있는 문제들을 파헤치고자 한다.

수학적 대상의 외연적 존재를 거부하고 창조적 개념 형성을 강조하는 비트겐슈타인의 반-플라톤주의에 대한 입장은 한마디로 ‘알고리즘’을 옹호하고 ‘외연주의’를 비판하는 것에서 출발한다.[11)]

알고리즘에 대한 비트겐슈타인의 견해는 산수를 클래스(집합) 이론에 환원하고자 했던 프레게, 러셀과는 대조적으로 산수를 조작 이론에 환원하는 형식을 취했던 전기의 『논고』는 물론 자신의 사상기의 전환기의 저작들에서 중요한 위치를 차지하고 있다.[12)] 진리-함수의 개

11) 필자는 Marion (1998)의 입장을 따라 비트겐슈타인의 반-플라톤주의를 온건한 유형의 반-플라톤주의(Moderate Anti-Platonism: MAP)와 강한 유형의 반-플라톤주의(Strong Anti-Platonism: SAP)로 구분해 논의한 바가 있다. 박만엽(2003), 『철학탐구』 제15집, 129-136쪽 참고.

12) 중기의 비트겐슈타인에 있어서 ‘계산’ 개념은 영향력이 있었지만, 1930년대 중반에 계산 개념은 언어 놀이 개념으로 변하기 시작했으며, 1940년대 초엽에는 언어 놀이의 연결고리로서 중기에 형성된 계산 개념을 완전히 뒤집는다. 제라르드에 의하면, 계산 개념 자체는 불필요하게 수학 언어의 범위를 제한해 단순히 구문론적 규칙들에 환원시키는 약점을 안고 있다. 즉 하나의 계산의 적용에 대한 설명이나 규칙을 따르는 것이 무엇을 의미하는지에 대한 구체적 논거가 없으며, 이는 궁극적으로 수학의 변화 혹은 성장에 대한 어떠한 설명도 제시될 수 없다. 계산 개념이 언어 놀이 개념으로 바뀌게 되면, 의미와 진리는 오로지 실천의 맥락에서 설명될 수 있으며, 수학은 우리의 삶에서 수학이 행하는 역할이 무엇이며 우리의 다른 언어 놀이에 대해 수학의 관계가 무엇인지를 봄으로써 파악된다. 언어 놀이 개념은 계산 개념을 완전히 거부한 것이 아니라, 그것을 더욱 더 확장하고 수정한 것이다. Gerrard (1991), “Wittgenstein's Philosophy of Mathematics”, *Synthese* 87, Kluwer Academic Publishers. 131-2쪽, 참고.

념은 적어도 그것이 논리적 진리에 관한 결정 절차로 생각되었기 때문에 알고리즘 적이라 할 수 있다. 실제로 비트겐슈타인에게 있어서 진리표의 방법은 "복잡한 동어반복을 용이하게 인식할 수 있는 기계적 절차"(*TLP*, 6.1262)이었다. 수학의 핵심을 알고리즘으로 보고자 하는 비트겐슈타인의 논의가 없이는 그가 어째서 양화사가 없는 산수 체계를 선호했으며, 배중률이나 연속체에 대한 그의 비판적 언급들을 제대로 이해할 수 없게 된다.[13] 수학의 핵심이 알고리즘이라는 그의 생각은 다음의 구절에서 잘 나타나 있다.

> 수학은 전적으로 계산들로 구성되어 있다.
> 수학에서 모든 것은 알고리즘이며 어떤 것도 의미를 지니지 않는다; 우리가 수학적인 것들에 관해 말하기 위해 낱말을 사용하는 것처럼 보이기 때문에 수학이 그렇게 보이지 않는 경우일 때조차. 이러한 낱말들은 심지어 하나의 알고리즘을 구성하기 위해 사용된다(*PG*, 468쪽).

수학적 발견을 거부하는 비트겐슈타인은 수학에서 어떤 새로운 정리는 수학의 새로운 외연을 발견하지 않는다고 하면서, "수학에서 어떤 것을 발견하는 것은 문법에서 어떤 것을 발견하는 것만큼이나 불가능하다"(*WVC*, 63쪽)는 주장을 한다. 외연주의에 대한 비트겐슈타인의 거부는 프레게, 러셀과 같은 논리주의자의 자연수 정의에서 중요한 역할을 하는 '수의 동일성' 개념에 대한 비판적 생각에서도 충분히 엿볼 수 있다. 잘 알려진 것처럼, 프레게는 『산수의 기초』 §62와 §63에서 '수의 동일성'을 다음과 같이 정의하고 있다.

> $F \approx G$이고 그리고 그런 경우에 한해서만 F_s의 수=G_s의 수

비트겐슈타인이 문제시하는 생각의 근원은 『논고』에서 동일성을 나타내는 부호 '='를 제거하고 이를 단순한 변형의 문제로 생각한 데서 연유한다. 통상적으로 논리학자들은 동일성의 부호 '='는 하나의 논리적 상수로 간주한다. 또한 수학적 동일성은 단지 논리적 동일성이라는 일반 개념의 특별한 경우로 생각되었다. 그러나 비트겐슈타인은 수학이 등식으로 구성된다는 견해를 유지하면서 논리적 동일성의 부호를 제거할 것을 『논고』 5.53-5.5352에서 강하게 주장한다. 그 이유는 '대상'이라는 표현이 개념이 아니라 논리적 형식이기 때문이다. "대상의 동일성을 나는 동일성이라는 부호에 의해서가 아니라 그 부호의 동일성에 의해 표현한다."(*TLP*, 5.53) "그러므로 동일성 부호는 논리적 표기법에서 본질적인 구성 요인이 아니다."(5.533) 이에 대한 대안으로 비트겐슈타인은 동일성 부호의 제거를 '변형'의 문제로 생각한다. 이를테면 '$f(a, b). a=b$'는 '$f(a, a)$' 또는 '$f(b, b)$' (5.531)로 변형하는 것이다. 따라서 '$(x):fx.\supset x=a$'는 '$(\exists x).fx.\supset.fa: \sim(\exists x, y).fx.fy$' (5.5321)로 변형할 수 있다. 동일성 부호를 제거하려는 비트겐슈타인의 생각은 러셀의 『수학 원리』의 기수cardinal number 이론에 대한 비판에로 이어지면서 "클래스 이론은 수학에서 불필요하다"(6.031)는 결론에 도달한다.[14]
여기서 $F \approx G$는 F와 G가 일대일 대응으로서, 그것들이 수적으로 같다는 것을 말한다. 다시 말해서 이는 두 집합이 수적으로 동치이면 그리고 그런 경우에 한해서만 그 집합들은 같은 수를 갖는다. 수의 동일성에 대한 프레게의 정의에는 동치 관계인 ≈가 수라는 개념에 대해 앞서 존재한다는 점이 함축되어 있다. 비트겐슈타인은 동치 관계를 나타내는 ≈가 개념적으

13) Marion (1998), *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics*, Clarden Press, Oxford. 1장, 4장, 그리고 7장, 참고.
14) Marion (1998), 48-55쪽, 참고.

로 수 개념에 앞서 존재한다는 프레게의 생각을 뒤집고, 오히려 수 개념이 동치 관계에 앞서 존재한다고 본다. 따라서 프레게의 정의는 순환적일 수밖에 없다. 이러한 비트겐슈타인의 비판적 생각은 러셀에게도 비슷하게 적용된다.[15)]

플라톤주의를 거부하는 비트겐슈타인의 관점은 증명이 수학적 명제의 내용을 고정한다는 생각에 근거하고 있다. 따라서 비트겐슈타인에 의하면, “증명은 우리가 일상적으로 사용하는 언어의 문법을 바꾸며, 우리의 개념을 바꾼다. 증명은 새로운 연관성을 만들며, 그와 같은 연관성들의 개념을 창조한다. (증명은 연관성들이 존재한다는 점을 확립하지 않는다. 즉 증명이 그런 연관성을 만든 다음에 비로소 연관성들은 존재한다.)”(*RFM,* Ⅲ §31) 때문에 비트겐슈타인에게 있어서 증명은 하나의 패러다임(모형)이며 규칙과 밀접한 관련이 있을 수밖에 없다. “증명에 의해 증명된 명제는 규칙으로서, 그리하여 하나의 패러다임으로 이바지한다. 왜냐하면 우리는 규칙에 따라 방향을 잡기 때문이다. 수학적 명제는 우리에게 무엇을 말하는 것이 의미 있는지를 보여주게 될 것이다. 증명은 하나의 명제를 구성한다. … 그 구성이 우리로 하여금 이것을 의미로, 저것을 의미가 아닌 것으로 받아들이도록 결정함이 틀림없다.”(*RFM,* Ⅲ §28)[16)]

---

15) 3+4=7과 같은 산수의 등식을 동어반복에 의해 증명하는 러셀의 방식에 문제를 제기하는 비트겐슈타인의 논증 역시 위에서 언급한 논증과 유사하다. 비트겐슈타인이 제시하는 논의의 핵심은 러셀 식의 동어반복의 적합성을 파악하기 위해서는 산수적 등식의 지식을 필요로 하며, 그 역은 성립하지 않는다는 점이다. 이 점에 대해 비트겐슈타인은 다음과 같이 언급하고 있다: “산수 명제의 정확성은 명제가 동어반복이 되는 것에 의해서 결코 표현되지 않는다. 산수 명제를 러셀 식으로 표현하는 방식에 있어서, 3+4=7과 같은 명제는 다음과 같은 방식으로 표현될 수 있다: (E3x)φx.(E4x)ψx.~(Ex)φx.ψx: →:(E7x)φx.ψx. 이제 이러한 등식의 증명은 다음과 같은 점에 있다고 생각할 수 있다. 쓰인 그 명제는 동어반복이었다. 그러나 이러한 명제를 쓸 수 있기 위해서는, 나는 3+4=7이라는 것을 알아야 한다. 모든 동어반복은 하나의 적용이지 산수의 증명은 아니다.”(*WVC,* 35쪽) 이 점은 우리가 논의하고자 하는 수학적 증명의 조망가능성 문제와도 연결이 된다. 또한 비트겐슈타인이 동어반복에 대해 문제를 제기하는 데는 문법적 규칙의 문제와 관련 있다. 즉 비트겐슈타인에 따르면, 수학이나 논리학에서 사용되는 추론 규칙은 문법적 규칙에 포함된다. 따라서 연역적 추론의 선천적 타당성에 대한 문제는 곧 문법적 규칙에 관한 문제로 귀결된다. 그렇다면 연역적 추론과 관련해서 동어반복에 대한 개념은 수정되어야만 한다. 『논고』에 의하면, 동어반복은 명제들 간의 내적 관계와 관련이 있다. 『논고』에 의하면 “‘(x)fx⊃fa’가 동어반복이라는 사실은 ‘(x)fx’로부터 ‘fa’가 따라 나온다는 것을 보여주며, ‘~(p&~p)’가 동어반복이라는 사실은 ‘p’와 ‘~p’가 서로 모순임을 보인다.”(*TLP,* 6.1201) 그러나 후기에 오면 동어반복은 문법적 규칙과 상관관계를 갖게 된다. 이는 비트겐슈타인이 동어반복보다 문법적 규칙에 논리적으로 우선성을 부여한다는 것을 의미한다. 이러한 생각의 핵심은 전기의 생각과 관련지어 생각한다면 다음과 같이 말할 수 있다. ‘(x)fx’로부터 ‘fa’가 따라 나온다는 것을 인식하는 것, 즉 이러한 내적 함축 관계를 인식하는 것은 ‘(x)fx, 그러므로 fa’라는 추론 규칙을 인식하는 것이다. 따라서 ‘(x)fx⊃fa’가 동어반복임을 인식하는 것은 문법의 규칙을 인식하는 것이다. Baker (1988), *Wittgenstein, Frege and the Vienna Circle,* Blackwell, Oxford, 135쪽, 참고. 또한 비트겐슈타인은 내재적 관계나 속성을 말로 표현하려 할 경우에는 악순환*circulus vitiosus*에 빠진다고 경고한다(참고; *TLP,* 41273). 비트겐슈타인의 내재적 관계와 외재적 관계에 대해서는 홍성기(2004),「데데킨트 절단, 배중률, 관계」,『논리연구』제7집 제2호, 36-44쪽을 참고할 것.

16) 수학에 있어서 ‘구성적 절차’는 수학적 무한에 대한 구성적 접근을 일반적으로 가정한다. 즉 무한집합을 파악하는 것은 그 집합의 원소들을 생성하는 과정을 불명확하게 반복하는 가능성을 파악하는 것에 상응한다. 그렇지만 결코 완성되지 않는 과정으로서 무한집합을 구성의 가능성에 열려있음을 수용하는 직관주의의 구성적 절차에 대해 비트겐슈타인의 생각은 좀 다르다. 무한에 대한 비트겐슈타인의 관점은 무한에 대한 외연들은 없으며 무한에 도달하는 법칙들만 있다는 반-플라톤주의에 그 근원을 두고 있다. 비트겐슈타인의 전략은 무한의 문제 역시 문법적인 가능성에서 다루는 것이

비트겐슈타인의 반-플라톤주의에 대한 논의를 문법의 문제와 관련시키기 위해서 는 칸토르 G. Cantor의 대각선 논증을 '부풀린 증명'a puffed-up proof(*RFM,* Ⅱ §21)으로 보는 집합론에 대한 그의 관점을 살필 필요가 있다. 실무한의 개념[17]을 도입함으로써 집합론의 새로운 장을 연 칸토르는 대각선 논증을 통해 실수 전체의 집합 R과 자연수 전체 집합 N사이에는 1대1 대응 관계가 성립하지 않음을 증명함으로써, 실수 R의 농도는 자연수 R의 농도와 같지 않다는 결론을 얻었다.[18]

비트겐슈타인이 제기한 논점의 핵심은 칸토르의 대각선 증명 절차의 적합성을 문제시한 것이 아니다. 오히려 그것은 그 증명 자체를 둘러봄으로써 대각선 논증이 보여주고자 하는 과정이 무엇인지를 밝히는 데 있다. 이를 위해 비트겐슈타인은 칸토르의 대각선 논증에서 사용된 계산과 계산 방식에서 사용된 언어적 측면을 분명하게 구분한다. "여기에서 지침은 이것이다: 네 주위를 더 넓게 둘러보라! 언어적으로 표현된 어떤 계산의 결과는 의심스럽게 여겨진다. 계산은 낱말들이 표현하는 것의 의미를 밝혀 준다. 계산은 의미를 결정짓는 데 보다 정교한 도구이다. 당신이 언어로 된 표현이 무엇을 의미하는지를 알고자 한다면, 그 계산을 보라. 그러나 그 역은 아니다."(*RFM,* Ⅱ §6-7) 비트겐슈타인은 수학의 계산에서 왜곡된 언어적 의미를 문법적으로 고찰함으로써 수학과 철학이 만날 수 있는 접합점을 찾고자 한다. 문제의 발생은 초한수의 집합 이론에서 구체화된 유한한 전체와 무한한 수열들 간의 범주적 혼동에서 비롯된 것이다. 가부번(세어서 나열할 수 있는)이라는 개념이 필요한 변경을 통해서 무한한 실수의 열들에로 적용될 수 있다는 오류로부터 벗어나기 위해, 비트겐슈타인은 칸토르가 제시한 대각선 논증은 "집합론이 발명되기 오래 전부터 잘 알려져 있으며, 심지어는 초등학교 학생들에게도 친숙하다고 상상해 보는 것은 매우 유익하다"고 본다. 비트겐슈타인이 이러한 사고 실험을 제시하는 이유는 그러한 상상은 "칸토르의 발견을 바라보는 시각을 변화시키기 때문이다."(*RFM,* Ⅱ §17) 그렇게 함으로써 우리는 "'비가부번'non-denumerable이라는 개념이 무엇에 사용될 수 있는가?"(*RFM,* Ⅱ §18) 하는 물음에 대해서도 친숙하게 대처할 수 있다.

비트겐슈타인은 우리로 하여금 '무한'이라는 개념이 한계와 크기와 같은 개념에 대해 둔감한 문법적 장벽을 세우는 것처럼, 끝없이 전개하는 것과 같은 개념들로부터 분리될 수 없다는 점을 파악하는 데 역점을 둔다. 무한에 대한 비트겐슈타인의 논점은 '우리의 인식적 능력의 한계'에 있는 것이 아니라 '무한'이라는 개념의 논리적 문법을 철저하게 탐구하는 데 있다.[19] 때문에 칸토르의 증명은 비트겐슈타인이 말하는 흥미로운 언어 그물에 어떻게 걸리게 되었는지를 보여 준다. "영리한 한 사람이 이러한 언어 그물에 걸렸으며, 따라서 그것은 흥미로운 언어 그물임에 틀림없다."(*RFM,* Ⅱ §15) 비트겐슈타인에 의하면, 칸토르의 대각선 논증에서 귀결되는 고찰은 우리로 하여금 "10^{10}개의 영혼이 $1cm^3$안에 들어간다고 말하

다. 즉 무한한 가능성은 단지 규칙 혹은 구성의 법칙에서 표현되는 것이지, 그것을 주장하는 진술에 의해서 표현되는 것이 아니다. Frascolla (1994), "The Constructvist Model in Wittgenstein's Philosophy of Mathematics", in Shanker (1986), *Ludwig Wittgenstein Critical Assessments,* vol. 3, 242-3쪽, 참고.

17) 무한 개념에 대한 철학사적 변화는 Tiles (1989), 6-31쪽을 참고할 것.

18) 무한집합과 초한수에 관한 이론을 정식화한 칸토르의 대각선 논증에 대한 증명에 대해서는 Margaris (1990), *First Order Mathematical Logic,* Dover Publications, Inc, New York, 10-11쪽과 Boolos and Jeffrey (1989), 11-16쪽을 참고할 것.

19) Shanker (1987), *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics,* Croom Helm, London, 197쪽.

거나”, “바늘 끝에 올라설 수 있는 모든 천사들의 집합과 같이 ‘무한 수열’이라는 집합과 수가 같은 ‘모든 집합들의 집합’이라는 표현을 형성할 수는 있다. 그렇지만 언어의 사용적 측면을 고려하지 않은 표현이나 수학적 명제는 허공에 걸려 있는 수학적 건축물에 지나지 않는다.”(*RFM*, Ⅱ §35) 문법적 기술(技術)이 결여된 대각선 논증의 절차는 실수가 셀 수 없다는 사실을 보여주지 않는다. 비트겐슈타인에게 있어서 이미 있는 사실을 사실인 것으로 입증한 증명은 실수의 본성에 대한 새로운 본성을 발견하는 것으로서가 아니라, 새로운 개념을 결정하는 것으로 간주해야 한다. 수학적 명제들은 순수 수학의 차원에서 다루는 문제가 아니다. 올바른 수학의 관점을 갖기 위해서는, 수학적 실재들에 관한 사실의 진술보다는 새로운 개념을 구성해내는 하나의 기술을 필요로 하고, 어떤 것들은 그러한 기술에 의해서도 행해질 수 없다는 점을 파악하는 일이 중요하다. 왜냐하면 “우리는 한 표현의 정당성을 그것의 사용을 고찰하지 않는 한 조망 할 수 없기 때문이다.”(*RFM*, Ⅱ §62)

수학의 기초론에 대한 비트겐슈타인의 비판적 탐구 정신은 궁극적으로 철학의 본성에 대한 자신의 태도와 관련이 있다. 철학의 문제는 잘못된 언어 놀이에서 파생되는 불건전한 사고의 습관에서 비롯된다. 이와 함께 무질서한 언어 놀이에 의해 생긴 마음의 고통을 제거하려는 철학적 치료를 통해서 진정으로 철학하는 사람이 열망하는 목표인 “사고 속의 평화”(*CV*, 92쪽)를 추구할 수 있게 된다. 이러한 맥락에서 집합론과 실무한 개념을 비판하는 비트겐슈타인은 공동체 사회와 삶에 대한 새로운 방식의 봄을 요구한다. 이에 대한 상세한 논의는 5장에서 다룰 것이다.

3. 증명의 조망가능성

수학적 증명의 조망가능성에 대한 비트겐슈타인의 생각은 1939년~1940년에 기록된『수학의 기초에 관한 고찰』Ⅲ부에서 구체적으로 전개되고 있다.[20] 비트겐슈타인은 수학적 증명의 개념을 분석하기 위해 조망가능성 개념을 사용한 것이 아니라, 조망가능성 개념을 통해서 수학이 ‘증명 기술들의 다채로운 혼합’ 임을 보여주기 위한 의도에서 비롯된 것이다. 수학적 증명의 조망가능성을 추구하는 비트겐슈타인의 작업은 궁극적으로 그가 목표로 삼는 철학적 목적과 방법들의 조망가능한 명확함을 얻고자 하는 것과 무관하지 않다. 조망가능성의 개념은 예리하게 경계가 구분된 개념이 아니며, 엄밀하게 말해서 그것은 수학적 개념이 전혀 아니다.[21]

먼저 증명의 조망가능성에 대한 비트겐슈타인의 언급한 내용을 하나하나 살피도록 하자.

> ⅰ) ‘수학적 증명은 조망가능해야만 한다.’ 재생하는 작업이 쉬운 구조만을 우리는 ‘증명’이라고 한다. 여기에서 우리가 동일한 증명을 실제로 두 번 갖게 되는지, 그렇지 않은지 여부는 확실하게 결정될 수 있어야만 한다. 증명은 엄밀한 재생이 확실하게 가능한 그림이어야 한다. 혹은 다시 말해서, 증명에 대해서 본질적인 것은 엄밀한 재생이 확실하게 가능해야 한다. 예컨대, 두 개의 서로

20) 수학적 구성에 있어서 조망가능성의 중요성에 대한 비트겐슈타인의 생각은 이미 『철학적 고찰』에서 명제 체계의 논리적/문법적 분석을 논하는 데서 엿볼 수 있다: “하나의 명제가 정확한 의미를 지녀야 한다면 (그렇지 않은 경우에는 그 명제는 무의미에 지나지 않는다), 그 명제는 명제의 의미를 완전히 파악 —조망— 해야만 한다; 명제의 일반화는 그 명제가 (예컨대, 명제의 모든 변항들에 대한 모든 값들이) 완전히 결정되는 경우에 한해서 그 의미가 있다.”(*PR*, §122)

21) Floyd (2000), 236쪽 참고.

다른 필체 또는 색깔로 씌어질 수 있으나, 어떤 색채나 필체의 엄밀한 재생과 같은 것은 증명의 재생에 속하지 않는다(*RFM*, Ⅲ §1).

ⅱ) 나는 다음과 같이 말하고자 한다: 만일 우리가 조망가능하지 않은 증명 도형을 기호법을 변경시킴으로써 조망가능하게 만든다면, 우리는 이전에 전혀 없었던 어떤 하나의 증명을 처음으로 만들어내는 것이다(*RFM*, Ⅲ §2).

ⅲ) 우리는 증명을 단 한번(ein für alle mal) 구성한다. 증명은 물론 모델의 특성을 가져야만 한다(*RFM*, Ⅲ §22).

ⅳ) "증명은 반드시 조망가능해야만 한다.": 이 말은 우리로 하여금 '증명을 반복하기'라는 개념과 '실험을 반복하기'라는 개념 간에는 차이가 있음을 주목하는 데 그 목적이 있다. 증명을 반복한다는 것은 어떤 특정한 결과가 한 번 얻어진 조건들을 재생하는 것이 아니라, 각각의 모든 단계와 그 결과를 반복하는 것을 뜻한다. 그리고 비록 증명이 그리하여 완전히 자동적으로 재생될 수 있어야만 하는 것일지라도, 그러한 모든 재생은 그 결과를 받아들이도록 강제하는 증명력을 포함해야만 한다(*RFM*, Ⅲ §55).

ⅴ) 내가 '증명은 조망가능해야 한다'라고 말할 적에 의미하고자 했던 것은, 인과성은 증명에서 아무런 역할도 하지 않는다는 점이다. 다시 말해서 하나의 증명은 그저 복사함으로써 재생될 수 있어야만 한다(*RFM*, Ⅳ §41).

비트겐슈타인의 주장 (ⅰ)에 의하면, 증명이 조망가능하다는 것은 그것이 재생 가능해야 한다는 것을 뜻한다. 증명이 재생 가능해야 한다는 것은 말 그대로 증명된 것을 다시 증명할 수 있어야 한다는 말이다. 이는 증명을 실질적으로 조망할 수 있는 능력과 증명을 실질적으로 재생할 수 있는 가능성과 더불어 우리가 증명에 대해 본질적인 것을 재구성할 수 있음을 확신해야만 한다는 것을 뜻한다. 상식적인 수준에서 보자면, 비트겐슈타인의 주장 (ⅰ)은 아무런 문제가 없는 것처럼 보인다. 그렇지만 (ⅰ)의 배후에는 명제 $a + b = c$에 대응하는 러셀 식의 동어반복은 산수적 등식의 증명이 되는 역할을 할 수 없다는 비트겐슈타인의 강한 비판이 깔려 있다. 다시 말해서 이는 러셀의 논리주의에는 순환성이 있다는 비판으로서, 논리적 진리를 이해하기 위해서는 논리적 진리에 의해 참으로 입증되었음을 의미하는 산수적 지식이 먼저 선행되어야 한다는 생각에서 비롯된 것이다. 이에 대한 비트겐슈타인의 생각은 1929년 바이스만이 기록한 『루드비히 비트겐슈타인과 비엔나 서클: *WVC*』에 잘 나타나 있음을 이미 앞에서 지적했다.

여기서 비트겐슈타인은 러셀이 구사하는 10진법 체계에서의 증명에 대한 문제점을 지적하기 위해 스트로크 표기법, 혹은 자신이 "지루한 표기법"(*RFM*, Ⅲ §3)이라 명명한 1, 1+1, (1+1)+1, ((1+1)+1)+1 등등으로 설명되는 기수들을 동원하면서, 7034174 + 6594321과 같은 복잡한 산수 명제에 대한 증명이 존재하는가를 묻는다. 이에 대한 비트겐슈타인의 답변은 물론 부정적이다. 그 이유는 그것이 조망가능하지 않기 때문이다. 비트겐슈타인이 10진법 체계에 의한 '축약된' 절차에 의한 증명을 근원적인 증명 절차로 간주하지 않는 궁극적 이유는 "축약된 절차를 축약되지 않은 절차의 어떤 희미한 그림자로 간주하는 위험이 있는 것 같다"(*RFM*, Ⅲ §19)는 생각에서 연유한다. 여기서 비트겐슈타인은 "축약된 계산에서 우리는 여전히 어떤 규칙을 따르고 있다"(*RFM*, Ⅲ §17)는 점을 지적하면서, 궁극적으로 "셈의 규칙은 셈이 아니다"(*RFM*, Ⅲ §19)는 점을 강조한다.

러셀 식의 동어반복적 변형에 대한 비트겐슈타인의 비판은 곧바로 주장 (ⅱ)로 연결된다.

주장 (ii)의 핵심은 수학적 증명에서 새로운 표기법을 도입하는 것은 축약된 방식을 도입하는 것 이상을 의미한다는 점이다. '200+200=400'과 같은 산수식은 콰인이 제시한 '수적으로 제한된 양화사'numerically definite quantifier의 개념을 사용해서 다음과 같은 논리적 동치식을 구성할 수 있다.[22)]

$$\text{(R)}\ [(\exists!_{200}x)Gx \wedge (\exists!_{200}x)\ Hx \wedge (\forall x)\neg(Gx \wedge Hx)] \rightarrow (\exists!_{400}x)\ (Gx \vee Hx)$$

여기서 (R)이 산수를 논리학으로 번역하는 데 있어서 산수적 개념들이 요구된다는 비트겐슈타인의 비판은 이미 앞에서 지적했다. 문제는 이러한 번역에서 가정된 기호들의 정의에 있다. 수학에서 정의가 계산의 편리함을 위해 복잡한 표현들을 축약하는데 기여를 한다는 점은 일반적으로 잘 알려진 사실이다. 그럼에도 불구하고, 비트겐슈타인은 "그러한 정의들이 계산의 일부분이며, 그러한 도움이 없이는 산출될 수 없었을 (산수적) 표현들이 정의들의 도움에 의해 산출 된다"(*RFM*, Ⅲ §2)는 점을 지적한다. 결과적으로 새로운 개념을 도입하지 않고 동어반복적 변형으로부터 산수식을 증명할 수 있다는 러셀식의 증명 방식은 조망가능하지 않다. 따라서 (R)은 표기법에서 조망가능한 증명의 적합성을 보장하는 것으로 사용될 수 없다. 옷과 몸의 유비추리를 종종 들었던 비트겐슈타인에게는[23)] 러셀 식의 기호가 사람의 몸에 제대로 맞는 옷이 될 수 없었다. "러셀 식의 기호는 중요한 증명 형식들을 말하자면 마치 사람의 형체가 여러 벌의 옷으로 겹겹이 감싸이게 되는 것처럼 알아보지 못하게 감추어 버린다."(*RFM*, Ⅲ §25)

주장(iii)과 (ⅴ)를 통해서, 비트겐슈타인은 수학을 경험, 혹은 실험과 비교함으로써 수학적 증명의 조망가능성이라는 특성을 기술하고자 한다. 즉 수학의 진술은 경험적 또는 인과적[24)] 진술과 달리 비시간적이다. 경험적 진술은 종종 시간 속에서의 특정한 문제를 가리키며, 테스트를 받아야 하는 일정한 시간을 필요로 한다. 반면에, 수학의 명제는 시간의 언급이 없이 직접적으로 파악이 된다. 일반적으로 실험은 그 결과가 받아들여지기 전에 여러 번 반복되는 것과는 달리 수학의 증명은 '단 한번'의 구성으로 이루어진다. 이 말은 베토벤이 운명 교향곡을 몇 번 작곡했는가? 하는 물음과 관련지어 생각할 수 있다. 즉 베토벤은 운명 교향곡을 작곡하기 위해 여러 번 시도한 끝에 결국 단 한 번 그 곡을 작곡했다. 그러나 그의 운명 교향곡은 몇 번이고 되풀이해서 연주될 수 있는 것처럼, 수학적 증명도 단 한번 구성하

---

22) Marion (1998), 229쪽.

23) 비트겐슈타인이 옷과 몸에 대한 유비추리를 사용한 것은 궁극적으로 언어와 사고의 관계를 기술하기 위한 생각에서 비롯된 것으로 볼 수 있다. 옷들이 따뜻함, 보호, 장식, 감춤, 유혹, ... 등등의 끝없이 다양한 이유들에서 만들어지는 것처럼, 언어 역시 다양한 목적으로 사용된다. 언어에 대한 비트겐슈타인의 이러한 생각은 기본적으로 언어가 사고와 1대1 대응 관계를 가지고 있어야 한다는 관점을 거부하기 위해서이다. 비트겐슈타인은 언어의 비밀은 그것의 표상적 기능을 드러냄으로써 밝혀질 수 있다는 확신을 가지고 있었다. 한편으로는 언어를 의심하면서도 다른 한편으로는 언어는 모든 뜻을 표현할 수 있으며 그것의 단점은 극복될 수 있다는 점에서 비트겐슈타인의 언어에 대한 태도는 양면적이라 할 수 있다. 수학과 언어가 세계를 기술하는 것이 어떻게 가능한가 하는 물음은 이미 비트겐슈타인의 『논고』에서 시작된 문제이다. "논리는 어떻게에는 앞서나, 무엇이에는 앞서지 않는다."(*TLP*, 5.552) Genova (1995), *Wittgenstein A Way of Seeing*, Routledge/ New york & London, 94-5쪽 참고.

24) 수학의 진술이 인과적이 아니라는 비트겐슈타인의 주장은 *RFM*, Ⅶ §18에서 계산이 인과적 연관 관계와 무관하고 단지 그림과의 연관 관계가 있을 뿐이며, 우리가 계산의 결과를 인정하기 위해서 증명 과정을 검토한다고 해서 달라지는 것이 아니라는 점이 다시 한번 강조되고 있다.

지만, 수학적 증명은 몇 번이고 되풀이해서 재생되고 복사될 수 있다.25) 비트겐슈타인에게 있어서, 증명을 '단 한번' 구성하는 것은 증명으로 하여금 그 역할을 '모델' 혹은 '규칙'으로 하게끔 해준다. 아울러 수학의 명제는 경험적 명제와 달리 "규칙이라는 위엄"(*RFM*, I §165)을 갖는다. 그러므로 증명은 수학의 구성적 활동을 규제하도록 하는 유형, 모형 혹은 그림이라는 주장이 성립할 수 있다. 즉 증명들은 또한 개념들의 적용을 지배하는 규칙들이기 때문에, 그것들은 또한 경험적 기술들의 유의미함에 대한 판단들을 지도할 수 있다. 이러한 주장은 다음의 구절들에 의해 뒷받침되고 있다:

> '증명된 명제'는 증명 그림으로부터 읽혀질 것을 표현한다. …증명은 어떤 특정한 산출된 결과에 대한 우리의 모델이며, 이것은 실제의 변화에 대한 비교 대상(척도)로 기여한다(*RFM*, Ⅲ §24).

> 명제 25 × 25 = 625의 정당화는 자연적으로 누군가가 이러이러한 식으로 훈련을 받았다면, 정상적인 상황에서 그는 25에 25를 곱한 결과로서 625를 얻는다는 것이다. 그러나 산수 명제는 그것을 주장하지 않는다. 그것은 소위 하나의 규칙으로 굳어진 경험적 명제이다. 그것은 그 규칙이 곱하기의 결과일 때에만 따라 나오게 되었다는 것을 조정한다. 따라서 그것은 경험에 의해 확인되는 것으로부터 물러서야 하지만, 지금은 경험을 판단하는 것에 대한 전형으로 쓰인다(*RFM*, Ⅵ §23).

하나의 증명을 증명-유형, 모형, 그림으로 파악한다는 비트겐슈타인의 생각은 증명이 어떻게 산출되었는가보다는 증명을 통해 무엇이 산출되어야 하는지를 파악하는 일반적인 것에 비중을 둔다고 볼 수 있다. 이는 수학적 증명에 대한 지식이 특정한 증명을 구성하는 것보다는 증명의 유형을 구성하는 신념을 포함한다는 점에서, 비트겐슈타인은 '낱개의 증명'proof-tokens보다는 '증명의 유형'proof-type을 구성하는 것을 옹호함을 알 수 있다. 이는 창조적 개념 형성(구성)을 강조하는 비트겐슈타인의 생각과 맞물려 있다. 결론적으로, 증명을 단 한번 구성한다는 비트겐슈타인의 언급은 증명을 단 한번 발견했다는 주장과 동일시할 수 없으며, 수학의 증명을 통해 나온 결과는 낱개의-구성으로부터 얻어진다는 것을 발견하는 것이 아니다. 중요한 것은 단순히 증명의 결과 R을 어떤 식으로 산출했는가 하는 문제가 아니라, 수학의 여러 가지 구성적 활동을 통해서 그것들의 같음 혹은 차이에 대한 기준을 배우는 '규칙'의 문제이다. "규칙에 따라 행하는 것은 우리의 언어 놀이에 기본적이다."(*RFM*, Ⅵ §28) 그러므로 수학에서 규칙을 배우는 것은 경험적인 뜻에서 하나의 '판단'을 하는 것이 아니라, "우리가 판단하는 모든 것을 세우는 하나의 절차"(*RFM*, Ⅵ §28)를 받아들이는 것이다.26)

주장 (iv)의 핵심은 다음과 같이 정리할 수 있다. 증명의 반복은 증명의 결과들이 바로 그 증명의 동일성을 이루는 부분이라는 점에서 닫혀져있다. 반면에 실험을 반복(재구성)하는 것은 실험의 결과에 열려져 있다. 증명과 실험의 구분을 통해서 수학의 개념화는 일정한 경험들에 형태를 부여하고, 이러한 개념들은 '자연의 일반적 사실들'에 의존하고 있음을 보인다. 비트겐슈타인에게 있어서 개념적인 것은 경험적인 것에 모형을 제공하고, 경험적인 것은 새로운 개념 형식을 요청한다. 증명을 통해 사물을 바라보는 새로운 방식을 도입하며, 우리가 사용하는 언어에 대해 새로운 규정을 제공한다는 비트겐슈타인의 생각은 수학적 명제에 속하는 특정한 확실성을 설명해준다. 그림으로서의 증명은 모델의 역할을 하며, 그 모

25) 박정일(1997), 『수학의 기초에 관한 고찰』, 서광사, 147쪽, 각주 참고.
26) Stillwell, 'Empirical Inquiry and Proof', in Detlefsen (1992), *Proof and Knowledge in Mathematics,* Routledge, London and New York, 127-8쪽 참고.

델은 우리가 언어를 사용하는 데 새로운 문법적 규칙들이 된다. “증명에 의해 입증된 명제는 규칙으로서, 하나의 패러다임으로서 기여한다. 왜냐하면 우리는 규칙에 따라 방향을 잡기 때문이다.”(*RFM*, Ⅲ §28)
수학의 역할은 우리가 사는 물리적 세계를 이해하고 기술하기 위해 모아놓은 개념들의 집합, 혹은 개념적 구조를 창조하는 데 있다. 개념을 형성하는 데 있어서, 우리는 언어를 사용하기 위해 필요한 규칙들과 같은 패러다임을 설정하기 때문에 수학은 강제력을 가지며 동시에 규범적인 특성을 지닌다. 이는 마치 사람들이 게임을 위해 규칙을 정한 다음에는 그 규칙에 따라 제지를 받는 것과 흡사하다. 또한 “수학적으로 ...이여야만 하는 것(The Mathematical must)은 수학이 개념을 형성한다는 사실에 대한 또 다른 표현일 뿐이다. 그리고 개념들은 파악에 이바지한다. 그것들은 상황들을 특정한 방식으로 처리하는 것에 대응한다. 수학은 규범들의 그물망을 형성한다.”(*RFM*, Ⅶ §67)

4. 더밋 논증－엄격한 유한주의에 대한 비판

이제까지의 논의를 통해서 우리는 비트겐슈타인이 수학적 명제를 이해하기 위해서는 ‘오직 그 증명만을’ 보아야 한다는 점과 더불어 경험적 명제들이 사실들에 관한 보고들인 것처럼 수학적 명제들이 사실에 관한 보고들의 외연적 그림이라는 점을 타파하기를 원했음을 알 수 있다. 무한의 문제 역시 ‘문법적인’ 가능성으로 특징짓는 비트겐슈타인의 생각은 인간과 신에 가능한 것을 둘러싼 인식론적 논쟁으로부터 야기되는 무한의 본성에 대한 오해를 피하기 위해 계획된 것이다.
더밋과 왕H. Wang과 같은 학자들이 비트겐슈타인을 엄격한 유한주의로 해석한 것은 주로 증명의 조망가능성에 관한 언급들과 ‘실행가능한’ 수 개념에 대한 엄격한 유한주의자의 주장을 혼합한 것에 기초하고 있다. 엄격한 유한주의는 직관주의 입장을 극단화 시킨 것으로서, 수학적 존재는 조작을 실행하는 인간의 실질적 한계들과 연계되어 있다. 예컨대 피보나치수열Fivonach sequence의 경우 엄격한 유한주의자들이 실행가능한 수들의 개념을 도입하도록 하는 것은 자연수 계열의 동형성에 대한 독자성과 같은 가정들을 거부하게끔 하는 우리의 인식적 제한들에 관한 논증이다. 분명히 비트겐슈타인은 이러한 생각에 동의하지 않았다.
엄격한 유한주의에 대한 더밋의 논증은 (엄격한 유한주의자가 수들이 실행가능하거나 증명들이 조망가능하다고 규정할 때) ‘실행가능한’ 혹은 ‘조망가능한’과 같은 술어의 모호함을 지적하는 데 있다. 더밋으로서는 이러한 표현들의 모호함에서 역설[27]이 야기된다는 점에서 의미론적으로 비정합적이며, 이러한 것들을 허용하는 엄격한 유한주의는 수학철학으로 적합하지가 않다고 본다.[28] 여기서 더밋은 “비트겐슈타인에게 있어서 ‘...소수이다’와 같은 산수적 술어의 의미는 그것의 적용을 결정하기위해 ‘원리적으로’ 사용될 수 있는 방식에 의해서

27) 이를테면 수 10^{10}은 전통적인 자연수 계열 N에는 포함되지만, [다음과 같은 정의에 따른 ⅰ) F(0) ⅱ) $F(n) \rightarrow n < 10^{10}$ ⅲ) $F(n) \rightarrow F(S_n)$ 실행가능한 각각의 자연수 0으로부터 다음과 같은 계열을 따라 진행함으로써 얻어질 수 있다: 0, S0, SS0, SSS0, SSSS0, ... 여기서 이러한 계열을 F라고 하면, 그것은 함수 S에 닫힌 자연수 계열이지만, 지수에는 닫혀져 있지 않다.] F에는 포함되지 않는다. 여기서 우리는 두 개의 다른 자연수 계열이 서로 다른 길이를 가진 F와 N을 갖는다. Marion (1998), 218쪽 참고.
28) Dummett (1978), *Truth and Other Enigmas,* London, Duckworth, 265쪽.

가 아니라 우리가 실제로 받아들이는 기준에 의해 주어진다"는 견해를 주장했다. 어떤 술어도 일정한 기준을 실질적으로 적용하기에는 너무 큰 수가 항상 있을 수 있기 때문에, 어떤 술어도 '모든' 자연수들에 대해 결정적인 의미를 가진다고 말할 수는 없다. 더밋은 $1,000,000^{1,000,000}+1$과 같이 엄청나게 큰 수가 소수인지 합성수인지 분간해내는 에라토스테네스의 체Ertosthenes' sieve의 방식을 예로 들면서, 아무리 새로운 방식을 채택한다고 할지라도 새로운 방식의 적용이 조망불가능한 경우가 있기 마련이라고 주장한다. 그렇게 되면 "우리는 모든 수가 소수이거나 합성수라고 주장할 권리가 전혀 없다"고 할 수 있다. 따라서 더밋은 비트겐슈타인의 조망가능성에 대한 주장이 급진적일 수밖에 없으며 마땅히 거부되어야 한다고 주장한다.

그러나 이에 대한 비트겐슈타인의 입장은 다르다. 비트겐슈타인은 튜링A. Turing과의 대화에서 엄청나게 큰 수의 곱셈을 하는 경우(여기서 비트겐슈타인은 사람들이 얻은 결과가 서로 다르게 나타났다고 가정하고 있으며, 계속해서 다음과 같이 묻고 있다: 무엇이 올바른 결과가 되는가? 무엇이 올바른 결과인가? 어떤 사람이 올바른 결과를 발견했는가?)를 생각했던 『수학의 기초에 관한 강의: *LFM*』에서 산수와 실험의 구분을 논하면서 이 문제를 다음과 같이 비켜간다: "이것은 하나의 계산이기를 멈추었다."(*LFM*, 101쪽) 비트겐슈타인에게 있어서 계산이 조망가능하지 않으면, 그 계산은 증명이 되는 것의 특성을 잃고 하나의 실험이 되며, 때문에 그것은 적절한 하나의 계산이라 말할 수 없다. 비트겐슈타인으로서는 더밋의 논변이 일종의 문제의 핵심을 비켜가는 일종의 동문서답으로 보일 수밖에 없을 것이다.[29] 왜냐하면 더밋은 비트겐슈타인이 염두에 둔 '계산의 조망가능성' 문제를 다루고 있지 않기 때문이다. 또한 더밋은 무한이 법칙의 속성이지 외연의 속성이 아니라는 비트겐슈타인의 생각을 제대로 반영하고 있지 못하다. "'무한'이란 낱말은 항상 규칙의 부분이다."(*PR*, 313쪽) 여기서 우리는 비트겐슈타인이 언어 게임의 주된 요인이랄 수 있는 '일치'의 문제를, 즉 수학적 실천의 문제를 염두에 두고 있음을 짐작할 수 있다. 따라서 우리가 만일 규칙에 지배를 받는 행동의 영역에 있다면, 올바른 답이 있을 것이며, 따라서 원리적으로 올바른 답이 존재한다.

비트겐슈타인에게 있어서 추론은 '직접적'이다. 즉 사람들은 어떤 통찰이나 해석의 매개를 거치지 않고, 단순히 규칙들을 사용하면서 자기가 배운 대로 하나의 명제를 쓰고는 또 다른 명제를 쓰는 것처럼 규칙들을 적용하면서 숙달되는 과정을 겪는다. 또한 규칙의 사용을 엄격하게 연습하고 공적인 일치를 얻는다면 규칙의 일관성은 보장된다. 비트겐슈타인은 인간의 실천적 행위에 입각해서 수학의 객관성이 확보될 수 있다고 주장함으로써 수학적 대상과 사유의 일치가 수학의 객관적 진리를 보장한다는 전통적 생각을 뒤집었다. 그러나 비트겐슈타인은 수학이 개인적 취향이나 임의적인 해석에 의한 것이 아니라, 엄격한 규칙을 따르는 인간의 지적 활동임을 강조한다. 즉 어떤 하나의 증명 과정에 있는 단계들을 받아들이거나 거부를 할 선택권이 우리에게는 없다. 따라서 비트겐슈타인의 다음과 같은 언급은 이런 맥락에서 이해되어야 한다: "내가 규칙을 따를 때, 나는 선택하지 않는다. 나는 규칙을 맹목적으로 따른다."(*PI*, §219)[30] 이러한 비트겐슈타인의 사고는 궁극적으로 발견되기를 기다리는

29) 수학적 증명의 구성가능성을 수학의 객관성 문제와 관련짓는 더밋과 비트겐슈타인 양자의 입장은 어느 정도 공통점이 있는 것처럼 보인다. 그러나 자연 언어의 이해를 목표로 하는 더밋의 주된 관심은 체계적인 의미 이론의 정립에 있었던 반면, 비트겐슈타인은 우리가 사용하는 자연 언어의 잘못된 사용을 바로잡고자 했던 자신의 철학적 목표를 체계적인 이론의 정립에 두지 않았다는 점에서 이들의 관점은 커다란 차이를 보인다.

수학적 실재의 그림자를 추종하는 플라톤주의의 유령을 극복하는 데 그 의의가 있다.
엄격한 유한주의에 대해 더밋이 제시하는 또 다른 논증 하나는 다음과 같다. 더밋은 비트겐슈타인이 수학에서 우리가 조망불가능한 영역에 이를 때, 즉 문제의 답을 구성할 수 없을 때 그 답을 유일하게 아는 전지전능한 신에게 호소하지 않는다는 점을 엄격한 유한주의에 대한 논거로 든다. "'인간인 우리들에게 있어서, 우리가 도달할 수 있는 최선의 것, 우리가 얻을 수 있는 가장 가까운 것은 우리가 항상 그것을 얻거나, 혹은 많은 경험을 가진 누군가가 항상 그것을 얻었다는 것이다.' 실제로는 마치 신만이 알 수 있는 것을. -튜링은 이렇게 제안했으며, 그것이 바로 튜링과 내가 다른 점이다. ... 수학에서 신이 아는 만큼 우리도 안다."(*LFM*, 103-4쪽) 직관주의자들 역시 이 점에 대해서 마찬가지의 입장을 취할 것이다. 그러나 더밋은 비트겐슈타인이 직관주의자보다 강력한 주장을 하고 있다고 해석한다. 즉 직관주의자가 신에게 호소하는 것이 결정가능성 영역 바깥에 있다고 주장한다면, 반면에 비트겐슈타인은 결정가능성 영역 안에서, 즉 신에 의해 알려졌을 '실행가능성'의 영역 바깥에는 아무 것도 있지 않다는 주장을 했을 것이다. 그러므로 우리가 조망불가능한 영역에 이를 때마다, 어떠한 규칙을 새롭게 적용할지가 신에 의해 알려진 바가 없기 때문에 우리는 매번 결정을 요구할 수밖에 없다는 것이다. 그러나 비트겐슈타인에게 있어서 규칙의 적용이 결정의 문제가 아니라는 점은 위에서 지적한 바가 있다.
따라서 비트겐슈타인이 엄격한 유한주의자라는 더밋의 논증은 설득력이 없다.[31] 오히려 비트겐슈타인의 관점은 엄격한 유한주의는 물론 그것에 반대하는 주장들 모두에 문제가 있음을 지적한 것으로 평가할 수 있다.

5. 조망가능성 개념의 확장

수학에서 증명의 문제를 배제하면 수학을 논의 할 수 없을 정도로 양자의 관계는 아주 긴밀하다. 수학에서 증명, 필연성, 확신과 같은 설득력 있는 근거들은 실질적으로 중심적 역할을 한다. 그러나 증명의 사용과 적용 문제에 남다른 관심을 가졌던 비트겐슈타인에게 있어서는 수학의 근거를 이루는 이러한 개념들이 전적으로 수학적 개념이 아니라는 점에서 그의 독특한 면모를 엿볼 수 있다. 한 마디로 말해서, 비트겐슈타인은 '증명'을 '형식적 도출'과 동일시하지 않았다. 그에게 있어서 증명의 진정한 형식은 그것의 사용을 통해 사람들에게 확신

30) 비트겐슈타인은『수학의 기초에 관한 강의』에서도 이와 유사한 언급을 하고 있다: "우리는 각각의 단계에서 직관이 아니라, 결정을 필요로 한다고 말할 수 있다. 실제로는 아무 것도 없다. 당신은 결정을 하지 않는다: 당신은 단순히 어떤 것을 한다. 그것은 일정한 실천적 관습의 문제이다."(*LFM*, 237쪽)
31) 이와 유사하게 수학의 필연성 문제와 관련해서도 더밋은 비트겐슈타인의 관점을 '완강한 규약주의'라고 평가한다. 완강한 규약주의는 우리가 공리와 규칙들을 선택하는 것뿐만 아니라 그것들로부터 귀결되는 것에 대해서도 자유로우며, 우리가 규칙의 결과로부터 무엇을 원하든 간에 계산이나 추론을 하는데 아무런 제약을 받지 않는다는 입장을 지지한다. 그래서 더밋은 하나의 증명이 구성되었을지라도 그것을 증명으로 간주할지 여부는 여전히 행위자인 우리에게 달려 있다는 점에서 비트겐슈타인의 생각이 옳지 않다고 주장한다. Dummett (1959), 169-170쪽, 이러한 더밋의 주장은 수학의 임의적 특성만을 강조한 나머지 수학의 창조성이 수학의 강제성과 양립가능하지 않다는 점에서 수학의 객관화에 대한 정당화가 성립하지 않는다는 입장이다. 그러나 비트겐슈타인은 수학의 창조성과 강제성이라는 딜레마의 양 뿔을 동시에 파악함으로써 수학의 객관성이 확보될 수 있다는 입장을 취한다. Klenk (1976), 118-124쪽, 참고.

을 준다는 특징을 가지고 있는 것이다. 우리는 여기서 증명에 대한 비트겐슈타인의 생각이 변하고 있다는 것에 주목할 필요가 있다. 즉 1918년까지만 해도 비트겐슈타인은 증명을 논리학 안에서 단순한 '계산'이라고 했지만 1950년대에 들어서면 외적 세계의 존재를 증명하고자 하는 무어G. E. Moore가 시도했던 증명 방식을 거부하기에 이른다.[32] 그렇다고 해서 비트겐슈타인이 힐버트나 괴델이 시도했던 형식적, 공리적 증명 체계를 거부했다는 것은 아니다. 비트겐슈타인으로서는 그러한 증명 체계 역시 일정한 맥락에서는 나름대로 특정한 증명에 대한 수학적 이해를 준다는 점을 거부하지는 않았을 것이다. 그가 문제를 삼은 것은 증명 개념에 대한 철저한 분석을 하지 못한 데서 오는 철학적 개념에 대한 혼란이었다. 때문에 비트겐슈타인이 명시적으로 반대한 입장은 논리학이 수학적 이해의 유일한 기준이라는 혹은 확신을 줄 수 있는 유일한 원천이라는 생각에 문제가 있음을 제기하는 것이다. 이러한 생각의 배경에는 수학적 모델만으로는 심원한 철학적 문제들을 해소할 수 없다는 그의 믿음이 강하게 작용했다.[33]

분명한 것은 비트겐슈타인이 후기에 전념했던 철학적 탐구가 그가 수학에서 주력했던 증명의 문제를 그대로 안고가지는 않았다는 점이다. 그렇다고 수학적 증명에 대한 문제를 완전하게 버리고 철학에로 전환했다는 것은 물론 아니다. 필자는 이 문제에 대한 단서가 바로 '조망가능성' 개념에 있다고 본다. 즉 수학적 증명의 조망가능성은 철학에서 문법적 탐구의 조망가능성으로 연결되면서 조망가능성에 대한 그의 철학적 사고가 보다 더 확장된다. 이러한 논의를 위해서는 먼저 『탐구』 §122를 면밀히 살필 필요가 있다.

> 우리가 이해를 하지 못하는 한 가지 주된 원천은, 우리가 낱말들의 사용을 조망하지 못한다는 점이다. ―우리의 문법에는 이러한 조망가능성이 결여되어 있다. 조망가능한 묘사는 이해를 성립시키며 이해란 다름 아니라 우리가 "연관들을 보는" 데서 존립한다. 그런 까닭에 중간 고리들의 발견과 발명이 중요한 것이다.
>
> 조망가능한 묘사란 개념은 우리에게 근본적인 중요성이 있다. 그것은 우리의 표상 방식, 즉 우리가 사물을 보는 방식을 특징적으로 나타낸다. (이것은 하나의 세계관인가?)(*PI,* §122)

비트겐슈타인(후기)에 의하면, 철학은 우리가 사용하는 낱말의 기술에 의해서 철학적 문제와 오해들이 해소되고 제거되어야 하는 문법적 탐구이다 개념적 관계에 대한 고찰은 "문법

---

32) Moore, "Proof of an External World", in *Proceedings of the British Academy,* vol. 25 (1939); "A Defence of Common Sense", in *Contemporary British Philosophy,* 2nd Series, ed. J. H. Muirhead, 1925, *OC,* §1, 참고.

33) Floyd (2000), 235쪽, 참고. 플로이드에 의하면, 비트겐슈타인이 수학에서 공리적, 연역적 방식에 적대감을 보인 것은 (분명한 기록은 없지만) 그가 10대에 읽은 쇼펜하우어의 『의지와 표상으로서의 세계』에서 영향을 받았을 것으로 추정한다. 그러나 필자는 이러한 추정이 어느 정도 설득력이 있다는 것을 Monk (1990)에서 확인할 수 있었다. 비트겐슈타인이 8살 때 가졌던 "거짓말을 하는 것이 이로울 때에도 사람은 왜 정직해야 할까?"라는 문제의식을 통해 그는 사람은 진실해야만 하며 '왜?'라는 질문은 적절하지 않으며 그것에 답할 수도 없다는 점을 계속 생각했으며, 이러한 생각은 자신이 어떤 인물인지를 감추지 않겠다는 결심이 비트겐슈타인의 중심 생각이 되었고 훗날 정직하지 못했던 순간들에 대해 일련의 고백을 하게끔 몰고 간 힘이 된다. 비트겐슈타인이 쇼펜하우어의 책을 읽게 된 계기는 1903-1906에 다닌 린츠Linz 실업학교에서 신앙심을 잃어버렸음을 그의 누이 그레틀에게 의논을 했으며, 그녀는 믿음을 상실한 그의 철학적 성찰을 돕기 위해서 쇼펜하우어의 『의지와 표상으로서의 세계』를 소개했다고 전한다. Monk (1990), *Ludwig Wittgenstein,The Duty of Genius,* 『루드비히 비트겐슈타인, 천재의 의무』, 남기창 옮김, 문화과학사, 1998, 1권, 23-42쪽 참고.

적 주석”(*PI,* §232) 내지는 “문법적 고찰”(*PI,* §574)이다. 우리가 사용하는 낱말들은 분명히 단 하나의 용법만을 갖지 않는다. 우리가 낱말들의 사용에 혼란을 겪는 것은 “낱말의 의미는 언어 안에서 그것이 사용되는 방식”(*PI,* §43)임을 주장하는 비트겐슈타인 식대로 말하자면 표층문법과 심층문법의 차이를 혼동하는 데서 비롯된다. 이를테면 ‘듣다’라는 동사의 경우 우리는 여러 사람들이 말하는 소리를 듣는 것과 마찬가지로 신의 소리도 듣는다고 한다. 사람들이 한 말은 그들이 우리를 향해 있지 않더라도 들을 수 있지만, 신의 말은 신이 우리를 향해 말을 할 때만 들을 수 있다는 심층적 문법의 차이를 무시하기 때문에(*Z,* §717) 벌어지는 현상으로 생각할 수 있다. 비트겐슈타인이 낱말의 사용에서 맥락을 중요시하는 것은 바로 이 때문이다.[34]

철학이 궁극적으로 문법적 규칙에 관심을 가져야 하는 것은 문법적 규칙의 명료화를 통해서 철학적으로 혼동을 일으킨 문제들과 역설들이 해소될 수 있기 때문이다. 철학적 문제를 해소하는 데 실패하는 것은 물속에 설탕이 녹아 없어지는 것처럼 그러한 문제들이 사라지는 문법적 사실들을 정리하는 것에 실패하는 데서 기인한다. 과학의 문제는 그 특성상 해결될 수 없는 것들이 있지만, 철학의 문제들은 완전히 해소될 수 있다, 과학과 달리 철학에서 우리가 필요로 하는 정보는 이미 준비되어 있다.[35] 비트겐슈타인에 의하면, 뜻의 한계와 한 표현의 사용에 대한 규칙을 결정하는 문법은 언어의 올바른 사용을 결정할 수 있는 지표로서 언어의 회계장부와 같은 역할을 한다.

특히 우리는 여기서 『탐구』 §122에 있는 “조망가능한 묘사란 개념은 우리에게 근본적인 중요성이 있다”는 구절에 주목할 필요가 있다. 즉 비트겐슈타인은 ‘조망가능성’ 개념을 통해서 자신이 철학에서 성취하고자 하는 목표들에 대한 상징적, 혹은 비유적인 묘사를 본다는 점을 분명하게 고찰하고 있는 것이다. 즉 그가 수학을 논의하면서 언급했던 증명의 조망가능성과 연관시킨 표현들은 조망가능성이란 개념의 철학적 전환에 의해서 자신이 이루고자 하는 철학적 구상에 적용되기에 이른다.

필자가 보건대 이러한 전환, 즉 수학적 증명의 조망가능성에서 조망가능한 묘사에 대한 문법적 탐구로의 전환에 결정적인 역할을 하는 것은 수학을 다채성으로 보고자 하는 비트겐슈타인의 관점이 철학에도 그대로 적용하는 것에서 비롯된다. 때문에 비트겐슈타인이 후기에 들어서면서 ‘스케치’, ‘고찰’, ‘앨범’, ‘조망가능한 묘사’와 같은 개념을 자주 쓰는 것은 바로 철학을 다채로운 특성들을 모아놓은 것으로 보려는 태도와 밀접한 관련이 있다. 이러한 비트겐슈타인의 정신은 『탐구』의 서문에 잘 나타나 있다. “이 책의 철학적 소견들은 말하자면 이 길고 얽히고설킨 여행에서 생겨난 다수의 풍경 스케치들이다. … 그러므로 이 책은 실로 하나의 앨범일 뿐이다.” 앨범은 말 그대로 비어있는 책이다. 그러나 그것은 일상적 의미에서 ‘책’도 아니고, 논문도 에세이도 아니다. 또한 그것은 단순히 잡동사니를 모아놓은 것도 아니다. 이를테면 가족사진을 모아놓은 앨범에는 나름대로의 어떤 질서와 연관성들이 있으

---

34) 비트겐슈타인은 낱말이나 기호의 의미가 그것의 사용에 달려 있으며, 그것을 적용하는 규칙이 낱말이나 기호에 대해 그것의 의미를 부여한다고 주장한다. 이러한 관점에서 비트겐슈타인은 “하나의 낱말은 오직 문장의 문맥 속에서만 의미를 가진다”는 프레게의 문맥 원리를 문법적 규칙에 따라 언어가 사용되는 언어 놀이의 차원으로 바꾸어 생각한다. 그 이유는 “어떤 한 사물에 이름을 부여하는 것만으로는 아무 것도 행해지지 않았으며, 언어 놀이를 떠나서는 사물은 이름조차 가지지 않기”(*PI,* §49) 때문이다. 명제의 의미는 언어 놀이에서 명제가 차지하는 역할이며, 문법적 명제는 언어의 사용을 규정하는 규칙이다.

35) Hacker (1996), *Wittgenstein's Place in Twentieth-century Analytic Philosophy,* Blackwell, Oxford, 109-110쪽 참고.

며, 한 가족의 삶의 양식을 엿볼 수 있는 기록을 모아놓은 것이다. 이와 마찬가지로 비트겐슈타인은 이론을 통해 철학에 질서를 부여하려고 애쓰는 것이 아니라 관찰을 통해서 이미 존재하는 연관성들을 말 그대로 고찰을 통해서 철학의 질서를 다시 회복하려는 데 그 의의를 두고자 한다. 비트겐슈타인이 봄의 방식을 강조한 것은 바로 이러한 점과 무관하지 않다.[36)]

그러므로 '문법의 조망가능한 묘사'가 철학적 문제를 해소할 수 있다는 비트겐슈타인의 관점에는 조망가능한 묘사가 그것의 적용에 있어서 제한이 없으며, 새롭고 다른 철학적 관점의 맥락에서는 새롭게 보인다는 가능성을 열어두고 있다는 점을 유념할 필요가 있다. 때문에 다음과 같은 비트겐슈타인의 고찰들 역시 수학에서 증명의 조망가능성에 대해 고찰한 것을 다시 철학적으로 확장시킨 것으로 생각할 수 있을 것이다.

> 그 안개는 우리가 언어 현상들을 그것들의 원초적인 사용 방식에서 연구한다면 사라진다. 거기에서는 낱말들의 목적과 기능이 명료하게 조망될 수 있다(*PI*, §5).

> 이러한 조망가능한 묘사는 우리가 "그 연관성들을 본다"는 사실에 바로 놓여있는 이해를 가능하게 해준다. 중간 고리들을 찾는 것이 중요한 것은 바로 이 때문이다(*RFGB*, 9쪽).

> 심리학적 개념들의 기원(족보): 내가 추구하는 것은 정확함이 아니라, 조망가능성이다(*Z*, §464).

'조망한다'는 말은 기본적으로 보는 방식과 관련이 있는 것이지 생각하는 방식과 관련이 있는 것이 아니다. 조망에 대한 비트겐슈타인 생각을 보다 근원적으로 살피기 위해서는 사고의 한계를 긋기 위해 말할 수 있는 것과 말할 수 없는 것을 명확하게 구분하고자 했던 『논고』 6.45의 구절을 비교해 볼 필요가 있다. "영원의 상(相) 아래에서*sub specie aeterni* 세계를 본다는 것은 세계를 전체 －한계 지어진 전체－로서 본다는 것이다. 한계 지어진 전체로서의 세계에 대한 느낌은 신비스러운 느낌이다." 비트겐슈타인은 이미 『논고』 6.4311에서 영원을 무한한 시간 지속이 아니라 무시간성으로 이해한다는 것을 전제하고 있다.[37)] 우리는 여기서 세계를 하나의 세계로 보려는, 즉 세계를 유한한 전체로 보려는 비트겐슈타인의 의도를 충분히 짐작할 수 있다. 세계를 하나의 유한한 전체로 경험하기 위해서는 논리의 세계를 통과해야만 한다. "논리는 모든 경험 각각에 －즉 어떤 것이 어떠하다는 것에－ 앞선다." (*TLP*, 5.552) 논리적 그림은 현상들의 다발을 꿰뚫고 그것들의 골격을 이루는 형식

---

36) Genova (1995), 33-4쪽 참고.

37) '영원의 상 아래에서'라는 뜻을 가진 라틴어 *sub specie aeternis*는 원래 스피노자가 사용한 말이다. 비트겐슈타인은 이것을 논리학뿐만 아니라 윤리학, 미학에까지 적용한다. "예술작품은 영원의 상 아래에서 보인 대상이다. 그리고 훌륭한 인생은 영원의 상 아래에서 보인 세계이다. 이것이 예술과 윤리학 사이를 연결시키는 것이다. 사물들을 바라보는 통상적 방법이 말하자면 그것들 한 가운데서부터 보는 것이라면, 영원의 상 아래에서의 견해는 외부로부터 보는 것이다. 그것들이 전 세계를 배경으로 가지는 그러한 방식으로 말이다."(*NB*, 74쪽) 비트겐슈타인의 전기 작가로 유명한 레이 몽크는 이러한 비트겐슈타인의 고찰들을 쇼펜하우어의 영향에서 비롯된 것으로 본다. 몽크에 따르면, 『의지와 표상으로서의 세계』에서 쇼펜하우어는 주목할 정도로 명상의 한 가지 형식에 대해 논의한다. 이런 형식의 명상에서 우리는 '사물들을 살펴보는 일차적 방식'을 버리며 '더 이상 사물들의 위치, 시간, 이유 그리고 목적지에 대해서가 아니라 단순히 본성에 대해서 생각한다'는 쇼펜하우어의 구절을 비트겐슈타인의 생각과 연관을 시키고 있다. Monk (1990), *Ludwig Wittgenstein, The Duty of Genius,* 『루드비히 비트겐슈타인, 천재의 의무』, 남기창 옮김, 문화과학사, 1998, 1권, 207-8쪽 참고.

을 드러낸다. 영원의 상을 강조한 전기의 비트겐슈타인은 형식이 내용의 기반을 이루고 있다고 믿었다. 이러한 그의 믿음은 사물들이 어떻게 있는지는 내용의 밑바닥에 있는 논리적으로 연결된 구조를 조사함으로써 명확해진다는 생각에서 비롯된 것이다. 이는 마치 광속의 빛을 타고 가는 자신을 상상했던 아인슈타인의 사고실험처럼 비트겐슈타인의 사고실험도 공간과 시간의 전체라는 배경으로 대상들과 사건들을 관찰하는 논리라는 대들보에 걸터앉은 자신을 상상하는 것으로 생각할 수 있다.[38]

그러나 논리가 사물들이 어떻게 있는지에 대한 완전한 진리라는 그림을 줄 수 있다는『논고』의 세계는 정적으로 고정된 세계이다. 거기에는 변화, 움직임을 생각할 수 없다는 한계가 있음을 자각한 비트겐슈타인은 '영원의 상 아래에서'라는 특권적인 믿음을 후기에 들어서면서 세속적인 '조망'의 개념으로 바꾸게 된다. 한 마디로 말해서 영원에서 살아 있는 현실로 들어온 것이다. 즉 비트겐슈타인의 철학적 전략은 조망의 개념을 가지고 신비주의에 대한 환상은 과감히 버리고 전체에 대한 관점을 그대로 유지하면서 변화에 대한 봄의 방식을 새롭게 갖자는 것이었다. 아마도 비트겐슈타인의 이러한 관점의 변화는『탐구』§107에서 분명하게 드러난다.

> 우리의 실제 언어를 더욱 정확히 고찰할수록, 그것과 우리의 요구 사이에 충돌은 더욱 강해진다. (논리학의 수정체 같은 순수성은 실로 나에게 탐구의 결과로서 주어진 것이 아니었다; 그것은 하나의 요구였다.) 그 충돌은 견딜 수 없게 된다; 그 요구는 이제 공허한 어떤 것으로 될 우려가 있다. ―우리는 마찰이 없는, 그러니까 어떤 뜻에서는 그 조건이 이상적인, 그러나 바로 그 때문에 또한 걸어갈 수도 없는 빙판에 빠져들었다. 우리는 걸어가고 싶다; 그렇다면 우리에게는 **마찰**이 필요하다. 거친 대지로 되돌아가자!

한마디로 말해서 수정체 같은 순수성으로 비유된 논리학은 우리들이 잘못 가지고 있는 선입견에 지나지 않음을 역설하는 비트겐슈타인은 우리들에게 새로운 방향전환을 요구한다. 비트겐슈타인이 언덕에 올라가 변하는 풍경을 보라든가, 미로와도 같은 도시에서 언어가 이끄는 실을 따라 낯선 여행자를 위해 표지판을 세우라는 식의 비유적 표현을 자주 사용하는 것도 바로 이 때문이라 할 수 있다. 영원의 지도는 이제 조망가능한 묘사를 통해 다양한 삶의 양식을 볼 수 있는 실험적인 지도로 바뀐 셈이다. 전기의 '실재' 개념은 이제 후기로 들어서면서 언어놀이, 삶의 양식, 봄의 방식 등으로 대체된다. 비트겐슈타인에게 있어서 명제, 추론, 진리, 경험 등과 같은 개념들에서 어떤 깊이와 본질, 혹은 질서를 찾으려는 노력은 말 그대로 헛수고에 지나지 않는다. 그것은 문법적 착각이다. 이런 이유에서 비트겐슈타인은 언어의 사용적 측면을 중시하며 다음과 같이 말한다. "하지만 '언어', '경험', '세계'라는 낱말들이 어떤 사용을 가지고 있다면, 그것은 '책상', '램프', '문'이란 낱말들처럼 낮은 사용을 가져야 한다."(*PI*, §97)

그렇다면 비트겐슈타인이 자신의 수학철학에서 증명의 조망가능성이란 개념을 사용한 이유는 어느 정도 밝혀진 셈이다. 전통적으로 수학은 물론 철학에서도 증명 개념은 가장 지적으로 세련된 개념들 중의 하나였다. 그럼에도 불구하고 비트겐슈타인이 증명을 일상적 개념으로 전환해 증명에 대한 생각을 조망가능성과 연결시킨 것은 증명에 대한 그의 독특한 사고방식의 전환, 즉 봄의 방식을 일깨우기 위한 생각에서 비롯된 것이다. 비트겐슈타인에게 있어서 증명은 조망가능한 묘사의 정점에 있는 것이다. 무엇인가를 증명한다는 것은 그것이

---

38) Genova (1995), 30쪽.

다른 것과 어떻게 연관되어 있는지를 보여주는 것이다. 증명은 이러한 연관의 기록이다. 수학적 증명들은 철학적 탐구의 '조망가능한 묘사'로서 이러한 묘사의 목표는 곧바로 이러한 연관들을 보는 것인 이해를 만들어내는 것이다. 비트겐슈타인이 자주 예로 사용하는 초보적 수준의 산수들의 경우에도 우리가 그러한 산수를 계산하고 그것의 결과를 정당화하는 데 있어서 맨 밑바닥을 건드릴 적에는 "단지 우리는 그렇게 한다"(*RFM*, Ⅱ §74)는 사실을 제외하고는 우리가 호소할 것이 아무 것도 없다는 점을 강조하는 것처럼, 비트겐슈타인은 조망과 관련된 봄의 방식에서도 정당화가 들어설 여지를 남기지 않는다. 봄의 방식은 어떤 궁극적 설명을 통해서 이루어지는 것이 아니기 때문이다.[39]

비트겐슈타인이 『탐구』 §122에서 "이해가 연관들을 보는 데서 존립하고 그런 까닭에 중간 고리들의 발견과 발명이 중요하다"고 한 고찰은 다양한 놀이들의 경우를 들면서 가족유사성을 설명하는 『탐구』 §66의 고찰에 대한 귀결로 볼 수 있으며, 여기서 특히 '보라', '생각하지 말고 보라!'는 구절에 강조하고 있음을 볼 수 있다. 여기서 비트겐슈타인을 단순히 상식이나 경험을 중시한 철학자로 평가하는 것은 커다란 오해이다. 그렇다고 그가 생각하는 것을 무작정 평가 절하한 것으로 생각하는 것도 올바른 평가가 아니다. 『논고』에서 깨달은 추상적 사고의 공허함의 공백을 봄의 방식으로 대체하려는 비트겐슈타인의 철학이 독특한 점이 바로 여기에 있다. 경험주의나 이성주의의 결정적 약점은 제3의 가능성에 대한 길을 열어두고 있지 못하는 데 있다. 비트겐슈타인이 후기에 직관, 규칙, 문법, 상상력, 느낌, 앎, 지향성, 믿음, 기대, 확실성... 등과 같은 개념들에 탐구한 것은 바로 우리들이 받아들일 수밖에 없는 '삶의 양식'이 고정된 삶의 세계가 아니라 언제나 변화라는 흐름과 맞닿아 있다는 것을 절감한 데서 비롯된 것이다. 비트겐슈타인에게 있어서 철학은 이론이 아니라, 다양한 삶의 흐름을 조망하는 실천적 행위, 활동이다. "당신은 언어의 실천을 주시해야 한다. 그러면 당신은 논리를 본다."(*OC*, §501)

결론적으로, 비트겐슈타인이 조망가능성에 주목한 주된 이유는 특정한 것들이 보이는 모습을 바꿈으로서 새로운 봄의 방식을 강조한 것으로 볼 수 있다. 이를테면 수학의 증명을 명제들의 연속으로서가 아니라 그림으로 보는 것이라든가, 수학의 공식을 명제가 아니라 규칙으로 보려는 그의 독특한 관점은 바로 연관들을 보는 것으로 이루어진 이해, 즉 모습의 변화로부터 귀결된 이해라고 할 수 있다. 수학 체계에 대한 비트겐슈타인의 저항은 진리를 중심적인 가치로 생각했던 기존의 문화적 담론 전반에 대한 저항이며, 인간과 세계의 전통적 구분을 삶의 양식이라는 기반에서 새로운 봄의 방식을 통한 실천으로 극복한 것으로 평가할 수 있다.[40]

---

39) 비트겐슈타인의 이러한 생각은 규칙따르기, 혹은 낱말의 사용 문제에 대해서도 마찬가지로 적용이 된다. "내가 보건대, 여기서 위험한 점은 정당화와 같은 것이 없고, 그래서 단지 우리는 그렇게 한다라고 말해야 하는 우리의 과정에 어떤 정당화를 부여하는 것이다."(*RFM*, Ⅱ §74) "정당화가 없이 하나의 낱말을 사용한다는 것은, 그것을 부당하게 사용한다는 것을 뜻하지 않는다."(*RFM*, Ⅴ §74)

40) 이 논문의 초고는 한국논리학회 2004년도 하계학술발표회(8월 26일)에서 발표되었다. 그간 많은 지적을 해주신 정인교 선생님과 유익한 논평을 통해 필자로 하여금 많은 것을 일깨워준 박정일 선생님에게도 감사를 드린다. 그리고 사소한 것까지 꼼꼼하게 읽고 심사를 해주신 두 분의 익명의 심사위원께도 감사를 드린다.

참고문헌

Barker (1964),『수리철학』, 이종권 옮김(1985), 종로서적.

Baker (1988), *Wittgenstein, Frege and the Vienna Circle,* Blackwell, Oxford.

Benacerraf (1982), *Philosophy of Mathematics,*『수학의 철학』, 박세희 옮김, 아카넷.

Dummett (1978), *Truth and Other Enigmas,* London, Duckworth.

Floyd (2000), "Wittgenstein, Mathematics and Philosophy", in *The New Wittgenstein,* edited Alice Crary and Rupert Read, Routledge, London and New York.

Frascolla (1994), "The Constructivist Model in Wittgenstein's Philosophy of Mathematics", in Shanker (1986), *Ludwig Wittgenstein Critical Assessments,* vol. 3.

Genova (1995), *Wittgenstein A Way of Seeing,* Routledge/New york & London.

Gerrard (1991), "Wittgenstein's Philosophy of Mathematics", *Synthese* 87, Kluwer Academic Publishers.

Hacker (1996), *Wittgenstein's Place in Twentieth-century Analytic Philosophy,* Blackwell, Oxford.

Klenk (1976), *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics,* The Hague.

Marion (1998), *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics,* Clarden Press, Oxford.

Monk (1990), *Ludwig Wittgenstein, The Duty of Genius,*『루드비히 비트겐슈타인, 천재의 의무』, 남기창 옮김, 문화과학사, 1998.

Shanker (1987), *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics,* Croom Helm, London.

Stillwell, 'Empirical Inquiry and Proof', in Detlefsen (1992), *Proof and Knowledge in Mathematics,* Routledge, London and New York.

Suter (1989), *Interpreting Wittgenstein,*『비트겐슈타인과 철학』, 남기창 옮김, 서광사, 1998.

Tiles (1989), *The Philosophy of Set Theory,* Basil Blackwell.

Wang (1991), "To and from Philosophy-Discussions with Gödel and Wittgenstein", *Synthese* vol. 88.

Wittgenstein (1961), *Tractatus Logico-Philosophicus* (*TLP*), tr, D. F. Pears and B. F. McGuinness, Routledge and Kegan Paul, London.

__________ (1967), *Remarks on the Foundations of Mathematics* (*RFM*), ed. G. H. von Wright, R. Rhees and G. E. M. Anscombe, Blackwell, Oxford.

__________ (1975), *Philosophical Remark* (*PR*)*,* ed. R. Rhees, tr. R. Hargreaves and R. White, Blackwell, Oxford.

__________ (1976), *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics* (*LFM*), ed. C. Diamond, Cambridge.

__________ (1958), *Philosophical Investigations* (*PI*)*,* G. E. M. Anscombe, Blackwell, Oxford.

__________ (1979), *Wittgenstein and the Vienna Circle* (*WVC*)*,* Blackwell, Oxford.

__________ (1969), *ON Certainty* (*OC*), ed. G. H. von Wright, G. E. M. Anscombe, tr. D. Paul and G. E. M. Anscombe, Blackwell, Oxford.

__________ (1980), *Culture and Value* (*CV*)*,* ed. G. H. von Wright, tr. P. Winch, Blackwell, Oxford.

__________ (1967), *Zettle* (*Z*), ed. G. H. von Wright, G. E. M. Anscombe, tr. G. E. M. Anscombe,

Blackwell, Oxford.
Wright (1980), *Wittgenstein on the Foundation of Mathematics.*
______ (2001), *Rails to Infinity,* Harvard University Press.
홍성기(2004),「데데킨트 절단, 배중률, 관계」,『논리연구』제7집 제2호.

The mathematical proof' surveyability

— With priority given to Wittgenstein's philosophy of mathematics —

Man-Yoep, Park

This paper is focused on the following aspects: With priority given to Wittgenstein's philosophy of mathematics, the concept of mathematical proof' surveyability is elucidated and it will be discussed how it is connected with his later philosophy. In order to this study, above all it will be needed that the problem of anti-Platonism and grammar is deeply investigated. According to Wittgenstein, logical inferring is just not the same sort of things as '*wff*'s proof.' Futhermore, he maintains that in order to function at all within a proof the symbols in logic and mathematics must have some meaning outside the axiomatic system. However, Wittgenstein insists that mathematics doesn't need any foundation. Because mathematical proof is above all human institutions, it must be able to convince us of what it is supposed to prove. Therefore mathematical proof must be surveyable. With respect to this, Dummett's suggestion which Wittgenstein is in the position of a full-blooded finitism is wrong. Finally, I will argue that the concept of surveyability is more extended in his later philosophy. In so doing, I will show that the concept of motley in mathematics is also applied in philosophy. Consequently, Wittgenstein's surveyability is closely related to the new way of seeing.

Key Words: Philosophy of mathematics, Proof, Anti-Platonism, Surveyability, Motley

박만엽 e-mail : smullyan@hanmail.net

논문접수	2005년 3월 16일
논문심사	2005년 4월 21일
심사완료	2005년 5월 6일