밀과 자연수 이론*

박준용**

주제분류 수학철학, 논리철학, 논리학

주 요 어 자연수, 셈, 부분전체론, 밀, 케슬러, 암스트롱

요 약 문

자연수에 대해 적합한 설명을 제시하려면 적어도 두 가지 일을 해명해야 한다. 첫째로 자연수에 관한 산수 이론이 어떻게 실행 가능한지 해명해 주어야 한다. 둘째로 보통의 대상들을 세는 데 자연수들을 어떻게 적용할 수 있게 되는지 해명해 주어야 한다. 이 글에서 나는 밀에게서 비롯된 자연수들에 대한 설명을 몇 가지 다룬다. 잘 알려진 것처럼 밀 자신의 자연수 설명은 프레게에게 혹독하게 비판받았지만, 여전히 몇몇 철학자들은 밀의 주요 생각은 부분전체론의 맥락 내에서 가치있게 발전될 수 있다고 믿는다. 나는 아래에서 두 논제를 보이려 한다. 첫째로 밀에게서 유래한 부분-전체에 관한 이론에 따를 때에는 앞에 언급한 두 종류의 설명을 동시에 제시하기 아주 어렵다는 것이다. 둘째로 부분전체론적 결합 개념에 의존하지 않는다면 부분전체론은 보통의 대상들을 세는 일을 해명하는 데 여전히 유익하다는 것이다.

* 이 연구는 충남대학교 학술연구비에 의해 지원되었음. 이 글이 개선되는 데 도움을 준 세 심사위원께 감사한다.

** 충남대학교 교수

1. 들어가는 말

우리가 마주치는 물리적 대상은 통상 여러 부분들로 구성된다. 우리는 부분들로 구성되어 있는 물리적 대상을 그런 부분들의 모임이라고 부를 수 있다. 어떤 물리적 대상이 그 자신 이외에 아무 다른 부분으로도 구성되어 있지 않을 경우, 우리는 그런 대상을 원자적 대상이라고 부를 수 있다. 이 경우 우리는 원자적 대상 역시 부분으로 구성되어 있다고 ― 즉, 그 자신만 부분으로 갖는 것으로 ― 간주할 수 있다. 그렇다면 우리는 모든 물리적 대상을 하나 이상의 부분으로 구성되어 있는 모임으로 간주할 수 있을 것이다.

밀은 자연수를 물리적 대상의 속성으로 간주하였다. 앞의 가정에 따라 우리는 밀이 말하는 바를 다음과 같이 바꾸어 표현할 수 있다: 자연수란 부분들의 모임으로서 물리적 대상이 갖는 속성이다. 예컨대, 우리가 "이 바구니에 사과가 다섯 개 들어있다"고 말할 때, 밀에 따르면 우리가 말하는 바는 그 바구니에 있는 사과들의 모임이 다섯이란 속성을 갖는다고 말하는 것이다. 마찬가지로 "그 선반 위에 세 권의 책이 놓여 있다"고 말할 때, 밀에 따르면 우리는 그 선반 위에 책들의 모임이 셋이라는 속성을 갖는다고 말하는 것이다.

이런 식의 자연수 설명에 대해 잘 알려진 프레게의 반론이 있다. 만약 수가 물리적 대상이 갖는 속성이라면, 같은 물리적 대상이 동시에 여러 수를 가져서는 안 될 것 같다. 왜냐하면 같은 물리적 대상은 언제나 같은 부류의 속성 중 한 속성만 갖는 것으로 여겨지기 때문이다. 예컨대 어떤 물리적 대상이 둥글다면 그것은 네모가 아니고, 어떤 물리적 대상이 빨갛다면 그것은 파랗지 않다. 그러나 같은 물리적 대상이라도 서로 다른 수를 가질 수 있는 것 같다. 예컨대 어떤 선반 위에 한 저자가 지

은 같은 책이 세 권 있다고 하자. 이 경우 우리는 “그 선반 위에 세 권의 책이 놓여 있다”고 말할 수도 있지만, “그 선반 위에 하나의 (같은) 책이 놓여 있다”고 말할 수 있다. 이 경우 선반 위에 놓인 그 대상은 세 개인가, 아니면 한 개인가?

프레게의 반론 이후, 수학에 관해 밀과 마찬가지로 경험주의를 유지하는 사람들도 밀의 자연수 이론을 직접 따르는 경우는 많지 않다. 많은 경험주의자들은 자연수 진술에서 자연수는 (프레게가 주장하듯) 속성이나 개념, 혹은 집합에 부여되는 추상 대상 혹은 속성으로 간주된다는 점을 부정하지 않는다. 다만 그들은 그런 추상 대상이나 속성의 인식이 경험적이라고 주장하든가, 아니면 그런 대상은 존재하지 않으므로 산수 이론은 유용한 허구에 불과하다고 주장한다.[1] 반면 밀처럼 자연수 진술이 경험적 현상이나 물리적 사실을 직접 표현한다는 주장을 여전히 옹호하려는 사람이 없는 것은 아니다. 그런 시도 중 주목할 만한 것은 두 가지이다. 하나는 키쳐의 경우처럼 자연수 연산이 물리적 사물을 모으거나 나누는 우리의 행동과 관련된다는 밀의 생각을 발전시키려는 시도이고,[2] 다른 하나는 케슬러의 경우처럼 자연수가 대상 부분들의 개수라는 밀의 생각을 부분-전체에 관한 이론의 맥락 내에서 발전시키려는 시도이다. 이 글에서 나의 관심은 후자에 있다.

케슬러는 프레게의 반론이 밀에게 치명적인 것은 아니라고 생각한다. 왜냐하면 그 반론이 말해주는 바는 물리적 대상이 속성에 따라 다른 수를 가질 수 있다는 데 지나지 않기 때문이라는 것이다. 예컨대 앞에 언급한 상황에서 “그 선반 위에 세 권의 책이 놓여 있다”는 말은 문제의 물리적 대상이 “복사본으로서 책”이라는 속성에 따라 수 3을 갖는다는 말이고, “그 선반 위에 하나의 같은 책이 있다”는 말은 그 대상이 “같은

1) 밀의 경험주의 수학철학과 후대의 경험주의 수학철학의 차이에 관해서는 Balaguer (2014), 89-99쪽 참조.

2) 이런 시도와 그 한계에 관해서는 Bostock(2009), 186-191쪽 참조.

저자가 쓴 같은 책"이라는 속성에 따라 수 1을 갖는다는 것이다. 케슬러는 이 생각을 구체화하여 밀 견해를 수정할 방안이 있다고 생각한다. 즉, 수를 물리적 대상이 직접 갖는 속성이 아니라, 물리적 대상이 특정 속성에 대해 갖는 관계로 간주하면 된다는 것이다.

케슬러의 견해는 사이먼즈의 비판을 받긴 했지만, 이후에도 적지 않은 사람들의 지지를 받고 있다. 암스트롱과 포레스트는 케슬러의 생각을 발전시켜 수가 물리적 대상의 구조적 속성과 단위속성 사이의 관계라는 견해를 제시하였고, 이후 그들의 견해는 이른바 경험주의적 실재론을 대표하는 자연수 이론으로 간주되곤 하였다.[3] 나는 이 글에서 케슬러의 이론도, 암스트롱 등의 이론도 사이먼즈가 제시한 반론을 극복하지 못한다는 것, 나아가서 결국 프레게가 처음에 제기한 반론 역시 극복하지 못한다는 것을 보이고자 한다.

나는 다음 순서로 논의를 진행한다. 2절에서는 먼저 부분관계에 관한 원리들을 바탕으로 밀의 자연수 이론을 재구성하고, 이 이론에 대한 프레게의 반론을 검토한다. 3절에서는 밀의 이론을 발전시키려 하는 케슬러의 전략을 살펴본다. 먼저 자연수가 모임과 개별화 속성 사이의 관계라는 그의 생각이 자연수의 정의에 어떻게 구체화되는지 검토한 후, 이에 대한 사이먼즈의 반론을 검토한다. 4절에서는 암스트롱이 포레스트와 함께 제시한 대안으로서 자연수를 모임이 갖는 구조적 속성과 단위속성 사이의 관계로 보는 관점을 살펴본다. 먼저 그들의 관점이 케슬러의 견해와 어떻게 다른지, 그들이 사이먼즈의 반론에 대해 어떻게 대응하는지 검토한 후, 그들의 관점이 갖는 한계를 지적한다. 마지막으로 5절에서는 자연수 진술에 대한 표준적 분석을 재고하고 이 분석을 케슬러-암스트롱의 분석과 비교한다. 이를 통해 나는 케슬러-암스트롱의 분석의 난점은 개수의 합을 부분들의 결합에 의존해서 설명하는 데 있으며, 그런 시도

3) Michell(2006), 61쪽, Irvine(2010), 241쪽 참조.

를 포기할 때 도리어 자연수의 적용을 더 낫게 설명할 수 있음을 보인다.

2. 밀의 자연수 이론

1) 부분관계

부분관계는 부분집합 관계와 달리 원초적인 관계이다. “x는 y의 부분집합이다”라는 것은 x의 원소는 다 y의 원소가 된다는 것이다. 반면 “x는 y의 부분이다”는 그것을 설명해 줄 다른 말이 존재하지 않는다. 하지만 우리는 부분관계를 아주 포괄적으로 사용한다. 우리는 사람의 팔이 몸의 부분이라고 하고, 언어의 낱말이 문장의 부분이라고 하고, 자동차 부품이 자동차의 부분이라고 한다. 이런 다양한 용례에 다 적절하게 적용될 수 있는 부분관계는 어떤 것인가? 앞으로 우리는 부분관계가 갖는 최소한의 특징으로서 두 원리에 의존할 것이고, “x는 y의 부분이다”는 바로 그런 최소한의 특징만 내용으로 갖는다고 가정할 것이다. (앞으로 이런 뜻의 부분관계를 “x ⊏ y”로 쓰자.) 첫째 원리는 밀의 원문에 등장하는 부분관계의 이행 원리이다.[4]

> 모든 x, y, z에 대해, x가 y의 부분이고, y가 z의 부분이면, x는 z의 부분이다.
> $\forall x \forall y \forall z[(x \sqsubset y \ \&\ y \sqsubset z) \rightarrow x \sqsubset z]$.

통상적으로 x가 y의 부분일 경우에는 y는 x의 부분이 아니라고 간주된다.[5] 이런 반대칭적 부분관계에 의거할 때, 어느 것도 그 자신의 부분

---

4) 자연수에 관한 밀의 견해가 가장 선명하게 드러나는 곳은 Mill(1882), 제3권 XXIV장 5절이다. 밀에 관한 나의 언급은 모두 그 절의 논의에 근거하고 있다.

일 수 없다. 하지만 고전적 부분-전체 이론에서는 이보다 좀 더 약한 부분관계를 사용한다. 우리는 반대칭 관계로 간주된 부분관계에 대해 앞으로 “x는 y의 진부분이다”라는 말을, 비대칭적 부분관계에 대해서는 “x는 y의 부분이다”라는 말을 사용할 것이다. 이 경우 고전적 이론에서는 다음 재귀원리를 공리로 삼는다.[6]

모든 x에 대해, x는 x의 부분이다.
$\forall x(x \subseteq x)$

아직 우리는 어떤 대상들이 부분이 될 수 있는지, 그리고 어떤 대상들이 부분을 갖는지 고려하지 않았다. 다시 말해 부분관계의 관계항들의 정의역에 관해 언급하지 않았다. 나는 아래 논의에서 원칙상 특정해서 지시할 수 있는 어느 대상이나 관계항에서 배제하지 않을 것이고, 관계항의 범위를 제한하는 어떤 주장에도 의존하지 않겠다. 그 이유는 어떤 대상들이 부분관계의 정의역에 속하는가 하는 문제는 그 자체로 논란거리이기도 하지만,[7] 부분관계를 이용해서 자연수를 설명하는 이론마다 서로 다른 견해를 취하곤 하기 때문이다. 나는 다만 이 글 전체에서 부분관계로 간주하는 데 거의 논란이 되지 않는 물리적 대상의 부분에 관해 논의를 한정하려 한다.

앞으로의 논의를 위해 어떤 대상의 부분들 사이의 관계에 관해 몇 가지 언급할 필요가 있다. 어떤 대상 x의 두 부분 y와 z는 공통부분을 가질 수도 있고, 그렇지 않을 수도 있다. 우리는 공통부분을 갖지 않는 y와

5) 유클리드 기하학의 “전체는 부분보다 더 크다”(The whole is greater than the part)는 공리는 바로 이런 뜻의 부분관계를 전제한다.

6) 여기서 고전적 이론이란 레스니예프스키 및 굳맨에게서 유래하는 부분-전체 이론을 말한다. 이 이론의 특징과 문제에 관해서는 Simons(2006), 1-2절; Varzi(2016), 1-2절 참조.

7) Simons(2006), 2절; Varzi(2016), 2절 참조.

z를 서로소인 x의 부분이라고 부를 것이다. 그러므로 대상 x의 두 부분 y와 z의 관계는 다음 셋 중 하나이다. (1) 하나가 다른 하나의 부분인 경우, (2) 공통부분은 갖지만 어느 것도 다른 것의 부분은 아닌 경우, 그리고 (3) 서로소인 경우. w가 y와 z의 공통부분이면, w는 집합과 비교하면 교집합과 유사하다. 그러나 부분들 사이의 관계를 언제나 집합들 사이의 관계에 비유할 수 있는 것은 아님을 주목해야 한다. 왜냐하면 두 집합이 서로소라면 그 교집합은 공집합이지만, y와 z가 서로소인 부분이라면, y와 z의 공통부분은 (빈 부분이 아니라) 아예 존재하지 않는다.

앞으로의 논의를 위해 서로 부분관계에 있는 대상들 사이의 관계에 관해 언급할 중요한 사항이 있다. 어떤 대상 x의 부분들 중에는 x가 되기에 필요하고도 충분한 부분 쌍들이 존재할 수 있다. 예컨대 내 앞에 놓인 책상은 한 개의 상판과 네 개의 다리로 구성되어 있다. 그러면 우리는 네 개의 다리와 상판의 (어떤 식의) 결합은 다음의 뜻에서 그 책상을 이루기에 충분하다고 생각할 수 있다:[8] "그 책상의 모든 부분은 그 네 개의 다리의 부분이거나, 아니면 그 상판의 부분이다." 이런 뜻의 "y와 z의 결합이다"라는 말을 "y ⊕ z"로 표현할 할 때, 우리는 그런 결합을 다음과 같이 정의한다.

$$\forall x \forall y \forall z \{x = y \oplus z \leftrightarrow \forall w[w \Subset x \rightarrow (w \Subset y \vee w \Subset z)]\}.$$

부분의 결합과 관련해서 오해해서는 안 될 사실이 있다. 첫째로 x가 y와 z의 결합일 경우, y와 z는 서로소일 수도 있지만 그렇지 않을 수도 있다. 앞의 정의는 y와 z가 결합하는 것으로 x가 되기에 충분하다는 것,

8) 물론 우리는 이 때 여러 가정을 해야 한다. 다리와 상판을 연결하는 나사들을 다리의 일부, 혹은 상판의 일부로 간주해야 할 것이다. 그리고 "결합"이나 "이룬다"는 말은 직접적인 물리적 작용을 나타내는 것이 아니라, 단지 정의된 뜻의 상황을 표현하기 위한 수사적 표현일 뿐이라고 간주해야 할 것이다.

그리고 x는 y와 z의 결합에 지나지 않는다는 것만 말할 뿐이다. 그러므로 그 경우에도 y와 z는 공통부분을 가질 수도 있고, 심지어 어느 것이 다른 것의 부분일 수도 있다. (예컨대 z가 y의 어떤 진부분이고, y가 x 자신일 때, z는 x의 부분이다.)[9] 많은 논자들은 (1) 임의의 두 대상 x, y가 존재할 경우, x와 y의 결합은 유일하다고 생각하며, (2) 어떤 논자들은 임의의 어떤 두 대상에 대해서나, 그런 결합이 존재한다고 주장한다. (1)은 결합의 유일성 주장, (2)는 결합의 보편성 주장에 해당한다. 이 글에서 다루는 이론은 모두 결합의 유일성 주장을 전제하므로, 나도 그 주장을 문제삼지는 않을 것이다. 하지만 나의 이후 논의는 (2)의 주장에 의존하지 않을 것이다.[10]

2) 부분관계와 자연수

자연수에 관한 밀의 생각을 어떻게 구체화할 수 있는가? 자연수를 대상이 갖는 부분들의 개수로 간주하는 것이다. 우리 앞에 조약돌의 무더기가 있다고 하자. 조약돌들은 크기가 균일해서 각각이 조약돌인지 아닌지 인식하기에 문제가 없다고 하자. 이 경우 우리는 조약돌이 몇 개 있는지 어렵지 않게 결정할 수 있을 것이다. 예컨대 10개의 조약돌이 있다고 하자. 여기서 10은 무엇이 갖는 수인가? 밀에 따르면 조약돌들로 이루어진 무더기 혹은 모임 전체가 갖는다는 것이다.[11] 그런데 이 모임 전체는 하나의 대상으로 간주할 수 있고, 그것은 조약돌들을 부분으로 갖는다고 간주할 수 있다. 이런 뜻에서 자연수 10은 조약돌들의 개수, 즉

9) 두 부분의 결합을 합집합과 비교해 보는 일이 도움이 될 것이다. A가 B의 부분집합일 때 A와 B의 합집합은 A와 같다. 마찬가지로 y가 z의 부분일 때, y와 z의 결합은 y와 같다.

10) Simons(2006), 2-4절 참조.

11) 여기서 ‘모임’이란 말을 영어의 ‘aggregates’를 번역한 것이지, 흔히 ‘집합’으로도 이해되는 ‘collections’를 번역한 것이 아니다. 이 글에서는 부분들의 전체로서 모임을 집합과 혼동하지 않는 것이 매우 중요하다.

우리 앞에 있는 조약돌 모임의 부분들의 개수에 해당한다고 할 수 있다. 그러므로 밀은 자연수를 부분들로 이루어진 모임의 속성이라고 간주하는 셈이다.

똑같은 자연수가 서로 다른 모임의 부분들의 개수가 될 수 있다. 10은 열 개의 사과의 모임, 열 개의 조약돌 모임, 열 명의 사람 모임 모두에 부여될 수 있다. 이런 모임들은 모두 열 개의 부분들을 가지고 있다. 이런 뜻에서 특정한 자연수는 무수히 많은 모임이 공유하는 속성으로 간주할 수 있다. 2는 두 개의 부분으로 이루어진 모든 모임들이 공유하는 속성이고, 3은 세 개의 부분으로 이루어진 모든 모임들이 공유하는 속성이고, . . . 10은 열 개의 부분들로 이루어진 모든 모임들이 공유하는 속성이다. 그러면 우리는 임의의 자연수 n은 n개의 부분으로 이루어진 모든 모임이 공유하는 속성으로 간주할 수 있다.

> (*) $\forall x[n(x) \leftrightarrow$ x는 (부분들의) 모임이고, x는 n개의 부분으로 구성되어 있다.]

이것은 아직 자연수에 대한 설명으로 간주할 수는 없다. 왜냐하면 앞에서는 “모임 x가 자연수 n을 갖는다”는 말을 부분관계에 의해 재규정한데 지나지 않기 때문이다. 자연수에 대한 적절한 설명에 도달하려면, 임의의 자연수 n에 대해 n이 무슨 뜻인지 설명해 주어야 한다. 다시 말해, 0이 무엇인지, 1이 무엇인지, 2가 무엇인지, . . 설명해 주어야 한다. 우리는 수의 합에 대한 밀의 설명에서 그 실마리를 찾을 수 있다. 10개의 조약돌 모임이 주어져 있을 때, 우리는 그 모임을 예컨대 7개의 조약돌 모임과 3개의 조약돌 모임 두 부분의 결합으로 간주할 수 있다. 그런데 다음의 수식을 생각해 보면 우리는 그 모임을 두 부분으로 나누는 방식이 여럿 있음을 알 수 있다.

$$10 = 9 + 1,\ 10 = 8 + 2,\ .\ .\ .\ .\ ,\ 10 = 5 + 5$$

주의할 점은 이 수식에서는 부분들의 모임이나 결합에 관해 아무 언급도 하지 않는다는 것이다. 수식은 단지 수들 사이의 관계를 언급할 뿐이다. 그런데 밀처럼 자연수를 모임 부분들의 개수로 이해할 때, 예컨대 "10 = 7 + 3"이란 수식은 무엇을 말하는 것인가? 우리는 앞의 규정 (*)로부터 어느 수에 관한 말이든, 모임과 그 부분의 관계에 관한 말로 바꾸어 쓸 수 있어야 함을 알 수 있다. 그러므로 "10 = 7 + 3"이란 수식에서 "10", "7", "3"은 각각 이런 식으로 고쳐쓸 수 있어야 한다. 예컨대 "x가 자연수 10을 갖는다"는 것은 "모임 x가 10개의 부분을 갖는다"는 말이다. 그러나 이런 식으로 수식을 고쳐쓰려 할 때, 우리는 두 가지 문제에 봉착하게 된다. 첫째로 수식에 있는 연산기호 "+"는 모임과 그 부분 사이의 관계와 관련해서 무엇을 말하는 것인가? 둘째로 등호 "="는 모임과 그 부분 사이의 관계와 관련해서 무엇을 의미하는가?

잠시 조약돌 모임에 논의를 한정하자. 앞에서 우리는 10개의 조약돌 모임을 7개의 조약돌 모임과 3개의 조약돌 모임 두 부분의 결합으로 간주할 수 있다고 언급하였다. 여기서 "10개의 조약돌 모임"은 특정한 대상으로서 모임인 반면, 앞의 설명에 따를 때 10 자체는 특정한 대상이 아니라 여러 모임이 공유하는 속성이다. 다시 말해 "10 = 7 + 3"에는 모임도 그 부분도 언급되지 않으므로, "10"은 모임 자체가 아니라 무수히 많은 모임이 공유하는 속성이다. 모임은 대상이고, 우리는 어떤 대상이 어떤 대상과 같은지 다른지 말할 수 있다. 반면 속성은 언제나 대상이 갖는 것이므로, 대상과 무관하게 속성만 고려해서 같다 다르다고 말할 수가 없다. 그러므로 우리는 등호 "="를 필요충분조건에 대한 기호 "↔"로 교체해야 한다. 그렇다면 수식 "10 = 7 + 3"의 등호 왼편과 등호는 다음 방식으로 고쳐써야 한다.

모든 모임 x에 대해, (x가 10개의 부분으로 구성되어 있다 ↔ 어떤 y, z에 대해, ... y는 7개의 부분으로 구성되어 있고, z는 3개의 부분으로 구성되어 있다.)

이제 남는 것은 “10 = 7 + 3”의 연산기호 “+”를 무엇으로 이해해야 하는가 하는 것이다. 밀이 10개의 조약돌 모임 x를 7개의 조약돌 모임 y와 3개의 조약돌 모임 z로 나눌 수 있다고 말할 때는 분명히 y와 z의 결합에 의해 그리고 그런 결합만으로 x가 형성되기에 충분하다고 상정하고 있다. 그렇다면 앞의 오른편 남은 빈자리에는 “모임 x가 y와 z의 그 결합”이라는 말이 들어가야 할 것이다. 그러므로 우리는 밀에게 수식 “10 = 7 + 3”은 다음을 의미한다고 간주할 수 있다.

모든 모임 x에 대해, (x가 10개의 부분으로 구성되어 있다 ↔ 어떤 y, z에 대해, x는 두 부분 y와 z의 그 결합이고, y는 7개의 부분으로 구성되어 있고, z는 3개의 부분으로 구성되어 있다.)
$\forall x[10(x) \leftrightarrow \exists y \exists z(x = y \oplus z \ \& \ 7(y) \ \& \ 3(z))]$

앞에서 본대로 조약돌 10개의 모임을 두 부분으로 나누는 방식은 다양하다. 그런데 이런 다양한 방식들 사이에는 서로 어떤 관계에 있을까? 밀이 “7 = 5 + 2”을 어떻게 증명하는지 생각해 보면 우리는 쉽게 그런 관계를 이해할 수 있다. 우선 이 수식은 밀에게는 다음을 의미한다는 것을 잊지 말아야 한다.

$\forall x[7(x) \leftrightarrow \exists y \exists z(x = y \oplus z \ \& \ 5(y) \ \& \ 2(z))]$

밀은 이 진술을 산수의 공리와 각 자연수의 정의에 의해 증명할 수 있다고 생각한다. 각 자연수는 다음과 같이 정의된다: 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, . . . , 7 = 6 + 1, ... 이 정의는 각 자연수를 그것보다 하나 더 적은

자연수에 의해 설명하는 것이다. 만약 1의 정의가 주어져 있고, 하나 더 많다는 것을 말하는 "+ 1"의 의미를 설명할 수 있다면, 각 자연수에 대한 설명에 이를 수 있을 것이다. 물론 이 경우에도 "+"나 "="는 앞에 설명한 방식으로 이해되어야 한다. 그러므로 우리는 밀의 정의를 아래와 같이 바꾸어 쓸 수 있을 것이다.

$$\forall x[2(x) \leftrightarrow \exists y \exists z(x = y \oplus z \ \& \ 1(y) \ \& \ 1(z))]$$
$$\forall x[3(x) \leftrightarrow \exists y \exists z(x = y \oplus z \ \& \ 2(y) \ \& \ 1(z))]$$
$$\cdots$$
$$\forall x[7(x) \leftrightarrow \exists y \exists z(x = y \oplus z \ \& \ 6(y) \ \& \ 1(z))]$$

그러면 우리는 임의의 자연수 n에 대한 정의가 주어졌을 때, 그 보다 하나 더 많은 자연수 $n + 1$을 정의하는 방식을 일반적으로 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\forall x[n + 1(x) \leftrightarrow \exists y \exists z(x = y \oplus z \ \& \ n(y) \ \& \ 1(z))]$$

우리는 "7 = 5 + 2"에 대한 밀의 증명을 다음과 같이 재구성할 수 있다.[12] 7의 정의에 따라, 7 = 6 + 1. 이제 6의 정의에 따라, 수식의 오른편을 바꾸면, 7 = (5 + 1) + 1. 결합법칙을 이용하면, 7 = 5 + (1 + 1). 이제 2의 정의에 따라, 수식의 오른편을 바꾸면, 우리는 증명하고 하던 식에 도달한다: 7 = 5 + 2. 이 증명에서 우리는 두 사실에 주목할 필요가 있다.

첫째로 밀에게 이 수식의 증명은 단지 특정수, 7, 5 및 2 사이의 관계

12) 밀이 실제 증명하는 수식은 "5+2=7"이고, 그의 증명은 다음과 같다: "5+1=6, 그러므로 5+1+1=6+1=7; 그리고 다시 2=1+1이므로, 5+2=5+1+1=7." (Mill[1882], 753). 프레게가 지적한 것처럼, 이 증명은 결합법칙을 고려하지 않으므로 불완전하다. Frege(1884), 9절.

에 관한 증명에 불과한 것이 아니라는 점이다. 앞에서 언급한 것처럼 7개, 5개 및 2개의 부분들로 이루어진 모든 모임들에 관한 보편적인 사실의 증명으로 간주되어야 한다. 또한 수식의 증명에 사용되는 자연수 2, 6, 및 7의 정의 역시 2개, 6개 및 7개의 부분들로 이루어진 모든 모임들에 관한 보편적인 사실로 간주되어야 한다. 이는 밀이 등식의 법칙 같은 산수법칙만 아니라, 개개의 수들에 관한 말하는 진술 역시 일종의 보편적 사실을 표현하는 것으로 간주한다는 것을 말해준다. 이런 뜻에서 밀은 자연수에 관한 진리는 부분-전체의 관계에 있는 모든 자연현상에 대해 보편적으로 성립하는 사실로 간주하는 셈이다.

둘째로 증명된 수식 “7 = 5 + 2”는 7개의 부분들로 이루어진 모임을 나누는 한 가지 방식을 표현해 준다. 반면 그 모임은 예컨대 “7 = 4 + 3”이 표현하는 방식으로도 나눌 수 있다. 그런데 이 수식들 역시 “7 = 5 + 2”처럼 증명하는 일은 어렵지 않다. 그리고 그런 증명에는 산수법칙 이외에는 모두 각 자연수의 정의에 의존한다. 그런데 예컨대 7에 대한 정의 “7 = 6 + 1”은 바로 7개의 부분들로 이루어진 모임을 나누는 한 가지 방식이다. 그러므로 우리는 수식의 증명은 일반적으로 *n*개의 부분들로 이루어진 모임을 나누는 다양한 방식들을 산수법칙을 이용해서 한 가지 종류의 방식으로 환원하는 것으로 이해할 수 있다. 즉, 그것은 임의의 자연수 *n* + 1개의 부분들로 이루어진 모임을 *n*개의 부분들의 모임과 1개의 부분으로 나누는 그 방식으로 환원하는 것이다. 밀이 개개의 수를 모임을 나누는 특정한 방식과 동일시하는 이유는 바로 이런 환원가능성 때문이다.

이 두 사실을 고려할 때 밀의 자연수 이론에서는 1에 대한 설명이 필수적이다. 왜냐하면 수식이 표현하는 사실은 모두 자연수 정의로 환원되고, 자연수 정의는 궁극적으로 1의 정의에 의존하기 때문이다. 그런데 “모임 x가 1개의 부분으로 이루어져 있다”는 것을 무엇을 의미하는가? 통상적인 “모임”이라는 말은 이미 두 개 이상의 부분을 상정하는 것으로

보인다. 그런데 우리는 앞에서 어느 대상이나 그 자신의 부분이라고 가정했다. 그러므로 우리는 1을 각 대상이 그 자신에 대해 갖는 부분관계로 간주할 수 있지 않을까?[13)]

$\forall x(1(x) \leftrightarrow$ x는 x의 부분이다)

3) 부분과 종류

프레게는 자연수가 부분들의 모임이 갖는 속성이라는 밀의 견해를 다음과 같이 비판한다.

> 성질로서 수는 무엇에 귀속되는가 하는 물음에 대해 밀은 다음과 같이 대답한다. "수의 이름은 사물의 모임에 속하는 성질을 내포하며, . . . 그 성질은 그 모임이 부분들로 구성되거나 부분들로 나누어질 수 있는 그 특징적 방식이다." 여기서 우선 '그 특징적 방식'이란 표현에 있는 정관사는 잘못된 것이다. 왜냐하면 모임을 나눌 수 있는 방식은 아주 여러 가지이며, 우리는 하나의 방식만이 특징적이라고 말할 수 없기 때문이다. 예를 들어 우리는 짚 한 단을, 짚을 모두 반으로 잘라 나눌 수도 있고, 묶음을 풀어놓아 개개의 짚으로 나눌 수도 있으며, 두 단으로 나눌 수도 있다. 더구나 100개의 모래알이 모래 더미를 이루고 있는 방식은 100개의 짚이 짚 한 단을 이루고 있는 방식과 같기나 한가? 그렇지만 이 경우에도 우리는 같은 수를 갖는다. 그리고 '한 개의 짚'이란 표현에서 '한 개의'라는 수 표현은 이 짚이 세포나 분자로 이루어진 방식을 표현해주지 못한다. 수 0은 더 많은 난점을 일으킨다. 게다가 짚을 세기 위해서는 하나의 묶음으로 만들어야 하는가? '독일에 있는 시각 장애인의 수'라는 표현이 뜻을 지니려면, 우리는 독일에 있는 시각 장애인들을 모두 모으는 집회를 열어야 하는가? (Frege[1884], 23절.)

---

13) 사실 이 경우에도 영에 대한 설명은 빠져 있다. 아마 밀의 경우 영을 자연수로 간주하지 않고 정수 전체를 형성하려 할 때 필요한 속성으로 간주거나, 아니면 암스트롱처럼 일종의 부정적 속성으로 간주할 수 있을 것이다. Armstong(1978), 73-74쪽 참조.

우리는 프레게의 비판을 크게 두 가지로 나눌 수 있다. 첫째로 모임을 부분으로 나누는 (혹은 모임이 부분으로 구성되는) 방식이 모임마다 고유한 것은 아니라는 것이다. 둘째로 부분들이 모여 전체 모임이 되기 위한 결합관계가 정확히 무엇인지 모호하다는 것이다. 우리는 이미 밀이 둘째 반론에 대해 어떻게 대응할 수 있는지를 앞에서 보았다. 왜냐하면 부분 관계를 이행, 재귀 및 비대칭 관계로 보는 관점에서 보면, 부분이 결합하여 전체를 이루는 방식은 아주 약한 조건을 만족하는 것으로 충분하기 때문이다. 우리는 동시에 존재하는 어느 (물리적) 대상들이든 하나의 모임을 형성하는 것으로 간주할 수 있다.[14)]

첫째 비판을 보자. 우리는 모임을 나누는 방식을 두 종류로 분류할 수 있다. 짚 한 단을 두 묶음으로 나누거나 개개의 짚으로 나누는 일은 애초의 모임을 짚으로 나눈다는 점에서 다르지 않다. 반면 그 모임을 반으로 잘라 나누는 일이나, 짚을 구성하는 세포나 분자로 나누는 일은 더 이상 원래 모임의 짚으로 나누지 않는다는 점에서 앞의 경우와 다르다. 첫 번째 경우 우리는 밀이 어떤 식으로 대응하는지 앞에서 보았다. 그가 자연수 각각에 부여하는 특징적 방식은 예컨대 500개의 짚으로 이루어진 모임을 300개의 짚과 200개의 짚으로 나누는 방식을 말하지 않는다. 그런 방식으로 나누는 방식이 다양하다는 것은 밀도 알고 있었다. 반면 그렇게 나누는 방식 중에서 밀은 499개의 짚과 1개의 짚으로 나누는 그 방식을 바로 500을 특징짓는 그 방식이라고 말하는 것이다. 그런데 우리가 본대로 500개의 짚의 모임을 나누는 어느 방식이든 자연수 각각의 정의를 이용할 때 결국 바로 그 특징적 방식으로 환원할 수 있다.

---

14) 우리는 앞에서 결합연산를 2항연산으로 간주하였으나, 같은 연산의 반복을 통해 여러 부분들이 하나의 모임을 형성하는 방안을 제시할 수 있다. 예컨대 A, B, C 세 대상이 형성하는 모임은 “A ⊕ (B ⊕ C)”로 표현할 수 있다. Simons(1987), 1장 1절의 “기본 개념” 부분 참조. 이는 공간적으로 떨어져 있어 분산되어 있는 대상들도 원리상 하나의 모임을 이룰 수 있는 것으로 생각할 수 있음을 말한다.

그러면 남는 문제는 둘째 경우이다. 500개의 짚으로 이루어진 모임을 반절로 잘라 나누거나 분자나 세포로 나누는 일은 그 모임이 갖는 부분들의 개수에 어떤 영향을 주는가? 이 경우 문제는 첫 번째의 그 특징적 방식으로 환원할 수 없다는 데 있다. 500개의 짚으로 이루어진 그 모임의 특징적 방식을 499개의 짚과 1개의 짚으로 나는 것으로 간주하는 이유는 바로 1과 후자연산 +1을 이용해서 그 모임을 500개의 낱낱의 짚들의 모임으로 간주하려 하기 때문이다. 그러나 이런 환원은 우리가 애초에 그 모임을 파악했던 방식, 즉 그 모임을 짚들의 모임으로 간주했던 그 방식 하에서만 가능하다. 그런데 이제 그 모임을 반절로 나누게 되면, 나누어진 각 부분은 여전히 짚이긴 하지만, 그것은 원래의 각 짚과는 다른 짚 − 즉 각 짚을 반으로 나눈 그 짚 − 이다. 그러므로 우리가 세어야 할 부분들은 원래 모임의 경우와 다른 대상들이고, 새로운 짚 각각을 규정하려면, ‘원래 짚을 반으로 나눈 짚’이란 말로 표현해야 한다. 이런 새 짚들의 모임을 더 이상 500개의 짚으로 이루어진 모임이 아니라 1000개의 짚으로 이루어진 모임이고, 이 모임은 결코 전자의 그 특징적 방식으로 환원될 수 없다.

짚의 모임을 분자나 세포로 나눌 경우 이런 환원불가능성이 더 선명하게 드러난다. 원래의 짚의 모임은 수많은 분자로 이루어져 있고, 그런 모임을 나누는 방식 또한 무수히 많다. 그런데 이런 무수히 많은 방식들은 원래 모임을 분자들로 나누는 방식이지 짚들로 나누는 방식이 아니다. 그러므로 이 경우 우리는 그런 방식들을 결코 원래의 그 특징적 방식으로 환원할 수 없다. 그러나 중요한 점은 밀의 경우 애초의 500개의 짚의 모임, 그것을 절반으로 나눌 때 생기는 1000개의 짚의 모임, 그리고 짚을 구성하는 분자들 전체의 모임은 모두 같은 모임으로 간주한다는 것이다.[15) 분자들의 개수를 결정하는 일이 어렵긴 하겠지만 원리상 불가능하

15) 밀은 부분관계의 이행성을 받아들인다는 점을 주목할 것. 원래의 모임 x는 500개의 짚 y들로 구성되어 있고, 그 각각의 짚 y는 그것을 반으로 나눈 두 짚 z로

지는 않을 것이고, 어떤 특정 자연수 m일 것이다. 그러면 우리는 밀의 방법에 따라 세 경우에 각각 고유한 특징적 방식으로 환원할 수 있을 것이다. 하지만 이미 똑같은 모임에 서로 다른 세 특징적 방식이 존재하고, 각 특징적 방식마다 다른 수 500, 1000, 그리고 m이 부여된다. 왜 같은 모임이 서로 다른 세 특징적 방식을 갖는가? 이에 대해서는 더 이상 밀의 방법에 따라 대답할 수 없는 것으로 보인다.

아마 이런 반론에 대해 같은 모임이 서로 다른 자연수를 갖지 말아야 할 이유가 없다고 대꾸할지 모른다. 말하자면 500개의 짚의 모임은 적어도 그것을 구성하는 분자의 개수만큼 많은 서로 다른 자연수를 가질 수 있음을 받아들이자는 것이다. 예컨대 짚이 갖는 모양과 색깔을 짚을 이루는 분자가 가질 필요는 없는 것처럼, 짚의 묶음이 갖는 성질로서 500을 분자의 모임이 가질 필요는 없다는 것이다. 이처럼 같은 대상이 다양한 수를 갖는다고 해서 무슨 문제가 되는가?[16] 그러나 이런 대꾸가 설득력이 없음은 어렵지 않게 알 수 있다. 임의의 자연수와 그 후자와의 관계에 관한 밀의 정의에 따르면, 3의 정의는 다음과 같다:

$$\forall x[3(x) \leftrightarrow \exists y \exists z(x = y \oplus z \ \&\ 2(y) \ \&\ 1(z))]$$

논의를 위해, 어떤 바구니에 세 개의 사과가 있다고 하자. 그 바구니의 사과들의 모임을 a라고 하고, a를 두 개의 사과로 이루어진 모임 b와 1

구성되어 있다. 그리고 각각의 짚 y는 수많은 분자 w로 이루어져 있다. 부분 관계의 이행성을 받아들이면, 같은 x가 z들로도, w들로도 구성되어 있다고 해야 한다.

16) 암스트롱은 프레게의 반론이 같은 종류의 부분들을 다양하게 조합할 수 있다는 혹은 같은 대상을 같은 종류의 부분들로 다양하게 나눌 수 있다는 사실만 문제 삼는 것으로 오해한다. Armstrong(1978), 71-72쪽. 어바인은 프레게 반론이 수의 추상성을 드러내는 데만 목적이 있는 것처럼 폄하하지만, 그 반론의 설득력은 수의 추상성 여부와는 무관하다. 수의 물리적 적용 문제에만 한정하더라도, 그 반론은 유효하다. Irvine(2010), 2절 참조.

개의 사과 c로 나누는 방식을 고려하자. 그러므로, 3의 정의의 사례로서 다음 문장이 성립해야 한다:

$$3(a) \leftrightarrow (a = b \oplus c \;\&\; 2(b) \;\&\; 1(c))$$

이 문장은 참인가? b와 c는 사과들로 구성되어 있기도 하지만, 분자들로 구성되어 있기도 하다. 잠시 b의 분자 수를 n, c의 분자 수를 m이라고 하자. 가정에 따라 앞의 문장의 왼편 $3(a)$이 참임을 받아들인다고 하자. 그 경우 우리는 $2(b)$와 $1(c)$도 참이라고 받아들여야 하는가? 하지만 우리가 본대로 $2(b)$와 $1(c)$가 동시에 참인 그 만큼 다음 세 경우 모두 참이어야 한다.

(1) $m(b) \;\&\; 1(c)$.
(2) $2(b) \;\&\; n(c)$.
(3) $m(b) \;\&\; n(c)$.

그런데 "$2(b) \;\&\; 1(c)$" 대신 이 세 경우 어느 것을 집어넣든 앞의 문장은 성립하지 않는다. 그러나 (1)-(3) 중 어느 것을 "$2(b) \;\&\; 1(c)$" 대신 집어넣지 말아야 할 이유가 있는가? 달리 말해 왜 b가 갖는 수를 m으로 간주하는 대신 2로 간주해야 하고, 왜 c가 갖는 수를 n으로 간주하는 대신 1로 간주해야 하는가? 이 경우 a를 분자들의 결합이 아니라, 사과들의 결합으로 간주하기 때문이라는 것 이외에 적절한 답이 있을지 의문이다. 그러나 이것은 사과들의 결합으로서 a와 분자들의 결합으로서 a를 실제와는 달리 다른 대상으로 간주하는 것과 다를 바 없다. 나아가 그 경우에도 앞의 3의 정의는 참일 수 없다. 왜냐하면 그 정의는 임의의 특정한 두 대상의 결합인 모든 대상에 대해 언급하기 있기 때문이다.

여기서 우리는 딜레마에 빠지는 것 같다. 첫째로, b가 두 자연수 2와

m을 모두 실제로 갖는 것으로 간주할 경우, 우리는 밀의 주장과 반대로 그의 자연수 정의가 사실이 아님을 받아들여야 한다.17) 둘째로, b는 우리가 어떤 종류의 사물의 모임으로 간주하는지에 따라 자연수 2를 가질 수도 있고 m을 가질 수도 있음을 받아들이는 것이다. 그러나 이 경우에는 더 이상 자연수는 모임이 직접 갖는 속성이 아니라, 그 모임이 어떤 **종류의** 부분들을 갖는지에 따라 달리 갖는 것으로 간주해야 한다. 그러므로 프레게는 다음과 같이 말한다:

> 내가 어떤 사람에게 돌을 주면서 "이것의 무게를 알아보라"라고 한다면, 나는 그가 조사해야 할 대상을 전부 제시한 것이다. 그러나 내가 그에게 카드 한 뭉치를 쥐어주면서 "이것의 개수를 알아보라"고 말한다면, 그 사람은 내가 카드 낱장의 수를 알고자 하는지, 아니면 몇 벌의 카드가 있는지를 알고자 하는지, 아니면 카드놀이의 점수를 알고자 하는지 파악할 수 없다. 카드 뭉치를 그 사람 손에 쥐어 준 것은 그가 탐구해야 할 대상을 아직 완전하게 제시한 것이 아니다. 나는 카드, 벌, 점수 등의 말을 덧붙여야 한다. (Frege[1884], 22절)

3. 케슬러의 관계적 자연수

1) 케슬러의 자연수 정의

케슬러는 프레게의 반론을 진지하게 받아들인다.18) 그는 같은 물리적 사물이라 해도 어떤 속성이 고려되는지에 따라 여러 수를 가질 수 있음을 인정한다. 반면 그는 이것을 인정한다 해도 밀의 자연수 이론은 여전

17) 밀은 그의 정의를 모든 모임의 부분들 일반에 관한 사실을 표현하는 것으로 간주했음을 기억할 필요가 있다. Mill(1882), 749쪽 참조.

18) Kessler(1980), 69쪽. 케슬러에 관한 이 절의 논의는 해당 논문의 65-74면의 논의에 근거한다.

히 유지될 수 있다고 생각한다. 왜냐하면 우리는 수를 물리적 사물이 직접 갖는 속성이 아니라, 어떤 속성과 관련해서 갖는 속성으로 간주할 수 있기 때문이다. 이에 그는 수를 물리적 사물이 그 사물 부분들이 갖는 속성에 대해 갖는 관계로 간주하자고 제안한다. 예컨대 “이 바구니에는 세 개의 사과가 있다”는 말을 이 바구니에 있는 사과들의 모임이 ‘사과’라는 속성에 대해 ‘세 개’라는 관계를 갖는 것으로 간주하자는 것이다. 일반적으로 말하면, “F인 것들이 *n*개 있다”는 형식의 진술을 관련된 대상이 *a*이고, 속성이 S일 경우, “*a*는 S에 대해 *n*의 관계를 갖는다”는 진술로 이해하자는 것이다.

케슬러는 이 경우 밀이 처했던 여러 난점을 해결할 수 있다고 믿는다. 먼저 수 0을 설명할 방안을 얻을 수 있다. 모든 물리적 대상은 적어도 한 개 이상의 부분은 가지므로, 어떤 물리적 대상도 0을 속성으로 가질 수는 없다. 반면 수 0이 물리적 대상이 직접 갖는 속성이 아니라, 어떤 속성 S에 대해 갖는 관계라면, 우리는 S를 갖지 않는 어느 물리적 대상에 대해서나 0을 부여할 수 있을 것 같다. 예컨대 과일이 담긴 어떤 바구니 안에 배만 있고 사과는 없다고 하자. 이 때 우리는 “이 바구니에 사과는 존재하지 않는다”는 말을 그 바구니 안의 과일 모임이 ‘사과’라는 속성에 대해 0의 관계를 갖는 것으로 이해할 수 있다. 이에 따라 케슬러는 “x는 S에 대해 0의 관계를 갖는다”는 말을 아래와 같이 정의한다.

- ∀x(x는 S에 대해 0의 관계를 갖는다 ↔ x의 모든 부분은 S를 갖지 않는다).
  $\forall x[0(x, S) \leftrightarrow \forall y(y \subset x \rightarrow \neg Sy)]$

이 정의는 물리적 대상의 부분 중에는 문제의 속성 S를 가지지 않는 부분도 있을 수 있음을 전제한다. 그런데 케슬러는 부분관계가 이행적이라는 것만 아니라, 재귀적이라는 것도 받아들인다. 다시 말해 그는 어느

물리적 대상 a에 대해서든지, a는 그 자신의 부분이라고 생각한다. 그러므로 a가 어떤 속성 S에 대해 1의 관계를 갖는 경우는 두 가지가 있을 수 있다. 첫째로 a가 자신이 S를 갖는 반면 a의 어느 부분도 S를 갖지 않는 경우. 둘째로 a의 어떤 진부분이 S를 갖고, a 자신이나 그 밖의 어느 부분도 S를 갖지 않는 경우. 두 경우를 모두 고려해서, 그는 "x는 S에 대해 1의 관계를 갖는다"는 말을 아래와 같이 정의한다.

- ∀x(x는 S에 대해 1의 관계를 갖는다 ↔ x의 부분 중 S를 갖는 것이 적어도 하나 있고, 그런 부분은 기껏해야 하나 있다.)
  $\forall x[1(a,\ S) \leftrightarrow \exists y[(y \subset x\ \&\ Sy)\ \&\ \forall z((z \subset x\ \&\ Sz) \rightarrow y=z)].$

케슬러는 "x는 S에 대해 1의 관계를 갖는다"는 말의 정의를 이용해서, "x는 S에 대해 n의 관계를 갖는다"는 말이 주어졌을 때, "x는 S에 대해 n+1의 관계를 갖는다"는 말이 무엇을 의미하는지 설명하려 한다. 앞 절에 제시했던 밀의 정의를 고려할 때, 이 일은 어렵지 않아 보인다. 왜냐하면 "x는 n을 갖는다"는 말을 "x는 S에 대해 n의 관계를 갖는다"는 말로 고쳐쓰면 될 것이기 때문이다. 이 경우 우리는 임의의 자연수 n에 관한 설명에 의지해서 n+1에 관한 아래의 정의를 얻는다.

- ∀x[x는 S에 대해 n+1의 관계를 갖는다 ↔ ∃y∃z(x는 y와 z의 그 결합이고, y는 S에 대해 n의 관계를 갖고, z는 S에 대해 1의 관계를 갖는다)].
  $\forall x[n{+}1(x,\ S) \leftrightarrow \exists y \exists z[x = y \oplus z\ \&\ n(y,\ S)\ \&\ 1(z,\ S)]$

하지만 케슬러는 이런 정의를 두 가지 이유에서 받아들이지 않는다. 첫째로, 앞 절에서 본 것처럼 어떤 모임 x와 그 두 부분 y와 z에 대해 x = y ⊕ z가 성립한다고 해도, y와 z는 서로소가 아닐 수 있다. 그런데

이 경우 앞의 설명의 왼편은 오른편과 동치가 아닐 수 있다. 예컨대 어떤 바구니에 사과가 세 개 있다고 하고, 그 사과들의 모임을 *a*라고 하자. 이 경우 *b*와 *c*를 모두 사과 한 개를 공유하는 두 개의 사과의 모임으로 간주하더라도, 여전히 *b*와 *c*의 그 결합은 *a*가 된다. 이 경우 *a*가 갖는 사과의 개수는 *b*가 갖는 사과의 개수와 *c*가 갖는 사과의 개수의 합보다 하나 더 적다. 일반적으로 말해, 어떤 모임 x와 그 두 부분 y와 z에 대해, x = y ⊕ z가 성립할 경우, y와 z가 어떤 부분 w를 공유하고 있고, w 역시 속성 S를 갖는다면, y가 *n*개의 S를 갖고 z가 1개의 S를 갖는다고 해도, x는 *n*+1개보다 더 적은 S를 가질 것이다. 이 때문에 케슬러는 x = y ⊕ z가 성립할 경우, x가 갖는 S의 개수가 y가 갖는 S의 개수와 z가 갖는 S의 개수의 합과 일치하려면, 다음 조건이 첨가되어야 한다는 생각한다.

(1) *y*와 *z*의 그 결합의 어느 부분도 S를 공유하지 않는다.
$\forall w[(w \sqsubset y \oplus z \ \&\ Sw) \rightarrow \neg(w \sqsubset y \ \&\ w \sqsubset z)]$

케슬러는 이 조건을 앞의 설명에 첨가하는 것으로 충분하지 않다고 생각한다. 그 이유는 그의 0에 관한 설명과 관련되어 있다. 그는 그 설명에서 임의의 대상 x가 주어진 속성 S를 가지지 않는 경우를 배제하지 않는다는 것을 보았다. 그런데 어떤 모임 x와 그 두 부분 y와 z에 대해 x = y ⊕ z가 성립할 때도, y나 z의 어떤 부분은 속성 S를 가지지 않을 수 있다. 예컨대 바구니에 든 세 개의 사과의 모임 *a*라고 할 때, 우리는 사과 한 개와 사과 반쪽으로 구성된 두 부분 *b*와 *c*로 나누는 경우를 고려할 수 있다. 이 경우 *b*와 *c*의 그 결합은 여전히 *a*이지만, *b*와 *c* 모두 '사과'에 대해 1의 관계를 갖는 반면, *a*는 세 개의 사과를 갖는다. 일반적으로 말해, x = y ⊕ z가 성립할 때도 y와 z 각각에는 없는 S인 부분이 y와 z의 결합을 통해 새로 생길 수 있다는 것이 문제이다. 이 때문에

케슬러는 조건 (1) 이외에 다음 조건도 첨가해야 한다고 생각한다.

(2) y와 z의 결합에 의해 S를 갖는 부분이 새로 생기지 않는다.
$\forall w[(w \subset y \oplus z \ \& \ Sw) \rightarrow (w \subset y \vee w \subset z)]$

케슬러는 y와 z의 결합이 조건 (1)-(2)를 모두 만족할 때, "y와 z는 속성 S에 대해 서로소이다"라고 한다.

- *y*와 *z*는 속성 S에 대해 서로소이다 ↔ S를 갖는 *y*와 *z*의 결합의 모든 부분은 *y*와 *z* 중 하나에 그리고 오직 하나의 부분이다.
  $yS/z \leftrightarrow \forall w[(w \subset y \oplus z \ \& \ Sw) \rightarrow (w \subset y \vee w \subset z) \ \& \ \neg(w \subset y \ \& \ w \subset z)]$

이제 케슬러는 "x는 S에 대해 *n*+1의 관계를 갖는다"를 아래와 같이 정의한다:

- $\forall$x[x는 S에 대해 *n*+1의 관계를 갖는다 ↔ $\exists$y$\exists$z(x는 y와 z의 결합이고, y와 z는 S에 대해 서로소이고, y는 S에 대해 *n*의 관계를 갖고, z는 S에 대해 1의 관계를 갖는다.)]
  $\forall x\{n+1(x, S) \leftrightarrow \exists y \exists z[x = y \oplus z \ \& \ yS/z \ \& \ n(y, S) \ \& \ 1(z, S)]$

케슬러는 이 정의에 아래의 "x는 S에 대해 0+1의 관계를 갖는다"의 정의를 추가하면, 임의의 자연수 *n*과 그것의 후자 *n*+1 사이의 관계에 대한 일반적 설명에 도달할 수 있다도 믿는다.

- $\forall$x(x는 S에 대해 0+1의 관계를 갖는다 ↔ x는 S에 대해 1의 관계를 갖는다.)
  $\forall x[0+1(x, S) \leftrightarrow 1(x, S)]$

2) 사이먼즈의 반론

케슬러는 자연수에 관한 그의 설명을 기초로 자연수 이론이 어떻게 실행가능한지 제시하지 않는다. 예컨대 잘 알려진 페아노의 자연수 공리들에 대한 어떤 식의 정당화가 가능한지, 혹은 고전적 자연수 이론을 특징짓는 주요 원리들을 정당화할 수 있는지에 관해 논의하지 않는다.[19] 다만 그는 자연수들에 관한 그의 설명은 프레게의 반론을 극복하는 데는 충분하다고 생각한다. 이런 그의 주장이 정당한지 보기 위해 우리는 그가 자연수들 사이의 동일성, 그리고 자연수들 사이의 합을 어떻게 이해하는지 주목할 필요가 있다. 케슬러의 관점에서 보면 자연수는 개별적 대상이 아니라 대상과 속성 사이의 관계이다. 그러므로 임의의 두 자연수 m과 n이 같다는 것은 어떤 대상 a에 대해서나, 그리고 어떤 속성 S에 대해서나 $m(a, S)$가 $n(a, S)$와 서로 동치라는 것을 의미한다. 그리고 케슬러는 어떤 대상 a와 어떤 속성 S에 대해, 임의의 두 자연수 $m(a, S)$와 $n(a, S)$의 합은 S-서로소 조건을 이용해서 다음과 같이 정의한다.

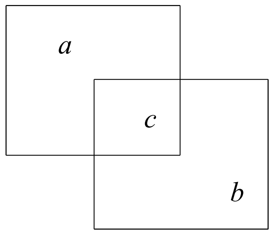
$$\forall x\{m{+}n(x, S) \leftrightarrow \exists y \exists z[x = y \oplus z \;\&\;\; \& \; yS/z \;\&\; m(y, S) \;\&\; n(z, S)]\}.$$[20]

그러므로 케슬러의 자연수 설명에서는 S-서로소 조건 − 즉 대상 $x = y \oplus z$일 경우, y와 z가 주어진 속성 S에 대해 서로소여야 한다는 조건 − 이 핵심적이다. 이 조건이 만족되지 않으면, 우리는 임의의 자연수에 대한 설명에 의존해서 그것보다 하나 더 많은 자연수를 설명할 수 없을 뿐 아니라, 사물 부분들 사이의 결합 연산에 의존해서 자연수 사이의 합을 설명할 수도 없다. 말하자면 S-서로소 조건은 케슬러 식의 자연수 이

19) 케슬러는 Kessler(1980), 74쪽 이후에서 그의 자연수 이론 전개의 기획을 조금 언급하지만, 그런 언급만으로 실제로 그의 기획이 어떻게 구체화될지 가늠하기 힘들다.

20) Kessler(1980), 73쪽 각주 9 참조.

론이 실행가능하기 위한 필수적인 조건이다. 하지만 사이먼즈가 지적한 것처럼, S-서로소 조건은 S를 갖는 대상들을 세는 일이 일반적으로 어떻게 가능한지 설명하기 어렵게 만든다.[21] 다음 도형을 보자.

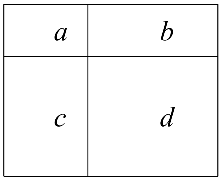


A

A는 몇 개의 사각형을 갖고 있는가? 케슬러 식으로 말하면, A는 '사각형'이란 속성에 대해 어떤 수적 관계를 갖는가? 케슬러의 요구조건을 접어둔다면, 우리는 아주 쉽게 옳은 대답에 도달할 수 있다. 3개. 그러나 케슬러는 이런 대답을 할 수가 없다. 왜냐하면 결합해서 A를 형성하는 두 부분 a와 b는 사각형 c를 공유하기 때문이다. $A = a \oplus b$이긴 하지만, 케슬러가 요구하는 조건과는 반대로 a와 b는 '사각형'이란 속성에 대해 서로소가 아니다.

우리는 S-서로소 조건을 어기는 또 다른 사례도 들 수 있다. 다음의 도형을 보자.[22]

21) Simons(1982), 164-165쪽.
22) 유사한 사례가 조금 다른 맥락에서 더밀의 논의에 등장한다. Dummett(1981), 549쪽.



B

B는 몇 개의 사각형을 갖고 있는가? 케슬러의 요구조건을 접어둔다면, 우리는 어렵지 않게 옳은 대답에 도달할 수 있다. 9개. 그러나 케슬러는 이런 대답을 할 수가 없다. 왜냐하면 B의 인접한 어느 두 부분이나 새로운 사각형을 형성하기 때문이다. 예컨대 $a \oplus b$는 케슬러의 요구와는 반대로 *a*와 *b*에 없던 새로운 사각형이다. 도형 B의 부분들은 케슬러의 또 다른 요구도 어긴다. 예컨대 $a \oplus b$는 케슬러의 요구와는 반대로 *a*와도 *b*와도 공통부분을 갖는다.

케슬러의 시도는 딜레마에 빠지는 것 같다. 어떤 자연수 *n*(x, S)와 그것의 후자 *n*+1(x, S) 사이의 관계를 일반적으로 설명하려면, *a*는 두 부분 *b*와 *c*의 결합으로 간주되어야 할 뿐 아니라, *b*와 *c*는 S에 대해 서로소여야 한다. 반면 이런 두 조건을 만족시키지 않는 많은 물리적 대상들의 경우에 우리는 수를 적용할 수 있다. 다시 말해 우리는 그런 조건을 고려하지 않아도 물리적 대상들을 세고 옳은 결과에 이를 수 있다. 그러므로 자연수를 케슬러 식으로 설명하면, 셈이 어떻게 가능한지 일반적으로 설명할 수 없다.

4. 암스트롱의 관계적 자연수

1) 암스트롱의 자연수

자연수에 대한 암스트롱의 설명을 이해하려면, 먼저 그가 수적 관계의 항으로 고려하는 구조적 속성이 무엇인지 분명히해야 한다. “이 바구니에 세 개의 사과가 있다”는 말을 케슬러는 “이 바구니에 있는 사과들의 그 모임이 ‘사과’라는 속성에 대해 셋이라는 수를 관계로 갖는다”고 설명한다. 그러므로 케슬러는 그 문장이 서로 다른 세 요소로 이루어져 있다고 생각하는 것이다. 하나는 (1) 그 바구니에 있는 사과들의 그 모임이고, 둘째 요소는 (2) ‘사과’라는 그 속성이고, 셋째 요소는 (3) ‘셋’이라는 자연수이다. 그러므로 애초의 문장이 참이라면, 처음 두 요소들 사이에 ‘셋’이라는 그 관계가 성립한다. 암스트롱은 이 경우 첫째 요소인 그 대상은 이미 어떤 복합적 속성을 갖는다고 생각한다: 즉, 그 대상은 “x는 (서로 다른) 부분들의 결합인데, 그 중 세 개의 부분이 사과이다”라는 술어에 의해 표현된 속성을 갖는다. 이 술어에는 이미 케슬러 설명에 등장하는 세 요소가 거의 모두 포함되어 있다는 점을 주목할 필요가 있다. 달라진 것은 단지 모임에 대한 언급을 변항으로 교체한 것뿐이다. 우리는 암스트롱의 구조적 속성을 표현하는 술어의 일반적 형식을 “x는 (서로 다른) 부분들의 그 결합이고, 그 중 n개의 부분이 S이다”라고 표현할 수 있다. 그는 이런 구조적 속성들 사이의 관계를 일반적으로 다음과 같이 귀납적으로 설명하고 있다:[23)]

(1) x는 하나의 S이다. ↔ x는 한 개의 (구별된) 부분을 가지고 있고, 그것은 S이다.[24)]

---

23) Armstrong & Forrest(1987), 172면. 암스트롱과 포레스트는 1987년 논문에서 그들의 자연수 이론을 제시였으나, 이후 그 이론에 대한 옹호 및 반론에 대한 대응은 주로 암스트롱에 의해 수행되었다. 그러므로 나는 아래에서 해당 견해를 논의할 때 암스트롱만 언급하려 한다.

24) 이것은 Armstrong & Forrest(1987), 172면의 다음 문장을 재구성한 것이다: “*being the sum of one (distinct) part which is a P* just is *being a P.*”(‘한 개의 (구별된) 부분의 결합이고 P임’은 바로 ‘(하나의) P임’이다.) 그러나 이 원문은 내용상 문제가 있다. 왜냐하면 2항 연산으로서 결합을 한 개의 항에 적용하고

· $1(x, S) \leftrightarrow \exists y[(y \subset x \ \& \ Sy) \ \& \ \forall z((z \subset x \ \& \ Sy) \rightarrow y = z]$

(2) x는 서로 다른 부분들의 결합이고, 그 중 n+1개의 부분이 S이다 ↔ x는 서로 다른 두 부분의 결합이고, 그 한 부분은 한 개의 S를 갖고, 다른 부분은 서로 다른 부분들의 결합으로서 그 중 n개의 부분이 S를 갖는다.

· $n+1(x, S) \leftrightarrow \exists y \exists z[x = y \oplus z \ \& \ y \neq z \ \& \ n(y, S) \ \& \ 1(y, S)]$

여기서 주목할 점은 두 가지이다. 첫째로 이 설명은 암스트롱 자신이 염두에 두는 자연수의 설명도 아니고, 임의의 자연수와 그 후자인 자연수 사이의 관계에 관한 설명도 아니라는 점이다. 도리어 앞의 설명은 수적관계의 항으로서 구조적 속성에 관한 설명이다.[25] 둘째로 앞의 설명은 모임을 이루는 두 부분이 서로소일 것을 요구하지도 않고, 케슬러가 하듯이 그런 두 부분이 (개별화) 속성 S에 대해 서로소일 것도 요구하지도 않는다. 도리어 앞의 설명에서는 모임을 이루는 두 부분이 서로 다르다고만 규정된다. 그러므로 암스트롱의 구조적 속성에서 문제되는 것은 S를 갖는 서로 다른 부분이 몇 개인가 하는 것뿐이다.

암스트롱에 따르면 자연수는 대상 자체가 개별화 속성에 대해 갖는 관계가 아니라, 대상이 갖는 구조적 속성이 단위속성에 대해 갖는 관계이

있고, 단위속성을 갖지 않는 부분도 결합연산의 항으로 간주될 수 있음을 간과하고 있다. 하지만 그 글의 175쪽에서 암스트롱 자연수 1을 정의하려 할 때는 그 관계항인 구조적 속성을 "*being a P plus a further part containing no P*"(하나의 P인 부분과 P를 포함하지 않는 또 다른 부분의 결합)으로 표현하고 있다. 그러므로 구조적 속성 "$1(x, S)$"을 정의하려면, (1) x 자신이 S이지만, x가 진부분을 갖지 않는 원자적인 경우, 그리고 (2) x가 한 개의 S-부분과 S가 아닌 다른 부분의 결합인 경우를 모두 고려해야 한다. 그러면 "$\exists y[(y \subset x \ \& \ Sy) \ \& \ \forall z((z \subset x \ \& \ Sy) \rightarrow y = z]$"로 정의하는 것 이외에는 대안이 없는 것 같다.

25) 암스트롱은 구조적 속성과 그밖의 속성의 차이를 다음과 같이 설명한다: "어떤 속성 S를 갖는 개체들의 진부분들이 S와 다른 어떤 속성 T를 갖고, 이 사태는 적어도 부분적으로 S의 구성요소가 될 경우, 그리고 그 때만 속성 S는 구조적이다."(Armstrong[1978], 69쪽.)

다. “이 바구니에 세 개의 사과가 있다”는 문장이 참이라고 하자. 이 경우 바구니에 있는 사과들의 모임을 *a*라고 하면, 우리는 그 문장을 “3(*a*, 사과)”로 바꾸어 쓸 수 있다. 우리는 이 문장이 말하는 바를 *a*가 ‘3(x, 사과)’라는 속성을 갖는다는 것으로 이해할 수 있는데, 암스트롱에 따르면 바로 ‘3(x, 사과)’은 *a*가 갖는 구조적 속성이다. 그는 이 구조적 속성이 그에 상응하는 단위속성 1(x, 사과)에 대해 수관계 3을 갖는다고 한다. 그러면 일반적으로 어떤 대상 *a*가 어떤 속성 S에 대해 *n*이라는 수를 갖는다면, 언제나 그 대상은 *n*(*x*, S)라는 구조적 속성을 갖게 될 것이다. 암스트롱은 이 경우 구조적 속성 *n*(*x*, S)는 단위속성 1(*x*, S)에 대해 *n*의 관계를 갖는다는 것이다. 그러므로 암스트롱에 따를 때, 임의의 자연수 *n*는 어떤 대상 *a*가 갖는 구조적 속성 *n*(*x*, S)가 단위 속성 1(*x*, S)에 대해 갖는 관계이다.

암스트롱은 자연수 설명은 처음 볼 때 명백히 순환적이다. 왜냐하면 암스트롱의 자연수는 이미 자연수에 대한 규정을 그 안에 포함하고 있는 구조적 속성을 항으로 삼기 때문이다. 이런 뜻에서 그의 자연수 설명은 이미 자연수에 대한 이해를 전제하고 있다고 할 수 있다. 하지만 그는 이것이 크게 문제되지 않는다고 생각한다. 왜냐하면 어떤 대상 *a*가 갖는 구조적 속성 *n*(*x*, S)가 단위 속성 1(*x*, S)에 대해 갖는 그 수관계는 언제나 *n*과 동일시할 수 있기 때문이라는 것이다. 혼란을 피하기 위해, 구조적 속성의 요소로서 자연수 *n*과 구별해서 암스트롱의 자연수를 굵게 **N**으로 표현해 보자. 그러면 임의의 대상 x와 단위속성 S에 대해, 암스트롱의 자연수와 구조적 속성을 표현하는 데 사용되는 자연수 사이의 동치관계는 아래와 같이 표현된다.[26]

26) Armstrong & Forrest(1987), 173쪽. 암스트롱이 자연수를 이처럼 복잡하게 설명하려는 이유는 그의 자연수 개념이 양들 사이의 비율수를 모형으로 삼기 때문이다. Armstrong(1989), 128-133쪽 참조. 그러나 이런 그의 시도는 대상들을 세는 일과 양의 크기를 측정하는 일을 동일시할 때만 가능하다.

(E) $\forall x \forall S[\mathrm{N}(n(x, \mathrm{S}), 1(x, \mathrm{S})) \leftrightarrow n(x, \mathrm{S})]$

자연수 0과 1에 대한 암스트롱의 설명은 케슬러의 설명에 의존한다. 케슬러에 따르면, 어떤 대상 *a*가 속성 S인 부분을 하나도 갖고 있지 않을 때, *a*는 S에 대해 0을 관계로 갖는다. 암스트롱에 따를 때 이 경우 *a*는 'S인 부분을 하나도 갖고 있지 않음'이란 구조적 속성 ― 즉 속성 $0(x, \mathrm{S})$ ― 을 갖게 되고, 이 속성은 단위 속성 $1(x, \mathrm{S})$에 대해 0을 관계로 갖는다. 그리고 케슬러에 따르면, 어떤 대상 *a*가 속성 S인 부분을 정확히 하나 가질 때, *a*는 S에 대해 1을 관계로 갖는다. 암스트롱에 따를 때 이 경우 *a*는 'S인 부분을 정확히 하나 가짐'이란 구조적 속성 ― 즉 속성 $1(x, \mathrm{S})$ ― 을 갖게 되고, 이 속성은 단위 속성 $1(x, \mathrm{S})$에 대해 1을 관계로 갖는다.

$$0\ (0(x, \mathrm{S}), 1(x, \mathrm{S})) \leftrightarrow \forall y(y \subset x \rightarrow \neg \mathrm{S}y)$$
$$1\ (1(x, \mathrm{S}), 1(x, \mathrm{S})) \leftrightarrow \exists y[(y \subset x \ \&\ \mathrm{S}y) \ \&\ \forall z((z \subset x \ \&\ \mathrm{S}z) \rightarrow y=z)]$$

그러면 암스트롱 자연수 N과 N + 1 사이의 관계는 어떻게 규정되어야 하는가? 암스트롱은 그런 설명을 직접 제시하지 않는다. 하지만 동치원리 (E)의 왼편의 암스트롱 자연수는 오른편의 구조적 속성에 따라 결정되므로, 암스트롱 자연수들 사이의 관계도 구조적 속성들 사이의 관계에 따라 설명하는 것이 합당해 보인다. 그렇다면 그는 다음 원리를 N에 대한 N + 1의 관계에 대한 설명으로 받아들일 것이다.

[S] $\mathrm{N} + 1(n{+}1(x, \mathrm{S}), 1(x, \mathrm{S}))$
$\leftrightarrow \exists y \exists z[x = y \oplus z \ \&\ y \neq z \ \&\ \mathrm{N}(n(y, \mathrm{S}), 1(y, \mathrm{S})) \ \&\ 1(1(z, \mathrm{S}), 1(z, \mathrm{S}))]$

그런데 이 원리를 받아들일 경우 (E)에 따라 다음 원리로 받아들여야 할 것 같다.

$$N + 1(n{+}1(x, S), 1(x, S)) \leftrightarrow \exists y \exists z[x = y \oplus z \ \& \ y \neq z \ \& \ n(y, S) \ \& \ 1(z, S)]$$

이제 우리는 암스트롱의 자연수 설명이 케슬러 자연수 설명과 어떤 차이를 갖는지 알 수 있다. 케슬러 자연수 n+1(x, S)가 n(y, S) 후자가 되려면, x는 y를 1(z, S)인 모임 z와 결합한 결과일 뿐 아니라, y와 z는 S-서로소여야 한다. 반면 암스트롱 자연수 N + 1이 N의 후자가 되려면, n+1(x, S)인 모임 x가 n(y, S)인 모임 y와 1(z, S)인 모임 z의 결합이라는 사실 이외에, y와 z가 서로 다르다는 조건만 요구된다.

2) 암스트롱 자연수의 적용

앞 절의 도형 A를 다시 고려하자. 암스트롱에 따르면, 구조적 속성 n(x, S)를 설명하기 위해 x가 S-서로소인 n개의 부분을 갖는다고 간주할 필요가 없다. 다만 x의 서로 다른 n개의 부분이 S를 갖는 것으로 충분하다. 암스트롱은 도형 A의 경우 ‘사각형’을 어떻게 제한하느냐에 따라 서로 다른 수를 갖는 것으로 간주할 수 있다고 생각한다.[27]

(1) A는 한 개의 사각형인 부분과 이와 서로소이지만 사각형이 아닌 부분의 결합이다.
(2) A는 서로의 부분이 아닌 두 사각형의 결합이다.
(3) A는 서로 다른 세 사각형의 결합이다.

도형 A는 (1)-(3)의 세 구조적 속성을 모두 가지고 있다. 암스트롱은

27) Armstrong & Forrest(1987), 174-175쪽.

이 세 속성의 차이에 근거해서 케슬러가 마주친 난점을 극복할 수 있다고 생각한다. 케슬러는 A의 부분들이 S-서로소 조건을 어기기 때문에 A가 갖는 사각형들의 개수를 정할 수가 없었다. 그러나 그런 조건을 버리고 A의 부분들이 서로 다르기만 하면 된다고 가정하면, 우리는 A가 (1)-(3)의 세 구조적 속성을 모두 가지는 것으로 간주할 수 있다. 그런데 암스트롱의 경우 자연수는 구조적 속성 자체가 단위속성에 대해 갖는 관계이므로, 자연수가 관계항이 다를 때 달라진다는 것은 문제가 되지 않는다. 그러므로 암스트롱은 단위속성 ‘사각형’에 대해 (1)의 구조적 속성은 암스트롱 자연수 1을 갖는 것으로, (2)의 구조적 속성은 암스트롱 자연수 2를 갖는 것으로, (3)의 구조적 속성은 암스트롱 자연수 3을 갖는 것으로 간주한다.

이런 대응은 적절한가? 먼저 우리는 (1)-(3)의 구조적 속성의 차이는 ‘사각형’ 이외에 어떤 조건을 더 첨가하는지에 따라 생긴다는 점을 주목할 필요가 있다. (3)에는 ‘사각형’ 이외의 다른 조건이 첨가되지 않은 반면, (1)에서는 ‘사각형이 아닌 부분과 서로소임’이라는 조건이, (2)에서는 ‘서로의 부분이 아님’이라는 조건이 첨가되었다. (1)에 첨가된 조건을 ‘P’, (2)에 첨가된 조건을 ‘Q’로 표시하자. 그러면 ‘사각형’을 ‘S’로 표시할 때, 암스트롱의 주장은 다음에 해당한다.

(1a) 1 (1(x, S&P), 1(x, S))
(2a) 2 (2(x, S&Q), 1(x, S))
(3a) 3 (3(x, S), 1(x, S))

이 경우 문제는 구조적 속성과 단위속성 사이의 관계가 (1a)-(2a)의 경우와 (3a)의 경우 서로 다른 종류의 관계라는 데 있다. 우리는 구조적 속성 *n*(x, S)이 단위속성 1(x, S)에 대해 갖는 그런 **종류**의 관계를 구조적 속성 *n*(x, S&T)가 단위속성 1(x, S)에 대해 갖는다고 말할 수 있는가?

암스트롱은 그렇게 말해도 된다는 것을 보일만한 아무 근거도 제시하지 않는다. 그러나 암스트롱의 이 주장에는 심각한 난점이 있다. 먼저 앞의 (1a)-(3a)가 모두 성립한다는 암스트롱의 주장을 받아들인다고 하자. (3a)의 경우 우리는 (E)에 의존해서 임의의 자연수 n과 암스트롱 자연수 N 사이의 동치를 받아들일 수 있다. 하지만 (E)에서는 구조적 속성에 포함된 단위속성은 그것과 비교될 단위속성과 같은 것으로 간주된 반면, (1a)-(2a)의 경우 구조적 속성에 포함된 단위속성은 그것과 비교할 단위속성과 다르다. 그러므로 (1a)-(2a)의 경우 우리는 (E)에 의존해서 임의의 자연수 n과 암스트롱 자연수 N 사이의 동치를 받아들일 수가 없다. 이 경우 우리는 어떤 원리에 의존해서 n과 N 사이의 동치를 받아들여야 하는가? (1a)-(2a)가 의존할 만한 원리는 다음 둘 중 하나일 것이다.

(E1) $\forall x \forall S \forall T[N(n(x, S\&T), 1(x, S)) \leftrightarrow n(x, S)]$
(E2) $\forall x \forall S \forall T[N(n(x, S\&T), 1(x, S)) \leftrightarrow n(x, S\&T)]$

암스트롱은 둘 중 어느 것을 받아들일 수 있는가? 먼저 (E1)은 일반적으로는 성립하지 않는다는 점을 주목하자. 암스트롱의 주장 (1a)에 따를 때, 1(1(x, S&P), 1(x, S))는 참이다. 그러므로 그는 (E1)에 따를 때 다음 사례를 받아들여야 한다.

$$1(1(x, S\&T), 1(x, S)) \leftrightarrow 1(x, S)$$

그런데 도형 A에 대해서는 1(A, S&P)도 참이지만, 3(A, S)도 참이다. 그러므로 똑같은 대상이 똑같은 속성에 대해 서로 다른 자연수를 갖는다고 주장하지 않는 한, 1(A, S)는 참이 아니다. 그러므로 암스트롱은 (E1)을 받아들일 수 없다.

암스트롱은 (E2)를 받아들일 수 있을까? 이 경우 n(x, S&T)의 단위속

성은 1(x, S&T)이지, 1(x, S)가 아니라는 점을 주목해야 한다. 왜냐하면 구조적 속성에 관한 암스트롱의 귀납적 설명에 따를 때, 예컨대 도형 A가 2(x, S&Q)를 구조적 속성으로 갖는다는 사실은 다음과 같이 설명되어야 하기 때문이다.

$$\exists y \exists z[A = y \oplus z \ \& \ y \neq z \ \& \ 1(y, S\&Q) \ \& \ 1(z, S\&Q)]$$

만약 그렇게 하지 않고 앞의 문장의 "S&Q" 대신 "S"를 넣으면, 그 결과로 얻는 문장은 암스트롱의 주장과 반대로 거짓이 된다. 이 경우 우리는 이렇게 물을 수 있다. (E2)의 오른편 사례에서 1(x, S&T)가 단위속성으로 간주되는데, 왜 왼편의 비교대상으로서 단위속성은 1(x, S)여야 하는가? 말하자면, 암스트롱은 무슨 근거에서 *n*(x, S&T)를 1(x, S&T)와 비교하지 않고, 1(x, S)와 비교해도 된다고 생각하는가?

아마 이런 물음에 대해 누군가 "x가 *n*개의 S&T를 가지고 있다"는 데서 "x가 *n*개의 S를 가지고 있다"는 것을 추론할 수 있으므로, *n*(x, S&T)를 1(x, S)과 비교해도 무방하다고 대답하려 할지 모른다. 그러나 우리는 그렇게 할 수 없다. 왜냐하면 그런 추론은 부당하기 때문이다. 일반적으로 x가 (**정확히**) ***n*개의** S&P를 갖고 있으면, x는 **적어도 *n*개의** S를 갖는 것이지, 정확히 *n*개의 S를 갖는 것이 아니다. 그런데 우리는 x가 적어도 *n*개의 S를 갖고 있다는 데서, x가 **기껏해야 *n*개**를 갖고 있다고 추론할 수 없다.28) 그러나 x가 정확히 *n*개의 S를 갖기 위해서는 x는 적어도 *n*개의 S를 갖고 있어야 할 뿐 아니라 기껏해야 *n*개의 S를 갖고 있어야 한다. 그러므로 x가 *n*개의 S&T를 갖고 있다고 해서, x가 *n*개의 S를 갖

28) 탁자 위에 10개의 사과가 있는데, 5개는 바구니에 담겨 있고, 5개는 접시에 놓여 있다고 하자. 그러면 탁자 위의 사과 중 바구니에 담긴 것은 5개이다. 이 경우 우리는 탁자 위에 사과가 적어도 5개 있다고 할 수는 있지만, 기껏해야 5개 있다고 할 수는 없다.

고 있다고 추론해서는 안 된다.

결국 구조적 속성 n(x, S)가 단위속성 1(x, S)에 대해 갖는 그런 종류의 관계를 어떻게 구조적 속성 n(x, S&T)가 단위속성 1(x, S)에 대해 갖는지 불가해하다. 그러나 이 점이 불투명하다는 것은 바로 암스트롱 자연수 개념 자체가 불투명하다는 것을 말하는 것이다. 왜냐하면 암스트롱은 바로 자연수를 그런 종류의 관계로 간주하기 때문이다. 암스트롱은 이런 난점이 어떻게 해결될 수 있는지 논의하지 않는다. 다만 그는 단위속성을 두 부류로 구분하는 데 만족한다. 한 가지는 문제되는 부분들이 그 속성을 갖는지 아닌지가 명확해서, 외연을 선명하게 나누어주는 경우이다. 다른 하나는 그런 부분들이 그 속성을 갖는지 아닌지 충분히 명확하지 않아 외연을 선명하게 나누어주지 못하는 경우이다. 그는 전자의 속성을 강한 개별화 속성, 후자의 속성을 약한 개별화 속성이라고 부른다.[29] 말하자면 동치 원리 (E)가 적용 가능한 그런 단위속성 S는 강한 개별화 속성인 경우이고, (E2)에 나타나는 S처럼 다른 속성에 의해 제한되지 않으면 외연을 충분하게 나누어주지 못하는 경우는 약한 개별화 속성이라는 것이다.

하지만 암스트롱의 구분은 문제를 해결하는 데 기여하기보다는 실제의 문제를 왜곡하는 것으로 보인다. 우선 암스트롱의 구분은 속성들 자체의 분류가 아니라, 속성들의 적용에 관한 구분임을 주목하자. 왜냐하면 예컨대 ‘사각형’이란 속성은 많은 경우 그것을 갖는 대상들과 그렇지 않은 대상들을 충분히 구별해주기 때문이다.[30] 그러면 우리는 ‘사각형’이란 속성이 애초부터 강한 개별화 속성과 약한 개별화 속성 중 하나에 속하는

29) Armstrong & Forrest(1987), 169-170면; Armstrong(1989), 131-132쪽 참조.

30) 예컨대 어떤 종이에 겹치지도 맞닿지도 않는 서로 다른 세 개의 사각형이 작도되어 있다고 하자. 그러면 우리는 ‘사각형’이란 속성을 이해하는 것만으로 “이 종이에는 몇 개의 사각형이 (그려져) 있는가” 하는 물음에 대해 “3개”라고 충분하게 대답할 수 있다. 이 경우 암스트롱의 기준에 따르면 ‘사각형’은 강한 개별화 속성이다.

것이 아니라, 그 속성이 적용되는 사례에 따라 강한 것으로 혹은 약한 것으로 분류된다고 해야 한다. 그러면 도형 A의 사례에서 ‘사각형’이란 속성은 약한 개별화 속성으로 분류되어야 하는가? 그렇지 않은 것 같다. 왜냐하면 애초에 사이먼즈가 도형 A에 관해 제기한 물음은 “도형 A는 몇 개의 사각형을 갖고 있는가?”이고, 우리는 ‘사각형’이란 속성이 무엇인지 이해하는 것만으로 “A는 3개의 사각형을 갖는다”고 충분히 대답할 수 있기 때문이다. 이 경우 동치원리 (E)를 받아들이면, 우리는 그 경우 암스트롱 자연수가 3이라는 사실도 받아들여야 한다. 그러면 ‘사각형’은 도형 A의 사례에서도 약한 개별화 속성으로 간주되어서는 안 될 것이다.

아마 이에 대해 누군가는 “도형 A는 몇 개의 사각형인가?”라는 물음이 암스트롱의 주장 (3)만 아니라 주장 (1)과 (2)에 의해서도 대답할 수 있는 것이라고 대꾸할지 모른다. 그래서 도형 A의 경우 ‘사각형’이라는 속성은 약한 개별화 속성으로 분류되어야 한다고 주장할지 모른다. 그러나 이는 암스트롱이 주장 (1)과 (2)에 의해 대답하려는 물음이 애초의 물음과 다르다는 사실을 망각하는 것이다. 사이먼즈의 물음은 ‘사각형’이라는 속성 이외의 다른 속성을 이해할 것을 요구하지 않는다. 반면 우리가 이미 본 것처럼 (1)에서는 ‘사각형이 아닌 부분과 서로소임’이라는 조건이 첨가되어 있고, (2)에서는 ‘서로의 부분이 아님’이라는 조건이 첨가되어 있다. 이는 주장 (1)과 (2)는 A가 그런 또 다른 조건을 만족하는 사각형을 몇 개 갖고 있는가 하는 물음에 대해 대답하려는 것임을 보여준다.[31] 그런데 이처럼 ‘사각형’ 이외에 또 다른 조건이 첨가될 때, 해당 물음에서 고려하는 셈의 단위 자체가 달라진다는 점을 주목해야 한다. (3)의 경우 셈의 단위는 A의 부분인 사각형들인 반면, (1)과 (2)의 경우 셈의 단위는 A의 부분들 중 또 다른 조건을 만족하는 사각형들이다. 이처럼 두 경우에 셈의 단위 자체가 달라진다는 점을 고려한다면, 우리는

31) (1)-(2)에 적합한 물음 및 그 대답의 정식화에 관해서는 5장 2절 참조.

더 이상 같은 속성 ‘사각형’이 (3)에서는 강한 것으로, (1)-(2)에서는 약한 것으로 사용되었다고 주장할 필요가 없다. 둘의 차이는 셈의 단위를 규정하는 데 ‘A의 부분인 사각형’만으로 충분한지, 아니면 다른 조건을 더 첨가해야 하는지의 차이일 뿐이다. 이 경우 우리는 더 이상 셈과 관련된 속성을 강한 개별화 속성과 약한 개별화 속성으로 나눌 필요도 없다.[32)]

이 때문에 나는 암스트롱이 (E2)를 고수할 수 없다고 생각한다. 왜냐하면 (E2)는 (1)과 (2)에서 문제되는 단위속성이 (3)에서 문제되는 단위속성과 다르다는 사실을 반영하지 못하기 때문이다. 그러므로 (1)과 (2)의 경우 적절한 동치 원리는 (E2)가 아니라, 다음의 (E3)이어야 한다.

(E3) $\forall x \forall S \forall T[N\ (n(x,\ S\&T),\ 1(x,\ S\&T)) \leftrightarrow n(x,\ S\&T)]$

그런데 (E3)는 (E)의 특수한 사례일 뿐이다. 그러므로 암스트롱의 자연수 N의 적용을 설명하기 위해 의존할 수 있는 동치원리는 (E)일 뿐이다.

3) 암스트롱 자연수와 후자관계

그러면 암스트롱은 동치원리 (E)에 의존할 때, 케슬러의 난점을 극복할 수 있는가? 그렇지 않다. 케슬러의 난점은 바로 후자관계에 의해 결정되

32) 암스트롱은 처음에는 이 사실을 충분히 깨닫지 못한 것으로 보인다. 왜냐하면 그는 Armstrong(2004), 113-114쪽에서도 여전히 셈의 단위를 충분히 결정해 주는 속성과 그렇지 못한 속성 − 즉, 그의 이전의 강한 개별화 속성과 약한 개별화 속성 − 사이의 차이에 의존하고 있기 때문이다. 하지만 최근 사이먼즈의 비판에 대응하면서, 그는 이 사실을 인정하고 있다: “체스판의 경우 204가 그 위에 그려진 사각형들의 진짜 수인 것처럼 보인다. 그러나 우리가 ‘체스규칙에 따라 사각형인 것’이라는 속성을 도입한다면, 그 대답은 64이다. 그 경우 우리는 **서로 다른 속성들**을 사용하고 있는데, 그 차이는 미묘해서 그 차이를 정확히 보여주려면 어떤 분석이 필요하다. 그러므로 **나는 하나의 똑같은 속성이 똑같은 주어에 서로 다른 수 속성을 부여할 수 있다고 하는 것은 거짓이라고 생각한다.** 그런 속성 용어들은 서로 다른 속성들 중 어느 것을 나타내는지 애매하다.” (Armstrong[2005], 273쪽, 필자강조)

는 그의 자연수가 예컨대 도형 A의 사각형들의 개수로 간주될 수 없다는 데 있다. 반면 암스트롱의 경우 문제는 도형 A의 사각형들의 개수와 동일시하려는 그의 자연수가 후자관계에 의해 결정되지 않는다는 데 있다. 왜 그런지 보자. 동치원리 (E)는 **구조적 속성에 포함된 부분들의 개수들에 대해 이미 후자관계가 성립할 경우에만** 서로 다른 개수를 서로 다른 암스트롱 자연수에 1-1로 대응시켜준다. 그러나 암스트롱은 구조적 속성을 귀납적으로 설명할 때 케슬러의 S-서로소 조건을 제거함으로써 구조적 속성에 포함된 부분들의 개수들 사이에 후자관계가 성립할 길을 막아 버렸다. 이 경우 동치 원리 (E)는 구조적 속성에 포함된 부분들의 개수가 서로 다른 경우에도 같은 암스트롱 자연수를 부여할 수 있고, 구조적 속성에 포함된 부분들의 개수가 같은 경우에도 다른 암스트롱 자연수를 부여할 수 있다. 그러므로 암스트롱 자연수들 사이에는 후자관계가 성립하지 않는다.[33] 이는 암스트롱 자연수가 산수이론의 자연수가 아니라는 것을 말해준다.

우리는 암스트롱이 처한 상황을 다음과 같이 요약할 수 있다. 자연수에 관한 산수 이론이 가능하려면, 무엇보다 자연수들 사이에 후자 관계가 성립한다는 사실을 입증해야 한다. 케슬러는 이를 위해 S-서로소 조건을 제시하였다. 하지만 그 조건은 바로 자연수 적용에 관한 일반적 설명을 불가능하게 만든다. 반면 암스트롱은 자연수 적용을 일반적으로 설명할 방안을 마련하기 위해 케슬러의 S-서로소 조건을 약화시켰다. 그러

33) 케슬러가 보여준 것처럼 어떤 모임 *a*가 서로 다른 두 부분 *b*와 *c*의 결합으로만 규정될 때, *b*가 *n*개의 S를 갖고, *c*가 1개의 S를 갖는다 할지라도, *a*는 *n*+1개보다 더 많은 S를 가질 수도 있고 그보다 더 적은 S를 가질 수도 있다. 이 경우 *b*는 구조적 속성 *n*(x, S)를 갖고 *c*는 구조적 속성 1(x, S)를 갖지만, *b*와 *c*의 결합인 *a*는 구조적 속성 *m*(x, S)은 *n*+1(x, S)보다 더 크거나 작을 수 있다. 그러면 동치원리 (E)에 따라 *b*의 구조적 속성이 단위속성에 대해 갖는 암스트롱 자연수는 N이고 *c*의 구조적 속성이 단위속성에 대해 갖는 암스트롱 자연수는 1이지만, *a*의 구조적 속성이 단위속성에 대해 갖는 암스트롱 자연수는 N+1보다 더 클 수도 있고 더 작을 수도 있다.

나 이는 다시 자연수들 사이에 후자 관계가 성립한다는 사실을 입증할 수 없게 만든다. 결국 어느 경우도 산수의 수로서 자연수들의 적용이 일반적으로 어떻게 가능한지 설명하지 못한 셈이다.

5. 부분관계와 자연수

우리는 케슬러처럼 자연수를 물리적 대상과 속성 사이의 관계로 간주하든, 아니면 암스트롱처럼 물리적 대상의 구조적 속성과 단위속성 사이의 관계로 간주하든, 자연수들 자체의 성질 및 관계를 설명하는 일과 자연수들의 적용을 설명하는 일을 동시에 성취하기 힘들다는 것을 보았다. 이 절에서 나는 먼저 이들의 이론이 난점에 빠지는 이유는 자연수들의 합을 부분들의 결합으로 환원하려는 데 있음을 보일 것이다. 마지막으로 나는 자연수 설명에서나 그 적용의 설명에서나 부분들의 결합 개념에 의존할 필요가 없다는 것을 보일 것이다.

1) 부분의 결합과 자연수의 합

밀, 케슬러 및 암스트롱의 자연수 설명은 모두 부분관계에 의해 자연수를 설명하려는 시도이다. 이는 우리가 자연수들의 성질과 관계를 사물들 사이의 부분관계에 의해 포착할 수 있음을 전제로 한다. 그리고 그들의 설명이 어떻게 자연수 적용이 가능한지 해명해 주려면, 자연수가 적용되는 다양한 사례들을 부분관계에 의존해서 설명해 줄 수 있어야 한다. 앞에서 나는 자연수가 적용 가능한 영역 일반에 관해 다루지 않고, 부분관계에 의존한 설명이 자연스러운 물리적 대상들의 영역에 논의를 한정하였다. 그 이유는 밀에게서 유래하는 자연수 이론은 무엇보다 물리적 대상의 영역에 대한 자연수 적용을 적합하게 설명해 줄 수 있다는 신념

에 근거하고 있기 때문이다. 물리적 대상들의 영역에 대한 자연수 적용을 적합하게 설명하지 못한다면, 밀에게서 유래하는 이론은 그 대부분의 가치를 상실한다.

앞의 논의에 따르면 우리가 다룬 밀과 그 후계자들의 자연수 이론의 처지는 그리 좋지 않아 보인다. 왜냐하면 물리적 대상들의 영역에 대한 자연수 적용을 설명하는 일도 쉽지 않아 보이기 때문이다. 밀은 수의 적용에 언제나 개별화 속성이 동반된다는 사실을 주목하지 못했고, 그래서 자연수 0이나 1에 대한 설명도 적합하게 제시할 수 없었다. 암스트롱은 개별화 속성이 하는 역할을 인정하였으나, 그런 속성을 갖는 부분들에 부여되는 자연수가 어떤 종류의 관계인지 제대로 설명하지 못했다. 그는 다만 개별화 속성이 단위속성의 역할을 충분히 하는 경우와 그렇지 않은 경우를 구분하는 데 그쳤다. 두 사람에 비해 케슬러는 분명히 진전된 이해를 갖고 있었다. 케슬러는 개별화 속성이 수의 적용에서 하는 역할을 이해하고 있었을 뿐 아니라, 그 역할을 자연수 설명에 구체화하려 할 때 어떤 난점이 생기는지 이해하고 있었다. 나는 케슬러가 어떤 이유에서 자연수 적용의 설명에 실패하게 되었는지 살펴볼 때, 부분전체론이 자연수 적용에서 하는 역할을 더 낫게 이해할 길이 열린다고 믿는다.

우리가 본대로 케슬러는 자연수들간의 후자관계를 자연수들에 대해 성립하는 합의 원리의 특수 사례로 이해하였다. 그리고 그는 밀을 따라 자연수들의 합을 부분들의 결합 개념에 의존해서 설명하고자 하였다. 그의 설명이 갖는 의의와 한계를 이해하기 위해, 먼저 (1)을 (2)처럼 설명하는 경우를 고려하자.

(1) a는 $m+n$개의 S를 가지고 있다.
(2) a는 b와 c의 결합이고, b는 m개의 S를 가지고 있고, c는 n개의 S를 가지고 있다.

후자 관계의 설명에서와 마찬가지로 이 경우에도 케슬러의 S-서로소 조건을 고려해야 한다. 왜냐하면 *a*가 *b*와 *c*의 결합일 경우에도, (i) *a*는 *b*와 *c*가 가지지 않는 S를 가질 수도 있고, (ii) *b*와 *c*는 S를 갖는 부분을 공유할 수도 있기 때문이다. 케슬러는 (2)에서 이 두 경우를 배제하면 (1)과 동치인 결과를 얻을 수 있다고 생각했다.

(3) *a*는 *b*와 *c*의 결합이고, *b*와 *c*는 S-서로소이고, *b*는 *m*개의 S를 가지고 있고, *c*는 *n*개의 S를 가지고 있다.

(3)은 (부분들의 개수로서) 자연수 *m*과 *n*의 합에 대한 설명으로서는 문제가 없다. 그러나 우리가 본 것처럼 S-서로소 조건은 자연수가 적용되는 영역을 제한해 버린다. 왜 그런가? 그 이유는 S-서로소 조건이 배제하는 그런 사례는 결합관계를 갖는 사물들 사이에 실제로 존재하는 사례이기 때문이다. 그런데 중요한 사실은 우리가 그런 경우에도 자연수를 충분히 부여할 수 있다는 것이다. 그러므로 그런 경우에 자연수 적용이 가능한 이유를 설명하고자 한다면, 자연수의 설명은 그런 적용이 가능하도록 제시되어야 한다. 이 사실을 고려한다면, 케슬러의 접근이 왜 잘못되었는지 알 수 있다. 케슬러는 자연수 이론에 적합한 설명을 제시하기 위해, 애초에 그런 이론으로 성취하려는 중요한 목적으로서 자연수 적용의 설명을 포기한 것이다. 반면 우리가 본대로 암스트롱이 한 일은 자연수 적용의 설명의 난점을 극복하기 위해, 적용에 앞서 이미 주어져 있어야 하는 자연수 자체의 설명을 포기한 것이다.

나는 두 사람의 실패는 그들이 밀에게서 물려받은 유산 자체에 기인한다고 믿는다. 밀의 설명은 바로 자연수들 사이의 합을 부분들의 결합으로 환원하는 데 근거한다. 이 경우 자연수 이론에 적합할 뿐 아니라 그 적용의 설명도 가능하게 해 줄 자연수 설명에 도달하고자 한다면, 우리는 케슬러처럼 부분들의 결합에서 생기는 문제를 변칙 사례로 제외시켜

서는 안 된다. 도리어 그런 사례를 포착하기에 충분한 일반적 설명을 시도해야 한다. 그러면 그런 설명은 어떤 형식으로 제시되어야 하는가? 부분들의 결합 개념에 의존하려 하는 한, 자연수의 합의 설명은 다음 사실을 토대로 삼아야 할 것이다.

(4) a는 $(m+n+r)-t$개의 S를 갖는다 $\leftrightarrow$ $a = b \oplus c$이고, b는 m개의 S를 갖고, c는 n개의 S를 갖고, $b \oplus c$는 b도 c도 갖지 않는 r개의 S를 갖고, b와 c는 t개의 S를 공유한다.

케슬러는 (4)에서 r과 t 모두 0인 경우만 고려하는 셈이다. 그런데 r이나 t가 0이 아닌 경우까지 고려할 때, 임의의 자연수 N과 그것의 후자 N+1의 관계를 적절히 설명할 수 있을까? 아마 한 가지 방법은 (4)의 r과 t 모두 0인 경우와 그렇지 않은 경우를 구분해서 설명하는 일일 것이다. 두 경우의 차이는 암스트롱이 개별화 속성의 분류에 의해 구분하고자 했던 그 차이에 해당할 것이다. 하지만 이런 시도가 성공하기 어려운 이유는 후자 N+1의 설명에서 전자 N을 고정하기 어렵다는 데 있다. 후자 N+1을 설명하기 위해, (i) r과 t 모두 0인 경우와 (ii) 그렇지 않은 경우를 별도로 설명하려 한다고 하자. 그러나 이런 구분은 N+1을 S들의 개수로 갖는 대상만 아니라 그 전자 N을 S들의 개수로 갖는 대상에도 적용되어야 한다. 이 경우 우리는 어떻게 후자관계에 대한 만족스런 설명에 도달할 수 있는가?

나는 부분들의 결합 개념에 의존할 때 (4)를 반영하는 후자관계의 설명이 아예 불가능하다고 주장할 생각은 없다. 다만 그런 설명이 주어진다 해도, 우리는 그런 설명을 자연수에 대한 적절한 설명으로 받아들일 필요가 없다고 생각한다. 그 이유는 두 가지이다. 첫째로, 후자관계의 설명을 어렵게 만드는 (4)의 r과 t의 문제는 자연수를 부분들의 결합에 의존해서 설명하려 할 때 생기는 것이지, 부분들의 결합에 호소하지 않고

자연수들을 설명하려 할 때에는 생기지 않는다. 둘째로, 셈이 가능한 어떤 대상들이나 결합해서 어떤 전체를 형성한다는 무리한 주장에 의존하려 하지 않는 한,[34] 자연수는 부분관계에 있지 않는 대상들의 개수를 정하는 데도 적용된다는 점을 인정해야 한다. 그러므로 자연수 적용을 일반적으로 설명하려면, 우리는 자연수 자체의 설명에서 부분들의 결합이나 부분관계에 의존해서는 안 된다.

2) 부분관계와 자연수

오늘날 논리학 교과서에 나오는 표준적인 후자관계 설명을 고려해 보자.

- $\exists_0 xFx \leftrightarrow \neg\exists xFx$
- $\exists_1 xFx \leftrightarrow \exists x[Fx \rightarrow \forall y(Fy \rightarrow x=y)]$
- $\exists_{n+1} xFx \leftrightarrow \exists x[Fx \ \& \ \exists_n y(Fy \ \& \ x \neq y)]$

이 설명은 부분들의 결합에도 부분관계에도 의존하지 않는다. 그러면 이 설명은 부분관계에 있는 대상들의 개수를 결정하는 데 알맞게 적용될 수 있는가? 이 설명이 전제하는 자연수 적용 진술의 일반형식은 “F인 것이 *n*개 있다”이고, 이것은 “*n*개의 x가 있는데, x는 F이다”로 고쳐쓸 수 있다.[35] 부분들의 개수에 관해 말하는 진술은 “*a*의 부분 중에서 S인 것이 *n*개 있다”는 형식을 가질 것이고, 이것은 “*n*개의 x가 있는데, x는 *a*의 부분이고, x는 S”로 고쳐쓸 수 있다. ‘x는 *a*의 부분이다’를 ‘$x \sqsubset a$’로 고쳐쓴다면, 우리는 부분들의 개수에 대한 다음의 일반적인 설명을 얻을 수 있다.

---

34) 이런 주장에 대한 비판적 논의로는 Simons(2006) 참조.
35) 개수진술에 관한 훌륭한 분석으로서 Rumfitt(2002) 참조.

- $\exists_0 x(x \sqsubset a \ \& \ Sx) \leftrightarrow \neg\exists x(x \sqsubset a \ \& \ Sx)$.
- $\exists_1 x(x \sqsubset a \ \& \ Sx) \leftrightarrow \exists x\{(x \sqsubset a \ \& \ Sx) \rightarrow \forall y[(y \sqsubset a \ \& \ Sy) \rightarrow x=y)]$
- $\exists_{n+1} x(x \sqsubset a \ \& \ Sx) \leftrightarrow \exists x\{(x \sqsubset a \ \& \ Sx) \ \& \exists_n y[(y \sqsubset a \ \& \ Sy) \ \& \ x \neq y)]$

이 설명에서 우리는 두 사실을 주목할 필요가 있다. 첫째로 이 설명은 표준적 자연수 설명의 특수 사례일 뿐이다. 만약 부분들의 개수를 결정하는 일이 문제가 아니라면, 우리는 특별히 술어 ‘F’를 부분관계 표현 ‘x는 *a*의 부분이다’와 속성 부여표현 ‘x는 S를 갖는다’의 연언으로 간주할 필요가 없다. 그러므로 이 설명은 일반적인 자연수 설명을 부분들의 개수를 결정하는 데 적용하기 위한 특수 원리로 간주할 만하다. 둘째로 이 설명에는 ‘x는 *a*의 부분이다’라는 술어는 나타나지만, ‘x는 y와 z의 결합이다’라는 술어는 등장하지 않는다. 그런데 2절에서 본 것처럼 부분들의 결합 관계의 설명은 부분관계의 이해를 전제하지만, 그 역은 성립하지 않는다. 그리고 앞의 설명을 부분들의 개수 결정에 적용하려 할 때, 우리가 문제되는 대상 *a*가 어떤 대상인지 알고 있다면, 우리는 부분관계에 의존해서 임의의 주어진 대상 *b*가 *a*의 부분인지 아닌지 정할 수 있다. 그러므로 앞의 설명이 주어지고 나면, 주어진 어떤 대상 *a*의 부분들이 갖는 S의 개수를 결정하는 데 더 필요한 일은 부분들의 결합이 아니라 부분관계를 이해하는 것이다.

우리는 앞의 설명을 부분들의 개수 결정에 적용되는 일반원리로 간주할 때, 부분들의 개수들의 합에 관한 다음의 일반적 설명을 얻을 수 있다.

- $\exists_{m+n} x[x \sqsubset a \ \& \ (Sx \ \vee \ Tx)] \leftrightarrow \{\exists_m x(x \sqsubset a \ \& \ Sx) \ \& \ \exists_n x(x \sqsubset a \ \& \ Tx) \ \& \ \neg\exists x[x \sqsubset a \ \& \ (Sx \ \& \ Tx)]\}$[36]

36) 이 원리는 여러 대상의 경우도 고려한 다음 원리의 특수 사례이다: $\exists_{m+n} x[(x \sqsubset a$

이 설명 역시 부분들의 결합에 의존하지 않는다. 이는 우리가 부분들의 개수들의 합을 부분들의 결합으로 환원해서 설명해야 할 필요가 없음을 말해준다. 그러면 이 설명을 적용하려 할 때 우리는 부분들의 결합에 의존해야 하는가? 나는 그렇지 않다고 생각한다.

아마 앞의 원리를 적용하려면 부분을 갖는 대상 a의 존재를 전제해야 하고, 그런 대상이 어떤 것인지 확인하려 할 때 우리는 부분들의 결합에 의존하지 않을 수 없다고 생각할지 모른다. 하지만 이런 생각은 나의 견해에 대한 두 가지 오해에 근거하고 있다. 첫째로 나는 여기서 부분을 갖는 대상 a가 그것의 부분들에 의해 결합되어 있음을 부정하는 것도 아니고, 그것이 임의의 두 부분의 결합으로 간주될 수 있음을 부정하는 것도 아니다. 둘째로 나는 부분을 갖는 대상 a가 어떤 부분들로 구성되어 있는지 확인함으로써 a를 확인할 수 있음을 부정하는 것도 아니고, a의 부분들의 결합방식을 확인함으로써 그것을 다른 대상과 구분할 수 있음을 부정하는 것도 아니다. 내가 부정하는 것은 대상 a의 부분들 중 S인 것의 개수를 결정하려 할 때, 반드시 a의 부분들의 결합방식을 확인해야 한다는 주장이다. 나의 주장은 그럴 필요가 없다는 것이다.

왜 그런지 보자. 대상 a가 그것의 두 부분 b와 c에 의해 결합되어 있다는 사실은 대상 a를 임의의 두 부분의 결합으로 인식하지 않는 한 그것을 인식할 수 없다는 것을 함축하지 않는다. 말하자면 "b와 c가 결합되어 a를 형성한다"는 문장이 참이라는 것은 그것의 참을 알지 않고는 a가 어떤 것인지 확인할 수 없다는 것을 말하지 않는다. 도리어 우리는 a가 부분을 갖는 대상이라 할지라도 그것의 부분과 무관하게 a를 인식할 수 있다. 예컨대 2절에서 논의한 500개의 짚 더미의 경우를 보자. 우리는 그것이 어떤 것을 부분으로 갖는지, 그 부분들이 어떤 방식으로 결합되어 있는지 모른다 해도, 나아가 그 부분들이 짚이라는 사실을 모른다

& Sx) $\vee$ (x⊂·b & Tx)] $\leftrightarrow$ {$\exists_m$x(x⊂·a & Sx) &$\exists_n$x(x⊂·b & Tx) & ¬$\exists$x[(x⊂·a & Sx) & (x⊂·b & Tx)]}.

해도, 그것이 개별적인 물질적 대상임을 지각을 통해 알 수 있다. 그런데 중요한 점은 그런 물질적 대상이 몇 개의 짚을 가지고 있는지 결정하기 위해, 그 대상에 관해 우리가 알아야 하는 것은 그것이 전부라는 점이다. 왜냐하면 개개의 짚이 그런 물질적 대상의 부분이라는 것은 부분관계 및 짚이라는 속성에 관한 지식으로 충분히 알 수 있기 때문이다. 이 경우 우리는 앞의 자연수 설명에 따라 그런 대상이 몇 개의 짚을 갖고 있는지 만족스럽게 결정할 수 있다. 그러므로 자연수 적용을 설명하기 위해서라면, 우리는 부분을 갖는 대상을 확인하기 위해 그것의 부분들의 결합관계에 의존할 필요가 없다.

여기서 우리는 결합관계가 부분관계에 의해 정의된다는 사실을 주목해야 한다. 이는 우리가 결합관계를 이해하지 않고도 부분관계를 이해할 수 있음을 전제한다. 그러나 만약 부분을 갖는 임의의 대상 *a*를 확인하기 위해 반드시 그에 앞서 결합관계를 인식하고 있어야 한다면, 부분관계만으로 규정된 재귀원리나 이행원리는 결합관계에 의해 확인되지 않은 대상에 적용할 때 이해 불가능한 것이어야 할 것이다. 이 경우 대상 *b*가 결합관계에 의존해서 확인되지 않았을 때, 예컨대 재귀원리의 사례 '*b*는 *b*의 부분이다'라는 진술은 이해 불가능한 것이 되고 말 것이다. 그러나 앞에서 논의한 도형 A의 경우를 보자. 우리는 그것이 어떤 것을 부분으로 갖는지, 부분들이 어떻게 결합되어 있는지 모른다 해도, 그것이 어떤 모양을 갖는 개별 대상임을 지각을 통해 안다. 이 경우 '도형 A는 도형 A의 부분이다'라는 진술은 이해 불가능한 것인가? 그렇지 않다. 우리가 부분관계를 이해하고 있고, 도형 A가 어떤 모양을 갖는 개별 대상임을 알고 있다면, 우리는 그 진술을 충분히 이해할 수 있다.

따라서 우리는 부분을 갖는 대상 *a*가 그 부분들에 의해 어떤 방식으로 결합되어 있는지 모른다 해도, 원리상 그 대상을 확인할 수 있다. 이 경우 우리는 부분관계 및 개별화 속성 S를 이해할 경우, *a*의 부분들 중 S인 것이 몇 개 있는지 충분히 결정할 수 있다. 이는 앞 절의 도형 A에

관한 암스트롱의 세 주장도 부분들의 결합에 의존하지 않고 표현 가능하다는 것을 말해준다. 우리의 관점에서 보면 암스트롱은 주장 (3)을 통해 “도형 A는 몇 개의 사각형을 갖고 있는가?” 하는 물음에 대해 “도형 A는 세 개의 사각형을 갖고 있다”고 대답하는 셈이다. 마찬가지로 암스트롱은 주장 (2)를 통해, “도형 A는 다른 사각형의 부분이 아닌 사각형을 몇 개 갖고 있는가?” 하는 물음에 대답하려는 것이고, A가 그런 사각형을 두 개 갖고 있다고 대답한 셈이다. 반면 우리의 관점에서 보면 암스트롱은 주장 (1)을 통해 개수진술을 표현하려는 것이 아니다. 도리어 그는 “사각형이 아닌 A의 부분과 서로소인 부분 중에서, 다른 사각형의 부분이 아닌 사각형은 몇 개 있는가?” 하는 물음에 대답하려 한 것이고, “A의 어떤 부분은 사각형이 아니고, 이 부분과 서로소인 A의 부분 중에서 다른 사각형의 부분이 아닌 사각형이 한 개 있다”고 대답한 것이다. 따라서 우리의 관점에서 보면 암스트롱은 주장 (1)을 통해 개수 서술을 구성요소로 포함하는 존재진술을 표현한 셈이다. 이제 우리는 암스트롱의 세 주장을 부분들의 결합에 의존하지 않고 다음과 같이 고쳐쓸 수 있다.

(1b) 어떤 x에 대해, [x는 A의 부분이고, x는 사각형이 아니고, 한 개의 y가 있는데, (y는 A의 부분이고, y는 사각형이고, y는 x와 서로소이고, y는 다른 사각형의 부분이 아니다.)]
$\exists x\{(x \subsetdot A \ \& \ \neg Sx) \ \& \ \exists_1 y[(y \subsetdot A \ \& \ Sy) \ \& \ \neg\exists z(z \subsetdot y \ \& \ z \subsetdot x) \ \& \ \neg\exists w[(w \subsetdot A \ \& \ Sw) \ \& \ (w \neq y \ \& \ y \subsetdot w)]]\}$.

(2b) 두 개의 x가 있는데, x는 사각형이고, x는 도형 A의 부분이고, x는 다른 사각형의 부분이 아니다. $\exists_2 x\{(x \subsetdot A \ \& \ Sx) \ \& \ \neg\exists y[(y \subsetdot A \ \& \ Sy) \ \& \ (x \neq y \ \& \ x \subsetdot y)]\}$

(3b) 세 개의 x가 있는데, x는 A의 부분이고, x는 사각형이다.
$\exists_3 x(x \subsetdot A \ \& \ Sx)$

이제 우리 논의를 정리해보자. 우리가 살펴 본 밀과 그 후예들의 자연수 설명은 자연수들의 합을 부분들의 결합관계로 환원하는 데 의존한다.

그런 환원의 시도는 자연수의 적합한 설명과 그 적용 가능성의 설명을 동시에 성취하기 어렵게 만든다. 그 원인은 부분들이 결합하여 어떤 대상을 형성할 때 개별화 속성을 갖는 부분들이 더 많거나 적을 수 있다는 데 있다. 하지만 이런 난점은 사실 자연수들의 합 자체의 특징과는 무관한 난점이다. 왜냐하면 우리가 자연수들의 합을 부분들의 결합으로 환원하려 하지 않을 때, 그런 난점은 더 이상 생기지 않기 때문이다. 우리는 부분들의 결합만 아니라 부분관계에도 의존하지 않고 산수이론의 자연수들을 설명할 수 있고, 자연수들 사이에 후자관계가 성립한다는 사실도 보일 수 있다. 그러므로 산수이론의 자연수를 설명하기 위해 우리는 부분전체론에 의존할 필요가 없다.

반면 자연수들에 대한 그런 일반적인 설명이 주어져 있을 때, 우리는 자연수들이 대상들의 개수를 결정하는 데 어떻게 적용되는지 적합하게 설명할 수 있다. 특히 세어야 할 대상들이 임의의 어떤 대상 *a*의 부분들일 때, 우리는 자연수 설명과 '*a*의 부분'이라는 속성을 이해함으로써 *a*의 부분들의 개수를 결정하는 일을 충분히 설명할 수 있다. 이 때 우리는 부분들의 결합에 호소할 필요가 없고, 단지 부분을 갖는 대상을 확인하고 부분관계를 이해하면 된다. 그러므로 자연수 자체를 설명하는 일에는 부분전체론에 의존할 필요가 없지만, 자연수 적용을 설명하려 할 때는 부분전체론이 필요하다. 그러나 자연수 적용을 설명하는 데 부분전체론이 필요한 경우는 어떤 대상의 부분들의 개수를 결정할 때뿐이고, 그 때 필요한 것은 부분관계의 이해와 부분을 갖는 대상의 확인이지 부분들의 결합방식의 확인은 아니다.[37]

37) 나는 부분들의 결합관계가 자연수들의 설명과 그 적용의 설명에 필수적인 것이 아니라는 것을 말할 뿐이지, 부분전체론의 전개나 어떤 다른 이론에서 필요 없다고 주장하는 것이 아니다. 나는 도리어 그 개념은 물리량들 사이의 비율을 결정하는 데 필수적이라고 생각한다. 물리량들의 비율 결정은 유리수나 실수의 적용과 관련되어 있다는 점에서, 결합관계는 유리수나 실수의 적용과 관련된 관계이다. 이 점에서 자연수를 실수의 일부로 환원하려는 암스트롱이 부분들의 결합관

계에 의존하려는 것은 이해할 만하다. 이 논문에서 내가 보이고자 했던 것은 그런 환원이 자연수 이론의 적합한 설명을 도리어 방해한다는 것이다. 나는 이 점에서 암스트롱이 의존하는 뉴턴식의 자연수 설명에 대해 프레게가 한 논평은 여전히 가치 있다고 믿는다.[Frege(1884), 19절 참조.]

참고문헌

Armstrong, D. M. & Forrest, P. (1987) “The Nature of Number”, *Philosophical Papers*, 16, 165-186쪽.

Armstrong, D. M. (1989), *A Combinatorial Theory of Possibility*, Cambridge: Cambridge University Press.

______ (2004), *Truth and Truthmakers*, Cambridge: Cambridge University Press.

______ (2005), “Reply to Simons and Mumford”, *Australasian Journal of Philosophy* 83(2): 271-276쪽.

Balaguer, M. (2014), “Mill and the Philosophy of Mathematics: Physicalism and Fictionalism”, in Loizides, A. (ed.) *Mill's A System of Logic: Critical Appraisals*: 83-100쪽.

Bostock, D. (2009), “Empiricism in the Philosophy of Mathematics”, in A.D. Irvine (ed.), *Philosophy of Mathematics*, Amsterdam: Elsevier/North Holland: 157-229쪽.

Dummett, M., (1981), *Frege: Philosophy of Language*, London: Duckworth.

Frege, Gottlob, (1884), *Die Grundlagen der Arithmatik,* Breslau.

Goodman, N. and Leonard, H. S. (1940), “The Calculus of Individuals and Its Uses”, *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 5, No. 2: 45-55쪽.

Irvine, A. D. (2010), “Frege on Number Properties”, *Studia Logica* 96: 239-260쪽.

Kessler, G. (1980), “Frege, Mill, and the Foundations of Arithmetic”, *The Journal of Philosophy*, Vol. 77, No. 2: 65-79쪽.

Lowe, E. J. (2007), “Sortals and the Individuation of Objects”, *Mind & Language*, Vol. 22 No. 5: 514-533쪽.

Michell, J. (2006), *Measurement in Psychology: A Critical History of a*

Methodological Concept, Cambridge University Press.

Mill, J. S. (1882), *A System of Logic: Ratiocinative and Inductive*, Eighth Edition, Harper & Brothers.

Rumfitt, I. (2002), “Concepts and Counting”, *Proceedings of the Aristotelian Society New Series*, Vol. 102: 41-68쪽.

Simons, P. (1982), “Against the Aggregate Theory of Number”, *Journal of Philosophy* 89: 163-167쪽.

______ (1987). *Parts*. Oxford University Press.

______ (2005), “Negatives, numbers, and necessity some worries about Armstrong’s version of truthmaking”, *Australasian Journal of Philosophy*, 83(2): 253-261쪽.

______ (2006), “Real Wholes, Real Parts: Mereology without Algebra”, *The Journal of Philosophy*, Vol. 103, No. 12: 597-613쪽.

Varzi, A. (2016), “Mereology”, http://plato.stanford.edu/entries/mereology/.

Mill and the Theory of Natural Numbers

Park, Junyong (Chungnam National Univ.)

Any adequate explanation of natural numbers should provide at least two kinds of explications. The one is to explicate how our ordinary theory of natural numbers can work. The other is to explicate how we can apply natural numbers for counting ordinary objects. In this paper, I deal with some Millean explanations of natural numbers. Although, as it is well known, Mill's own explanation of natural numbers was severely criticized by Frege, some philosophers still believe that Mill's main thoughts on natural numbers can be fruitfully developed in the context of mereology. I try to show two theses in the following. The first negative one is that it is very hard to provide the above two kinds of explications simultaneously on the basis of Millean mereological theory. The other positive one is that some mereology without mereological sum is still be useful to explicate for counting ordinary objects.

Key words: Natural numbers, Counting, Mereology, Mill, Kessler, Armstrong

박준용 E-mail: noelpark@cnu.ac.kr

투 고 일	2016년 07월 05일
심 사 일	2016년 08월 01일
게재확정	2016년 08월 09일