브라우워의 직관주의와 구성*

김진형**

주제분류 수학철학

주 요 어 정신적 구성, 브라우워, 직관주의, 둘임의 직관, 선택열, 이원진 동수, 비트겐슈타인

요 약 문

필자는 이 글에서 브라우워의 직관주의가 초기 구성주의에 대한 철학적 설명일 수 있다는 점을 보이고, 그것을 계기로 브라우워식 구성 개념이 고전수학에 대해 어떤 함축을 갖는지 살펴보고자 한다. 이를 위해 첫째, 수학은 정신 활동이라는 브라우워의 주장을 몇 가지 관련 개념들을 중심으로 재구성한 후, 둘째, 그것이 어떤 식으로 구성주의 형성에 기여하는지를 살펴볼 것이다. 셋째, 선택열(choice sequence)에 의한 실수 정의를 설명함으로써 브라우워식 구성의 특징을 알아본 후, 그러한 구성 개념에 따르는 것은 고전수학의 진리 개념을 받아들이지 않는 것에 해당한다는 논의와 선택열에 의한 실수 구성이 고전적 정의의 적절한 대안이라는 논의를 함께 살펴볼 것이다. 마지막으로, 브라우워의 실수 구성은 수학적으로 허용될 수 없다는 비트겐슈타인의 반론을 검토해볼 것이다.

* 이 논문을 꼼꼼히 읽고, 유의미한 지적들을 해주신 익명의 심사위원들께 감사드린다. 그 지적들을 반영하였음에도 불구하고 부족하거나 오해의 소지가 있다면, 그것은 전적으로 필자의 책임이라는 점을 밝힌다.

** 서울시립대학교

1

수학에서의 구성주의 흐름을 이끈 주요 인물로는 크로네커(L. Kronecker)와 푸앵카레(H. Poincaré)를 들 수 있다. 전자에 따르면 자연수를 제외한 수학의 모든 대상은 인간의 정신이 만들어내는 것이다. 그리고 후자에 의하면 수학적 귀납의 원리는 수 직관에 의존하기 때문에 수학은 논리만이 아닌 직관에도 의존하는 인식이다.[1] 그러나 이들의 주장으로부터 구성주의의 특징이 무엇인지를 알아내기는 쉽지 않다. 그 이유는 무엇보다, 푸앵카레가 말하는 직관은 자연수를 고려한 것인 반면, 크로네커는 자연수를 정신이 만들어낸 것으로 간주하지 않기 때문이다. 바꿔 말하면, 구성주의 수학의 주요 방법은, 구성되지 않은 비정신적 대상으로부터 유래하기 때문이다. 이는 구성주의에서의 '구성'이 처음부터 다의적인 개념인 이유, 혹은 구성주의 아래에 다양한 주장들이 놓이는 기본적인 이유 한 가지를 설명한다.

이와 관련 다음과 같은 생각이 가능하다. "크로네커에 따르면, 대상들은 자연수들로부터 만들어진 것이다. 이는 그 대상들에 대한 앎이 자연수 직관에 의존한다는 것을 의미한다. 따라서 수학은 직관에 의해 성립하는 인식이다." 그런데 이것이 참이기 위해서는 신이 자연수를 만들 때 그 직관을 우리에게 부여했다는 가정이 참이거나 혹은 우리는 우리의 직관을 통해 정신과 독립적으로 창조된 대상에 접근할 수 있다는 가정이 참이어야 한다. 넓은 의미에서, 보렐(E. Borel)로 대변되는 준직관주의(semi-intuitionism)는 후자를 취한다고 볼 수 있다. 준직관주의자들은, 어떤 대상을 정신적으로 구성하는 것은 곧 직관에 의해 그 대상에 접근하

---

1) 이하 구성주의에 관한 구체적인 언급들은 Troelstra and van Dalen(1988), I장을 참조하기 바람.

는 것이라고 주장하기 때문이다. 이는 수학의 대상이 주관과 독립적으로 존재할지라도 정작 수학에서는 정신적인 구성들만을 다룬다는 것을 의미한다.

그러나 특히 추상적 대상에 문을 열어두는 이러한 입장은, 구성주의가 당시 데데킨트(R. Dedekind)와 칸토르(G. Cantor)에서 촉발된 논리주의적 전통의 반대편에서 형성된 것임을 고려할 때, 철학적인 면에서 치밀하다고 보기 어렵다. 보다 기본적으로는 어떤 대상을 '구성한다'는 것, 즉 '직관에 의해 접근한다'는 말이 왜 그 대상의 정의가 '유한한 단어들로 이루어진다'[2]는 것을 의미하는지 분명치 않다. 구성주의의 기치인 '구성'을 충분히 강하고 분명한 개념으로 보기 어려운 이유이다.

이러한 상황을 고려할 때, 브라우워(L.E.J Brouwer)의 직관주의는 준직관주의를 넘어 구성 개념을 비로소 정초한 이론으로 간주될 수 있다. 따라서 필자는 이 글에서 칸트(I. Kant)의 직관 개념에서 출발한 브라우워의 직관주의가 구성주의를 형성한 두 흐름을 포섭할 수 있다는 점을 보이고, 그것을 계기로 브라우워식 구성 개념이 고전수학에 대해 어떤 함축을 갖는지 살펴보고자 한다. 이를 위해 2절에서는, 수학은 정신 활동이라는 브라우워의 주장을 몇 가지 관련 개념들을 중심으로 재구성한 후, 그것이 어떤 식으로 구성주의 형성에 기여하는지를 살펴볼 것이다. 3절에서는 먼저, 선택열(choice sequence)에 의한 실수 정의를 설명함으로써 브라우워식 구성의 특징을 알아볼 것이다. 그 다음, 그러한 구성 개념에 따르는 것은 고전수학의 진리 개념을 받아들이지 않는 것에 해당한다는 논의와 선택열에 의한 실수 구성이 고전적 정의의 적절한 대안이라는 논의를 함께 살펴볼 것이다. 그리고 4절에서는 브라우워의 실수 구성은 수학적으로 허용될 수 없다는 비트겐슈타인의 반론을 검토해볼 것이다.

---

2) 이는 보렐의 주장으로서, 어떤 대상의 정의는 유한 단계를 거쳐 그 대상이 실제로 그 정의를 만족하는지를 검증할 수 있을 때만 허용된다는 크로네커의 주장보다는 덜 엄격하다고 할 수 있다.

참고로, 직관주의의 구성 개념에 초점을 둔 이 논의는 브라우워의 논리가 직관주의 논리로 나아간 과정을 비판적으로 조망하기 위한 사전 작업임을 밝혀둔다.

2

수학에서 직관의 역할이 결정적이라는 점을 체계적으로 규명한 철학자는 칸트이다.[3] 이 점에서 준직관주의는 칸트를 잇는다고 볼 수 있지만[4] 보다 구체적이고 발전적으로 칸트의 생각을 수용한 것은 브라우워의 직관주의라고 할 수 있다. 구성주의에 대한 브라우워의 기여는 그것과 관련이 있다. 이를 살펴보기 위해 앞에서 본 구성주의자들의 기본 주장이 다음과 같다는 점을 고려해보자.

C1: 수학의 대상은 정신적 구성이다.
C2: 수학의 대상들은 구체적으로(유한 단계로) 정의되어야 한다.

구성주의의 핵심 주장은 C1이며 C2는 C1으로부터 따라 나오는 실천적 주장이라고 할 수 있다. 그러므로 먼저 살펴보아야 할 것은 C1의 의미이다. 그런데 이때의 '구성'이 특정 활동의 결과를 지칭한다는 점을 고려하면 C1은 다음에 의해 함축된다고 볼 수 있다.

C: 수학은 정신 활동이다.

---

3) Kant(1970), B 741 참조.
4) 그러나 그렇다고 해서 직관 개념이 칸트의 것과 같다는 것을 의미하지는 않는다. 예를 들어 푸앵카레의 수 직관 개념은 칸트의 시간직관에 해당하지 않는다. 이와 관련해서는 Goldfarb(1988), 61-81쪽을 참조하기 바람.

그렇다면 C1에서의 '정신적 구성'이 무엇인지를 이해하기 위해서는 '정신이 무엇을 어떻게 하는지'를 살펴보아야 할 것이다. 브라우워의 직관주의는 여기에서 출발한다.

> 수학은 경험과 독립적인 자유로운 활동에 의해 창조된다. 그것은 단 하나의 선천적인 기본 직관으로부터 전개된다. (Brouwer(1907), 97쪽)

> 수학적 구성의 기본 연산은 *앞서 획득된 두 수학적 체계(system)의 둘임(two-ity)을 정신적으로 창조하는 것,* 그리고 이 둘임을 새로운 수학적 체계로 숙고하는 것이다. (Brouwer(1954a), 523쪽, 강조 원저자)

첫 번째 글에 의하면 수학은 선천적인 직관을 토대로 한 활동이다. 그리고 두 번째 글에 의하면 구성의 기본은 둘임들을 정신적으로 창조하는 것이다. 따라서 수학은 기본적으로 선천적인 직관을 토대로 둘임들을 창조하는 정신 활동이라고 할 수 있다. 그러면 이 둘임들은 무엇이며 또 그러한 창조는 왜 정신 활동인가? 이를 위해 선천적인 기본 직관과 둘임들에 관한 다음 글을 보자.

> 신직관주의는 삶의 계기(moments)가 질적으로 서로 다른 부분들, 즉 시간적 분리 상태인 동안에만 다시 결합되는 부분들로 나뉘는 것을 인간지성의 근본 현상으로 간주한다. 그 부분들은 정서적 내용의 추상을 통해(by abstracting) 수학적 사유의 근본 현상인 순수한 둘임(bare two-oneness)의 직관이 된다.[5] 이 둘임의 직관, 수학의 기본 직관은 수 1,2를 창조할 뿐만 아니라, 둘임을 이루는 한 원소는 새로운 둘임으로 사유될 수 있으므로, 모든 유한서수를 창조한다. 이 과정은 무한정 반복될 수 있다. 그 결과 최소무한서수 ω도 산출한다.

5) "수학적 행위가 완전히 이루어질 수 있는 것은 ...... *수학적 추상*(mathematical abstraction)이 제 기능을 발휘할 때다." Brouwer(1929), 46쪽. 강조는 원저자.

(Brouwer(1912a), 127-128쪽)

편의상 문장들 별로 살펴본다면 먼저, 선천적인 기본 직관은 두 번째 문장의 순수한 둘임의 직관(이하, 둘임의 직관)[6]을 지칭한다. 따라서 앞에서 말한 기본 연산으로서의 둘임들의 창조는 바로 이 둘임의 직관에 의거한 활동에 해당한다. 그런데 세 번째 문장에 의하면 그 적용 결과로서의 둘임들 각각은 개별적인 수들 1,2,3...에 해당한다.[7] 즉 둘임들이란 바로 자연수들이다. 그리고 끝의 두 문장은 기본 연산을 '무한정 반복'함으로써 자연수 무한을 창조한다는 내용이다. 브라우워는 이 추가적인 연산과 관련 다음과 같이 말한다.

> 수학에서는 유한열만을 창조할 수 있으며, 분명하게 파악된 '등등(and so on)'에 의해 순서형 ω를 창조할 수 있다. (Brouwer(1907), 80쪽)

자연수 무한이 '등등'을 적용한 결과임을 뜻하는 이 글에 따르면, 자연수란 결국 둘임의 직관과 '등등'을 적용하는 연산[8]에 의해 구성된다고 말할 수 있다. 여기서 자연수 이외의 대상들은 자연수로부터 창조된다는 점을 고려하자.[9] 그러면 C1에서의 '구성'은 '선천적인 둘임의 직관을 토대로 창조한 자연수와 그것들로부터 창조한 대상들'을 의미한다.

---

6) 브라우워는 이것을 'unity in multitude'와 'invariance in change'라고 설명한다.
7) 자연수 구성에 대해서는 Brouwer(1908a), Brouwer(1933)과 van Atten(2002)을 참조하기 바람.
8) 브라우워는 Brouwer(1907), 77쪽 각주2)에서 이 '등등'을 직관으로 부른다. 그 적용을 연산으로 부르는 이유에 대해서는 Brouwer(1907), 80쪽의 각주1)과 Brouwer(1912a), 128쪽을 참조하기 바람.
9) 브라우워에 의하면 수학의 모든 집합들은 '유한 서수 창조'와 '무한 서수 창조'라는 두 연산을 결합함으로써 얻을 수 있으며 그러한 의미에서 그 집합들은 둘임의 직관으로부터 창조된다. Brouwer(1912a), 128쪽 참조.

이제 그러한 창조가 정신 활동인 구체적인 이유를 보기로 하자. 이는 직관의 본성에 관한 것으로서 브라우워의 철학에 직결된다. 우선 브라우워에 의하면 둘임의 직관은 그 기원을 고려할 때 시간 직관이다. 왜냐하면 앞의 인용문 첫 문장에 언급된 '삶의 계기의 분리'는 다음에서 말하는 시간 지각(time awareness)에 해당하기 때문이다.[10)]

> 시간 지각은 삶의 계기가 질적으로 다른 두 사물로 나뉘는 근본적인 지적 현상이다. 그 가운데 하나는 다른 하나에 자리를 내어주되 기억 행위에 의해 유지된다. (Brouwer(1929), 45쪽)

그런데 이 시간 지각은 지적 현상이되 외적 경험과는 독립적인 것으로 간주된다. 왜냐하면 그것이 '의식(consciousness)'에서 비롯되기 때문이다.

> 의식은 심연(the deepest home)에서 평정(stillness)과 감각(sensation) 사이를 천천히, 무의지적으로 그리고 가역적으로 진동한다. 그리고 감각 상태만이 (의식이 외부 세계에로 나아가는) 변이의 최초 현상을 허용한다. (Brouwer(1948c), 480쪽. ( )는 필자의 추가)

즉 시간 지각은 본질적으로 내적 의식 현상이라는 것이다. 이는 그것을 기원으로 하는 둘임의 직관이 선천적이라는 것[11)]을 설명하는 것과 동시에 수학의 대상을 창조하는 주체에 관한 앞의 물음에 대한 답을 제공한다. 위 인용문에 이어지는 다음 글을 보자.

> 의식은 ...... 과거와 현재 사이의 구분을 통해 그것들로부터 물러나고 또한 평정으로부터 멀어지며 그 결과 *정신*(mind)이 된다.

---

10) Brouwer(1907), 60-61쪽과 Brouwer(1912a), 127쪽을 참조하기 바람.
11) 필자가 아는 한, 이에 대한 브라우워의 직접적인 논의는 없다. 그러나 필자는 그가 고려하고 있는 의식 개념으로부터 충분히 추론될 수 있다고 생각한다.

여기에서 언급된 ‘과거-현재 구분’은 바로 앞글의 ‘최초 현상’에 해당하며 따라서 시간 지각을 의미한다. 이 점을 고려하면 이때의 의식은 그 시간 지각이 이미 일어난 상태, 즉 변이의 두 번째 단계의 의식이라고 할 수 있다. 브라우워는 바로 그 의식을 ‘정신’이라고 부른다.12) 이제 여기서 시간 지각을 추상한 결과가 둘임의 직관이라는 점을 고려해보자. 그러면 이때의 추상은 당연히 두 번째 단계에서의 의식의 작용이다. 바꿔 말하면 추상은 정신 활동이다. 따라서 둘임의 직관이 추상의 결과이고 그것으로부터 자연수와 다른 대상들이 창조된다면 이러한 창조는 분명히 정신 활동이다.13) 이를 고려하면 앞의 물음에 대한 답은 ‘둘임의 직관이 의식 현상이기 때문이다’가 된다. 그리고 C는 구체적으로 다음과 같은 의미이다. ‘수학은 둘임의 직관과 ‘등등’ 연산을 적용하는 정신 활동이다.’

이러한 논의를 고려하면 C1은 당연히 ‘수학의 대상은 둘임의 직관과 ‘등등’ 연산을 적용한 결과이다’는 주장이 된다. 그러면 이 브라우워식 C1은 과연 데데킨트와 칸토르를 고려했던 구성주의의 본래 취지를 강화하는가? 이미 보았듯이 둘임의 직관은 근본적으로 의식 현상이라는 점에서 칸트의 직관 개념과 뚜렷이 다르다. 즉 그것은 선천적 시간직관이라는 점에서 칸트를 따르지만, 그렇다고 해서 질료를 전제로 하는 감성의 형식과 같은 것이 아니다. 이는 어떤 대상을 창조한다는 것과 그 대상을 안다는 것이 구분되지 않음을 의미한다.14) 이 점을 고려하면 C1은 ‘자연

12) 이는 논의의 목적상 의식 개념을 중심으로 한 설명이다. 보다 직접적인 설명은 다음과 같다. “정신의 기원은 시간 흐름의 지각, 즉 삶의 순간이 질적으로 다른 두 사물로 나누어짐의 지각이다. 두 사물 가운데 하나는 다른 하나에 자리를 내어주되 기억 행위에 의해 유지된다.” Brouwer(1952b), 510쪽. 한편, 정신은 인간 지성(the human intellect) 혹은 인식 주관(the knowing subject)에 해당한다.

13) 브라우워는 정신이 수학적 인식의 주체라는 점에서 모든 인식은 수학에 토대를 둔다고 주장한다. 이와 관련된 주요 개념은 수학적 주의력(mathematical attention) 또는 수학적 봄(mathematical viewing)이며, 해당 논의는 특히 Brouwer(1929), Brouwer(1948c)를 참조하기 바람.

수를 포함한 수학의 모든 대상은 인식주관, 즉 정신과 독립적으로 존재하지 않는다'는 주장을 함축하며, 따라서 '직관이 정신과 독립적인 존재에 어떻게 접근하는가?'와 같이 준직관주의를 약화시키는 물음은 발생하지 않는다.[15]

이제 C2를 보기로 하자. 그에 앞서 한 가지 살펴볼 것은 C1은 자연수뿐만이 아닌 다른 대상들에도 해당되며 그 대상들은 일반적으로 정의(definition)를 통해 도입된다는 점이다.[16] C를 고려하면 이는 한 대상을 정의하는 것 역시 정신 활동임을 의미한다. 그런데 정의는 주어진 이론체계의 언어에 의존하므로 그것이 직관에 의존하는 정신적 구성에 해당한다고는 생각되지 않는다. 이와 관련 다음을 보자.

> ......수학적 정의는 기억과 의사소통을 가능한 효율적으로 돕는 수단이어야만 한다. 정의 체계에는, 더 이상 단순화해서는 안 되고 의사소통에서는 별도의 단어 혹은 기호를 통해 이해되어야 하는, 수학적 구성 요소들이 존재한다. 그것들은 기본직관 혹은 연속체 직관에서 곧장 파악된다. (Brouwer(1907), 97쪽)[17]

이 글에 의하면 정의에서 언어는 구성 요소들을 표현할 뿐 그 자체가 구성에 관여하지 않는다는 것이다.[18] 이를 고려하면 정의가 정신적 구성

14) 브라우워에 의하면 둘임의 직관에 의해 자연수가 창조된다는 것은, 그것들이 직관적으로 분명하다는 것을 의미한다. Brouwer(1907), 15쪽 참조. 인식의 확실성에 관한 이러한 식의 접근으로는 데카르트의 방법적 회의와 후설의 현상학적 환원을 들 수 있다. 특히 후자와 브라우워 철학에 관한 논의는 다른 지면에서 다룰 것이다.

15) 이와 더불어, 예컨대 대상의 존재를 직관이 아닌 논리적 무모순성에서 찾는 푸앵카레의 경우는 직관과 논리의 연결을 설명하기 어렵다. 이와 관련 브라우워는 Brouwer (1907), 96쪽에서 푸앵카레의 생각이 일관적이지 못하다고 지적한다. 이러한 식의 지적은 특히 Troelstra and van Dalen(1988), 19쪽을 참조하기 바람.

16) Brouwer(1907), 16쪽 참조.

17) 그와 같은 요소는, '연속성continuous', '실재물entity', '반복once more', '등등and so on'과 같은 개념들이다.

인 이유는 그 자체에 있는 것이 아니라 단지 그것이 구성 요소들로부터 가능한 정신 활동을 표현하기 때문이라고 이해할 수 있다. 예컨대 D가 대상 O의 정의라고 하자. 그러면 D는 그 정의항(definiens)이 피정의항 O를 산출하는 특정 정신 활동, 예컨대 둘임의 직관과 '등등' 연산의 조합에 의한 어떤 연산의 기술(description)이라는 의미에서 정신적 구성이다. 이는 그러한 기술을 정의항으로 갖지 않는 정의는 순전히 언어적인 것으로서 정신적 구성이 아님을 의미한다.[19)]

방금 전의 논의는 정신적 구성으로서의 정의는 그 정의항이 정신 활동의 기술이라는 것이다. 그러면 앞에서 본 구성의 특성을 고려할 때 두 가지 사실이 성립한다. 첫째는 정의항이 기술하는 연산은 유한 단계의 절차라는 것이고 둘째는 바로 그러한 이유에서 정의항은 유한한 단어들로 이루어진다는 것이다. 이 사실들을 고려하면 정의에 관한 크로네커와 보렐의 조건에 해당하는 C2가 왜 참인지는 쉽게 알 수 있다. 브라우워의 직관주의가 구성주의의 구성 개념을 충분히 설명한다고 보는 이유이다.

그러나 이것이 브라우워의 직관주의가 곧 구성주의에 해당한다는 것을 의미하지 않는다. 왜냐하면 그의 구성 개념은 C1에서의 그것보다 넓은 뜻을 갖기 때문이다. 이는 시간 직관이 자연수 구성만이 아닌 실수 구성의 기초이기도 하다는 것과 밀접한데, 거기에는 직관주의 특유의 철학적 입장이 놓여있다. 다음 절에서는 이 점을 살펴보기로 한다.

18) 브라우워는 수학을 무언적인 정신 활동으로 본다. Brouwer(1947), 477쪽., Brouwer(1952b), 510쪽.

19) 이와 관련된 주장은 다음과 같다. "...수학에서 *존재한다*는 것은 다음을 뜻한다. 직관에 의해 구성된다. 그러므로 존재에 상응하는 어떤 언어가 모순적인지 여부를 묻는 것은 그 자체로 중요하지 않을뿐더러, 수학적 존재를 확인해주는 테스트도 아니다." Brouwer(1907), 96쪽, 강조 원저자.

3

잘 알려진 것처럼 브라우워는 선택열(choice sequence)로 실수를 정의한다.[20] 먼저, 선택열이란 각 항이 자연수에서 자유롭게 선택되어 형성되는 열로서 예컨대, <1, 2, 1, 1>로 시작하되 그 후속항이 특정한 법칙에 의해 미리 결정되어 있지 않는 열들, <1, 2, 1, 1, 3>, <1, 2, 1, 1, 2> 등등이 그것이다. 물론 이때의 자유가 무작위(random)를 뜻하지는 않기 때문에 선택열은 다음과 같은 의미에서 자유롭게 전개하는 열이다. 첫째, 그 항들의 전개에 있어 특정 단계부터는 어떤 조건에 귀속될 수 있으며 더 나아가 둘째, 그러한 경우에도 어느 단계에서는 그 조건에 따르지 않을 수 있다. 물론 이때 각 후속항들은 무한히 전개될 수 있다. 브라우워는 이처럼 그 항이 무한히 전개되면서 그 두 성질을 갖는 열을 '무한진행열(infinitely proceeding sequence)'이라고 부른다.

> 무한진행열, p1, p2,…. 이때 각 항은 앞서 구성한 수학적 대상들 중에서 어느 정도 자유롭게 선택된 것들이며 그 선택 방식은 다음과 같다: 최초의 원소 p1에 대해 존재할 수 있는 선택의 자유는 p1에 이어지는 임의의 항 pv에서 영속적인 어떤 제한조건에 종속될 수도 있으며, 보다 더 강한 영속적 제한조건에 반복적으로 종속되거나 아니면 다른 후속항들에서는 폐기될 수도 있다. (Brouwer(1952b), 511쪽)

그러면 이 무한진행열, 즉 선택열은 어떤 방식으로 실수를 정의하는가? 먼저 고려해야 할 점은 위에서 본 <1, 2, 1, 1, 2> 등과 같은 선택

20) 브라우워의 시도는 법칙적인(lawlike) 열만으로는 실수를 정의할 수 없기 때문에 법칙적이지 않은(non-lawlike) 열이 필요하다는 사실에서 출발한다. 선택열의 기원과 그 전개 과정에 대해서는 Troelstra(1969)와 특히 Troelstra(1982)를 참조하기 바람.

열 그 자체로는 실수가 정의되지 않는다는 것이다. 왜냐하면 이때의 '선택'은 언제나 '…에 대한' 것[21]으로서 임의의 수학적 대상 '…'을 고려하기 전의 열은 단지 빈 열이기 때문이다. 따라서 브라우워의 생각은 '…'에 해당하는 것이 가령 구간 [0, 1] 내의 유리수들인 경우 그 결과인 유리수열이 실수를 정의한다는 것이다.

다음으로 고려해야 할 것은 그러한 선택은 자유롭지만 무작위적이지 않다는 것이다. 그 이유는 앞에서 보았듯이 인식주관으로서의 정신은 능동적이고 구체적인 창조의 주체이며 선택은 바로 그 활동의 한 양상이기 때문이다. 즉 자유는 무작위를 함축하지 않는다. 그렇다면 문제는 선택이 무작위적이지 않을 실질적인 조건, 바꿔 말하면 가능한 선택지들로부터 수학적으로 유의미한 열을 형성하는 조건이 무엇인가이다. 브라우워에 따르면 그 조건은 선택이 적용되는 대상들에서 기인한다. 예컨대 어떤 선택열의 시편(initial segment) <1, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1>이 [0, 1] 내의 유리수들 중 자연 순서를 고려한 다음 열에 대한 것이라면 후속항의 선택은 그 자연 순서를 고려하여 이루어져야 한다는 것이다. 즉

$$0, \quad 1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{2}{5}$$

이라면 10번째 선택은 자연적 순서에 따른 그 다음 항 3/5에 대한 것이어야 하며 따라서 그러한 경우 또 오직 그 경우에만 가령, 열 <1, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, **3**>은 수학적으로 유의미하다는 것이다.

이제 다음을 위에서 본 두 가지 사항을 고려한 열이라고 하자.[22]

21) 이는 앞의 각주 13)에서 언급한 의식, 혹은 정신의 본성인 수학적 주의력을 고려한 필자의 해석이다. 필자는 실수 구성의 토대인 연속체 직관의 기원이 시간직관이라는 브라우워의 주장, 혹은 시간직관의 분극성(polarization)은 이 해석을 고려할 때 일관적으로 설명될 수 있다고 생각한다. van Atten(2004), 4-5쪽 참조.

22) 이하의 설명은 Heyting(1931)을 참조하기 바람. 그리고 관련된 브라우워의 논의

$$\lambda = \begin{array}{ccccccccc} 0, & 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{2}{3}, & \frac{1}{4}, & \frac{3}{4}, & \frac{1}{5}, & \frac{2}{5} \\ 1, & 2, & 1, & 1, & 2, & 1, & 2, & 1, & 1 \end{array}$$

즉 λ는 선택열의 시편 <1, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1>이 [0, 1] 내의 유리수들에 적용된 것이다. 이제 1, 2, 3을 그것에 할당되는 대상을 각각 ‘왼쪽’, ‘오른쪽’, ‘미결정’ 상태로 두는 선택이라고 하자. 그러면 λ는 각 항으로 등장한 유리수들 중에서, 1/2과 같거나 작은 모든 유리수들에는 1이, 2/3와 같거나 큰 모든 유리수들에는 2가 할당되었음을 보여준다. 물론 이후에 등장하는 유리수들 중 [1/2, 2/3] 내의 수들을 제외한 나머지 수들에 대해서도 성립한다. 즉 (0, 1/2)와 (2/3, 1) 내의 수들에 대한 선택은 결정되어 있다.

브라우워에 따르면 이 열을 시편으로 하는 선택열은 구간 [1/2, 2/3]의 실수들 혹은 연속체를 정의한다. 왜 그러한가? 이에 대해서는 다음 사실들만을 고려하면 충분하다. λ의 각 후속항으로 1, 2, 3 중 어느 것을 선택하느냐에 따라 서로 다른 구간들이 형성된다. 각 선택이 단계적으로, 그러면서 무한히 진행될수록 형성되는 구간들의 길이는 0에 수렴한다. 그런데 어떤 것이 구간인 경우 그 안에는 적어도 하나의 수가 존재한다.

이 사실들로부터 따라 나오는 결론은, 선택으로 형성되는 축소 구간(nested interval)들의 열들 각각에 하나의 수가 대응된다는 것이다. 물론 이때 그 수가 어떤 것인지는 어떤 선택을 하느냐에 의해 결정된다. 따라서 λ가 구간 [1/2, 2/3] 내의 유리수들에 대한 그 선택 가능성을 나타낸다면 그것은 그 구간 내의 모든 실수를 정의한다.[23)]

는 Brouwer(1930)의 I절을 참조하기 바람.

23) 이에 해당하는 개념이 바로 ‘펼침(spread)’으로서 그것은 두 종류의 펼침 법칙에 의해 형성되는 열을 원소로 갖는 집합Menge으로 정의된다. 그 법칙들은 필자가 본문에서 λ에 대해 고려한 두 가지 사항에 해당하는 것이다. 한편, 지금까지의

그러면 이 선택열에 의한 실수 정의는 어떤 면에서 정신적 구성인가? 먼저 선택이 '…에 대한' 정신 활동이라는 점을 들 수 있다. 이것은 주어진 대상에 대한 단계적인 연산을 통해 새로운 대상을 산출한다는 구성의 기본 연산의 조건이다. 또한, 선택열이 자연수 구성이 함축하는 잠재적 무한(potential infinity)의 사례라는 점도 그 이유가 된다. 또 다른 이유로는 각 선택을 결정하는 조건의 성질이 언제나 수학적이라는 것이다. 즉 선택은 언제나 기본 연산을 원형으로 하는 정신 활동, 예컨대 π의 소수 전개 계산에 의존한다.[24] 그러나 근본적인 이유는 그것이 직관을 토대로 한다는 데에 있다.

앞에서 보았듯이 선택열에 의한 정의는 실수를 이산적인 개별자들로 특정(specify)하지 않는다. 오히려 그것은 실수를 연속체의 본성을 보존하면서 무한히 축소하는 '구간'으로 특정한다. 이는 이산적 대상들이 연속체를 형성하는 것이 아니라 단지 연속체 위에서 구성될 뿐이라는 것을 의미한다. 이에 관한 브라우워의 설명은 간략히 다음과 같다.[25] 연속체 위에서 임의의 두 원소 사이에 한 점 p를 놓는다. 그러면 p를 제외한 나머지 점들을 선택하는 것[26]은 무한히 진행될 수 있다. 그런데 이것은 반대로 다음을 뜻한다. 어느 한 무한진행열이 주어질 경우 연속체 위에는 그 열에 의해 규정되는 한 점이 존재한다. 그러면 이것이 가능한 이유는

논의를 고려하면 펼침 법칙은 선택을 포함한 정신 활동 혹은 λ와 같은 열을 형성하는 연산의 기술이라고 할 수 있다. 그리고 그러한 의미에서 실수에 의한 정의는 C1에서 언급된 정신적 구성이다. 펼침에 관한 자세한 이해는 Brouwer (1925a), 244-245쪽, Heyting(1966), 34-35쪽; Parsons(1966), 447쪽과 van Atten(2004), 41-43쪽을 참조하기 바람.

24) 브라우워에 의하면 '3+4=7'과 같은 산술은 물론 "π의 소수 전개에서 동일한 숫자 쌍은 무한히 나타나는가?" 의 답을 찾는 것 또한 정신 활동, 즉 구성이다. Brouwer(1907), 15쪽, Brouwer(1908c), 110쪽 참조. 이것은 증명에 해당하는 것으로서 이에 대한 논의는 글의 목적상 다루지 않고 있다.

25) Brouwer(1930a), 58쪽.

26) 좀 더 정확히 말하자면 이때의 선택은 p를 포함하는 축소 구간을 형성한다.

무엇인가?

> 연결과 분리, 연속과 이산이 통합되는 수학의 이 기본 직관은 곧장 선형 연속체 직관, 즉 ‘사이(between))’ 직관을 산출한다. 이 사이 직관은 새로운 단위들의 삽입에 의해 채워질 수 없으며 따라서 결코 단위들의 단순한 집합(collection)으로 사유될 수 없다.
>
> (Brouwer(1912a), 128쪽)

이 글에 의하면 연속체는 시간직관에 그 기원을 둔 ‘사이’ 직관이며 이산적 개별자들의 전체가 아니다. 이에 덧붙여 브라우워는 그 근본 성질이 다수의 삽입을 무한이 허용하는, 따라서 그 부분으로서 또 다른 사이를 낳는, 일종의 매트릭스라는 데에 있다고 말한다.[27] 예컨대 점 p와 같은 단위(unity) 혹은 개별자를 삽입하고 그것에 대한 나머지 점들의 삽입을 무한히 진행할 수 있는 이유가 그 성질 때문이라는 것이다. 이제 여기서 앞의 열 λ를 고려하면 삽입 결과인 부분(part), 따라서 그 역시 전체와 동질적인 ‘사이’는 수학적 개념인 유리수 ‘구간’에 해당한다. 그러므로 축소 구간열로 한 실수를 정의한다는 말은 이러한 의미에서, 연속체 위에서 한 개별자를 구성한다는 말과 같다.[28]

그러면 실수, 더 나아가 순수 수학 전체가 기본 직관(즉 둘임의 직관)으로부터 구성된다[29]는 이러한 논의를 통해 브라우워가 말하려는 바는

27) 연속체의 이러한 특징들에 관한 설명은 Brouwer(1907), 17-18쪽., 44-47쪽을 참조하기 바람.

28) 브라우워는 실수를 무한진행 축소 구간열 자체로 간주한다. (BMS37), 473쪽. 이는 축소구간이 매트릭스로서의 연속체의 성질에서 기인한다는 점을 고려한 것으로 볼 수 있다. 한편, 연속체 직관과 ‘구간’ 개념의 이러한 관계는 실수의 인식적 근거가 무엇인지를 말해준다. 점 p를 예로 든다면, p의 인식 내용은 그것을 포함하는 유리수 구간의 인식 내용에 해당하며, 이것은 다시 그 유리수 구간을 형성하는 무한진행열의 인식 내용에 해당한다. 그런데 무한진행열은 매트릭스로서의 연속체라야 가능하다는 점에서 결국 점 p들에 대한 인식 근거는 연속체라고 할 수 있다.

29) “......그 직관은 자기 전개를 통해 사유 실재(reality)로서의 무한을 도입, 자연수

무엇인가? 그것은 무엇보다 수학은 논리-언어적 구조물(logical linguistic structures)이 아니라는 것이다. 왜냐하면 직관으로부터의 창조 또는 인식 주관의 선택이 고려된 자유로운 창조는 결코 언어적 활동이 아니기 때문이다.[30] 이는 그가 데데킨트(R. Dedekind)와 칸토르(G. Cantor)로 대변되는 당시의 논리주의적 전통의 대척점에 서 있었음을 뜻하는데, 그 양상이 직접적이고 구체적인 모습을 보인 곳이 바로 실수 개념이다.

브라우워에 의하면 데데킨트의 절단(Dedekind's cut)과 칸토르의 대각선 논법(Cantor's diagonal argument)은 실수를 구성하는 방법이 아니다. 단지 그것은 실수의 비가부번성(non-denumerability)을 보이는 방법일 뿐이다. 그의 요점은 그 기수에 해당하는 대상, 예컨대 '이급 순서수 집합(the second number class)'은 수학적 실재성이 없는 언어적 표현에 지나지 않는다는 것이다.[31] 그 이유는 간단하다. 그 정의들이 직관으로부터는 구성할 수 없는 무한, 그러나 명제함수(propositional function)를 통해 도입된 실무한(actual infinity)을 전제하기 때문이라는 것이다.[32] 실무한에 관한 데데킨트의 생각은 다음에서 알 수 있다.

> 정리 66. 무한한 계는 존재한다. 증명: 나의 사유 세계, 즉 사유의 대상이 될 수 있는 모든 것들의 총체는 무한하다. .....
> (Dedekind(1888), 806-807쪽)

집합(collection)을 산출한다. 또한 그것은 실수를 산출하며 궁극적으로는 순수 수학 전체를 창조한다." (Brouwer(1929), 46쪽.)

30) Brouwer(1952b), p. 510. 한편, 수학과 언어의 관계에 대한 논의는 다음을 참조하기 바람. Brouwer(1905), 395쪽., 401쪽., Brouwer(1907), 73쪽., Brouwer(1908c), 108쪽., Brouwer(1929), 48쪽., Brouwer(1948c), 480-481쪽., 485쪽.

31) 여기서 말하는 이급 순서수는 ω보다 큰 수를 일컫는다. 한편, 브라우워에 따르면 대각선 논법은 가정된 어떤 집합이 가부번 미종결(denumerably unfinished)이라는 것을 말해 준다. Brouwer(1907), 82쪽.

32) 그에 의하면 실무한은, 러셀의 역설로도 알 수 있듯이, 기이한 허상(chimerical everything)이다. 관련된 구체적인 언급들은 Brouwer(1907), 76쪽., 77쪽의 각주 2), 81쪽., 88-89쪽을 참조하기 바람.

한편, 잘 알려져 있듯이 데데킨트는 수학적 진리란 논리적 추론으로 환원될 수 있다고 본다.[33] 이를 고려하면 수학의 진리는 실무한을 전제로 논리적인 추론을 통해 얻는 귀결들의 전체이며, 그러한 의미에서 수학은 논리적 대상들과 원리들의 체계라고 할 수 있다. 그런데 브라우워는 이 정리 66을 받아들이지 않는다.[34] 이는 그가 수학의 본성과 진리에 관한 데데킨트의 생각, 달리 표현하면 수학은 논리-언어적 구조물이라는 생각이 유지될 수 없다고 보았음을 의미한다. 이 점을 고려하면 선택열에 의한 실수 정의는 결과적으로, 수학은 정신 활동이라는 기본 주장을 강화하는 구체적인 사례가 된다. 이제 그것이 수학적으로 적법한 대안인지를 간략히 살펴보기로 하자.[35]

선택열, 즉 무한진행열에 의한 정의는 쉽게 알 수 있듯이 무엇보다 데데킨트의 정의가 안고 있는 몇 가지 문제들에서 자유롭다. 이를 위해 데데킨트의 무리수 증명[36]에 담긴 중심 생각 하나를 다음과 같이 정리해보자.

> 어떤 수 β는 절단을 형성하는 두 유리수 집합 중, 어느 것의 원소도 아니다.
> 유리수는 조밀하지만 연속적이지 않다.
> 따라서 실수의 연속성은 β에 의존한다.

먼저 첫 번째 전제는 참이 아니다. 왜냐하면 그것이 참이기 위해서는 모든 수에 대해 그 절단을 정의할 수 있어야 하는데, 예컨대 오일러 상

---

33) 이러한 입장에 따르면, 수학적 참에 대한 우리의 믿음은 결코 내적 직관에 의해 얻어지지 않는다. Dedekind(1888), 791쪽 참조.

34) 정리 66에 대한 반론은 특히 다음을 참조하기 바람. Brouwer(1907), 77쪽의 각주2). 그리고 데데킨트 등의 연속체 이론에 대한 세부적인 반론은 Brouwer(1930), II절을 참조하기 바람.

35) 세부적인 논의는 Brouwer(1930)을 중심으로 연속체 이론 전반을 폭넓게 천착해야 한다. 하지만 그것은 이 글의 범위를 넘어서므로 생략하기로 한다.

36) 특히 Dedekind(1872)의 §4와 §5를 참조하기 바람.

수(Euler-Mascheroni constant) ɣ의 경우, 임의의 유리수 a 대한 삼중률(a <ɣ ∨ a=ɣ ∨ a>ɣ)이 성립하지 않기 때문이다.[37] 설령 그 가정이 참이라 해도 잘 알려진 이유로 인해 사정은 마찬가지이다. 먼저 β를 창조하는 그 절단을 형성하는 두 유리수 집합을 편의상 L과 R이라고 하자. 첫 번째 전제를 따르면 L의 최대값과 R의 최소값은 존재하지 않는다. 그런데 이것은 예컨대 L의 어느 원소보다 큰, 그러면서도 β보다는 작은 어떤 유리수 a가 언제나 존재한다는 진술이 참일 경우에만 참이다. 하지만 a 자신이 이미 L의 원소이므로 그 존재진술은 참이 아니다. 끝으로 결론을 보면 그 내용은 β가 무리수임을 고려할 경우 실수가 연속체인 이유는 무리수에 있다는 것이다. 그러면 어떤 이유에서 무리수가 연속성을 주는가? 데데킨트의 증명은 무리수와 유리수의 차이, 즉 유리수는 두 정수의 비로 나타내어지는 반면 무리수는 그렇게 정의될 수 없다는 데에서 출발한다.[38] 이는 그가 무리수를 유리수라는 이산적인 단위들과는 다른 이질적인(heterogeneous) 그 무엇으로 간주한다는 것을 의미한다. 비유적으로 그것을 '틈(gap)'이라고 하자. 그러면 데데킨트의 증명은 실수의 연속성이 틈에 있음을 보여준다. 하지만 틈은 왜 연속적인 것인가? 만일 유일한 설명이 실수가 연속체라는 가정이라면, 데데킨트의 증명은 순환적이다.

이와 달리 선택열에 의한 정의는 논리, 즉 삼중률을 요구하지 않는다. 왜냐하면 앞서 본 λ를 시편으로 하는 열이 ɣ를 포함하는 축소구간들의 열이라고 할 때, 각 항이 되는 축소 구간은 실제 계산되는 ɣ의 값만으로 결정되기 때문이다. 다시 말해서, λ에서 각 항은 그 값을 고려한 자유로운 선택의 결과이기 때문이다. 따라서 이 정의는 ɣ와 같은 특성의 모든 실수, 그러나 절단으로는 정의할 수 없는 수들에 대한 적절한 정의이다.[39] 같은 맥락에서, 브라우워의 실수 정의는 데데킨트 절단을 형성하는

---

37) 이 예에 대한 자세한 논의는 Heyting(1931)을 참조하기 바람.
38) Dedekind(1877), 57-8n쪽. Yap(2009), 160쪽.
39) 이러한 의미에서 브라우워의 정의는 데데킨트 절단의 직관주의 버전이다. 한편,

유리수 무한에 관한 두 번째 문제를 고려할 필요가 없다. 그 이유는 간단하다. 무한 진행하는 n 단계의 구간 [an, bn]은 언제나 n-1 단계까지의 전개에서 등장한 ‘모든’ 유리수들로 형성되기 때문이다.[40] 끝으로 브라우워의 정의가 연속성에 관한 문제에 빠지지 않는 이유는 분명하다. 앞에서 보았듯이 이산적인 수들이 연속체를 형성하는 것이 아니라 다만 **주어진** 연속체 위에서 구성되기 때문이다.

끝으로, 브라우워는 선택열로 정의하는 실수가 가부번이 아니라는 것을 증명함으로써 자신의 정의가 고전적 정의의 적절한 대안임을 분명히 한다. 그의 증명은 선택열에 대해서 그가 고려하는 다음 두 가지 성질과 관련이 있다. 첫째, 그 열의 무한 전개는 종결될 수 없으며 둘째, 그 열에 대한 인식적 정보는 언제나 선택이 이루어진 항들에 의존한다는 것이다.[41] 후자는 전자로부터 따라 나오는 성질로서, 달리 말하면 선택열에 대한 우리의 인식은 그 열의 시편이 갖는 정보에 해당한다는 것이다. 이제 아래의 ‘약한 연속성 원리(Weak Continuous Principle)’의 후건이 그 성질에 의거한다는 점을 고려해보자. 그러면 실수의 비가부번성은 다음과 같은 의미에서 구성적으로 증명된다.[42]

$a<\gamma \vee a=\gamma \vee a>\gamma$에 대한 직관주의적 해석은 다음과 같다. γ의 값을 계산하는 과정에서 다음을 만족하는 N이 존재한다: N 단계 이후에 $a<\gamma \vee a>\gamma$ 가 성립한다. 또는 그와 같은 N이 존재하지 않으며 따라서 $a=\gamma$이다. 그러나 현재 그와 같은 성질들이 만족되는지를 확인할 계산이 없으므로 N의 존재 유무를 주장할 수 없다. 따라서 배중률은 성립하지 않는다. Heyting(1931), 43쪽 참조.

40) 양화사 ‘모든’에 대한 간략한 설명은 Brouwer(1907), 76쪽을 참조하기 바람.

41) (BMS15), 1쪽., Brouwer(1918b), 160쪽., Mancosu(1998), 12-13쪽.

42) 브라우워의 본래 증명은 다음과 같다. “Die Menge *C* ist grösser als die Menge *A*. Ein Gesetz, das jedem Elemente *g* von *C* ein Element *h* von *A* zuordnet, muss nämlich das Element *h* vollständig bestimmt haben nach dem Bekanntwerden eines gewissen Anfangssegmentes *a* der Folge von Ziffernkomplexen von *g*. Dann aber wird jedem Elemente von *C*, welches *a* als Anfangssegment besitzt, dasselbe Element *h* von *A* zugeordnet. Es ist mithin unmöglich, jedem Elemente von C ein verschiedenes Element von A

약한 연속성 원리

$$\forall \alpha \exists x A(\alpha, x) \Rightarrow \forall \alpha \exists m \exists x \forall \beta(\overline{\beta}m = \overline{\alpha}m \rightarrow A(\beta, x))$$

(α, β: 선택열, x, m: 자연수, $\overline{\alpha}m$, $\overline{\beta}m$: 길이가 m인 α, β의 시편)

증명: 서로 다른 선택열에 서로 다른 자연수를 대응하는 방식으로 모든 선택열을 나열했다고 가정하자. 약한 연속성 원리에 따르면 개개의 선택열에 대응하는 수는 그 선택열의 시편에 의거해서 결정된다. 그러나 그 경우 동일한 시편을 가지는, 그러나 이후의 항은 다르게 될 모든 선택열에도 같은 수가 대응될 것이다. 선택열의 정의를 따르면, 그와 같은 선택열들의 창조는 자유롭다. 따라서 앞서 가정한 대응은 존재할 수 없다(1). 그런데 자연수 n을 n개의 선택으로 이루어진 선택열에 사상할 수 있기 때문에 자연수에서 선택열로의 단사함수는 분명히 존재한다(2). 그러므로 선택열의 기수는 자연수보다 크다(1, 2로부터). 즉 선택열은 가부번이 아니다. ■

이제 다음 절에서는 그의 구성 개념을 좀 더 명료히 하고 관련된 주장들을 강화한다는 취지에서 브라우워의 실수 개념에 대한 한 가지 비판을 살펴보기로 한다.

---

zuzuordnen. Weil mann andererseits in mannigfacher Weise jedem Elemente von A ein verschiedenes Element von C zuordnen kann, so ist hiermit der aufgestellte Satz bewiesen." (Brouwer(1918b), 160쪽). '약한 연속성 원리'와 '연속성 원리(Continous Principle)' 그리고 이 증명과 관련해서는 van Atten(2004), 35-39쪽을 참조하기 바람. 한편, 각 선택열에 자연수 집합이 대응된다는 점을 고려하면 약한 연속성 원리를 강화한 것은 다음과 같다. 균일성 원리(Uniformity Principle): $\forall X \exists n R(X, n) \Rightarrow \exists n \forall X R(X, n)$ 이것은 현대 직관주의의 기본 원리로서 이것에 의거한 비가부번성 증명을 포함한 여러 증명들은 McCarty(2007), 359-360쪽을 참조하기 바람.

4

브라우워의 실수 구성을 직접 비판한 철학자는 비트겐슈타인이다. 그의 비판 방향은 두 가지로서, 하나는 선택열에 대한 것이고 다른 하나는 이른바 '진자수(pendulum number)'에 대한 것이다. 비트겐타인의 요점은 그 두 대상이 각각 실수에 관한 다음 두 조건을 만족하지 않는다는 것이다.[43)]

(1) 그 수의 유리수 근사치를 계산하는 효과적인 규칙이 있어야만 한다.[44)]
(2) 실수는 다른 수와 비교할 수 있어야 한다.[45)]

먼저, (1)에는 모든 실수는 유리수열로부터 구성될 수 있다는 가정이 고려되어 있고 브라우워의 정의 또한 그 가정에 의존한다. 그러므로 선택열에 의한 정의에서 고려해야 할 것은 그 조건이 언급하는 '효과적인 규칙'이다. 그런데 비트겐슈타인에게 선택열은 효과적인 규칙으로 형성되는 것이 아니라는 점에서 진정한(bona fide) 수학적 대상이 아니다. 왜냐하면 그러한 열은 임의적이고, 임의적인 열을 형성하는 행위는 수학의 근본 성질인 앨거리듬과 무관하기 때문이다.[46)] 그런데 이는 선택열로 정

---

43) 이 두 조건과 관련된 논의는, Marion(1998), 7장을 참조하기 바람.

44) 비트겐슈타인은 어떤 열이 코시조건을 만족한다는 것과 그 열의 각 항이 어떤 방식으로 결정되는가는 다른 문제라고 보았다. 그가 코시열에 의한 실수 정의를 언급하면서 조건(1)을 제시한 까닭이 거기에 있다. 즉 어떤 열이 코시조건을 만족한다고 해도 그 열의 항은 법칙에 의해 결정되는 것이 아닐 수 있다고 생각한 것이다. 그러므로 조건(1)은 그러한 열이 정의하는 수를 배제하려는 장치이다. Marion(1998), 194쪽 참조.

45) $\forall x, y \in R(x > y \text{ or } x = y \text{ or } x < y)$

46) Wittgenstein(1974), p. 468., Wittgenstein(1979b), 106쪽 참조. Marion(1998), 206쪽.

의하는 실수 또한 진정한 수학적 대상이 아닌 무작위 수(random real number)임을 의미한다.[47)]

다음으로, 실수의 근본적인 특성[48)]에 관한 조건(2)에 따르면 예컨대 0과 비교할 수 없는 수는 당연히 진정한 수학적 대상이 아니다. 그런데 브라우워는 바로 그러한 성질을 지닌 수를 구성하였으므로 결국 그는 정작 실수가 아닌, 단지 자신이 수라고 믿는 '어떤 것'을 구성한 셈이다.[49)] 요약하자면 이들 반론은 브라우워의 수 구성이 말 그대로 비트겐슈타인의 관점에서, 수학적인 합법성을 지닐 수 없다는 것이다. 그렇다면 이들 반론은 유효한가?

먼저, 비트겐슈타인의 첫 번째 반론은 적절하지 않다. 왜냐하면 비트겐슈타인은 바일(H. Weyl)의 설명에 등장한 브라우워의 선택열을 무법칙적인 열로 잘못 이해했기 때문이다. 선택열에 관한 바일의 설명을 보자.

> 브라우워의 기본적인 통찰들 가운데 하나는 각 항의 전개가 자유로운 선택을 통해 이루어지는 수열들이 수학적으로 개념화되는 대상들일 수 있다는 것이다. 무한열을 규정하는 법칙 ϕ가 개별적인 실수를 나타내는 것처럼, 어떤 법칙의 제약도 받지 않고서 각 항이 자유롭게 전개되는 선택열은 **연속체**를 나타낸다. 선택열들에 대한 수학적 연산이 가능하다는 사실은 선택열들 사이에서 대응관계가 성립할 수 있다는 사실에 의해 아주 잘 지지된다. 예를 들면 다음과 같은 식,
>
> $$n_h = m_1 + m_2 + \cdots + m_h$$
>
> 은 자유롭게 선택된 항들로 이루어지는 열, $m_1, m_2, m_3, \ldots$ 로부터

---

47) Marion(1998), 3-4쪽., 195쪽.

48) "다른 수와 비교가능하다는 것은 수의 근본적인 특성이다." Wittgenstein(1974), 476쪽.
"실수란 바로 유리수와 비교될 수 있는 것이다." Wittgenstein(1975), §191.

49) 물론 이 경우에 배중률에 대해 반례를 제시하려던 브라우워의 시도는 공허한 것이 된다. 왜냐하면 그의 반례는 진자수가 수학적 대상이라는 가정에 의거하고 있기 때문이다.

수열 $n_1, n_2, n_3, \ldots$ 를 형성하는 어떤 법칙을 포함한다.
(Weyl(1921), 94쪽. 고딕 강조 필자)

여기에서 바일은 브라우워의 선택열이 법칙적 열은 아니지만 그것에 의해 연속체가 정의될 수 있으며 따라서 선택열에 대한 연산이 가능하다고 말하고 있다. 매리언(M. Marion)도 지적하듯이, 적어도 바일은 법칙적 열만으로는 연속체를 정의할 수 없다는 브라우워의 의도를 정확히 인지하고 있었던 것이다. 그런데 비트겐슈타인은 위의 인용에 등장하는 '어떤 법칙의 제약도 받지 않고서'를 각 항이 '동전이나 주사위를 던져서'를 뜻하는 것으로 이해했다.[50] 이 점은 바일의 설명에 대한 비트겐슈타인의 대응에서 확인할 수 있다.

자유롭게 전개하는 열은 무엇보다도 경험적인 것이다. ... 그것은 단지 내가 수를 더할 수 있다는 것만을 보여줄 뿐, 자유롭게 전개하는 열이 수학적으로 허용될 수 있는 개념임을 보여주는 것은 아니다.
(Wittgenstein(1979b), 83쪽)

그러나 브라우워의 이론을 정확히 이해했던 바일이 언급한 선택열은, 쉽게 알 수 있듯이 '법칙적이지 않은(non-lawlike)' 것일 뿐, 결코 무법칙적인(lawless) 열을 뜻하지 않는다. 다시 말하면, 브라우워의 선택열은 무법칙적인 열이 아니다. 따라서 비트겐슈타인의 이해는 잘못된 것이다.[51]

50) 이 지적과 좀 더 자세한 설명은 Marion(1998), 205~206쪽을 참조하기 바람.

51) 이와 관련, 한 익명의 심사자는 'non-lawlike' sequence가 선택열인 한, 그리고 선택열은 일반적으로 'lawless' sequence라고 불리는 한, 필자의 주장은 문제가 있다는 취지의 지적을 하였다. 그러나 이 지적은 오해에서 비롯된 것이다. 왜냐하면, 브라우워의 α_ν는 선택열이지만, 'non-lawlike' sequence와 'lawless' sequence의 중간형이며 이 점은 본문의 정의에서 쉽게 알 수 있기 때문이다. 앞의 각주 20)과 거기에 언급된 트로엘스트라의 문헌들을 보라. 관련된 다른 지적도, α_ν를 오해한 데서 비롯되었다고 생각한다.

이는 만일 비트겐슈타인이 조건(1)에 의거하여 브라우워의 선택열을 비판하고자 한다면, 그 시도는 적절하지 않다는 것을 뜻한다.

다음으로 두 번째 반론을 보기로 하자. 잘 알려진 것처럼 진자수는 브라우워가 '이원진동수축수(binary oscillatory shrinking number, 이하 이원진동수)'로 부르는, 아래의 수열 $\alpha_\nu = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ 에 의해 정의되는 수 α이다.[52)]

$$\alpha_\nu = \begin{cases} (-\frac{1}{2})^\nu, & \nu < k_f \\ (-\frac{1}{2})^{k_f}, & \nu \geq k_f \end{cases} \qquad (\text{단}, \nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

그런데 이 수 α에 대해, 다음은 참이 아니다.

$$\alpha < 0 \vee \alpha = 0 \vee \alpha > 0$$

말하자면 브라우워는 0과 같은지 다른지, 더 나아가 유리수인지 아니면 무리수인지도 알 수 없는 수가 정의 될 수 있음을 보이고 있다. 즉 배중률의 일반적인 타당성에 대한 반례를 제시한 것이다.[53)] 그런데 α는

52) van Dalen(1981), 6-7쪽. 참고로 이 정의에 등장하는 k_f는 다음의 '소산성질(fleeing property)' f를 만족하는 가장 작은 자연수이다. (i) 각 자연수 n에 대해 n이 속성 f를 소유하는지 여부는 결정될 수 있다. (ii) f를 소유하는 자연수 n의 계산 방법은 알려져 있지 않다. (iii) 어떤 n이 f를 소유한다는 가정이 불합리임은 알려져 있지 않다. 한편, 이 소산성질 f의 한 예는 잘 알려진 <π의 소수전개에서 소수점 이하 연속적인 10개의 항(n, n+1, ... ,n+9)이 0123456789임>이다. 이 정의에 관해서는 Brouwer(1923b), Brouwer(1929), Brouwer(1933), (BMS59), Brouwer(1948c)를 참조하기 바람. 특히 앞서 본 축소구간 열에 의한 이원진동수 정의는 Brouwer(1923b), 338쪽을 참조하기 바람.

53) 열 α_ν는 코시 조건을 만족하며 α는 구성적으로 정의된다는 점에서 반례가 된다. van Atten(2004), 27쪽. Marion(1998), 167-168쪽.

바로 그 특성으로 인해 조건(2)를 만족하지 않는 수이며 따라서 두 번째 반론은 유효한 것으로 보인다. 이제 이 반론이 실제로 유효한지 보기로 하자.

먼저 생각해볼 것은 이 반론이 α에 대한 것이지 그것을 정의하는 열 α_ν에 대한 것이 아니라는 점이다. 즉 조건(2)는 조건(1)을 만족하는 열이 정의하는 어떤 수에 대한 것이다. 다음을 보자.

> 실수 구성과 관련해서 결정적인 사실은 그것의 정확한 비교가능성이다. ...
>
> 만일 유리수와 비교될 수 없는 구성물이 존재한다면 우리에게는 그 자리를 유리수들 사이에서 발견할 권리가 없다. 따라서 그 구성물은 수직선 위에 놓이지 않는다.(브라우워에게는 마치 다른 어떤 유리수보다 크다거나 혹은 작다거나 아니면 같은지를 *알지* 못하는 실수가 존재하는 것처럼 보인다. (Wittgenstein(1979b), 73쪽, 강조 원저자)

이 인용문을 보면, 'α_ν로 α를 정의하기'는 수학적 합법성이 결여된 구성이다. 이 경우 배중률에 대한 브라우워의 주장은 사이비 구성에 의존한, 따라서 말 그대로 잘못된 주장이라고 할 수 있다.

그러나 조건(2)에 의거한 반론이 중요한 이유는 다른 곳에 있다. 바로 α_ν가 선택열이기 때문이다.[54] 이는 브라우워의 실수 정의가 적어도 비트

54) 앞서 보았듯이 브라우워의 계획은 법칙적인(lawlike) 열과 무법칙적인(lawless) 열의 중간 형태인 선택열로 실수를 구성하는 것이다. 한편, α_ν가 선택열인지는 여전히 논란거리일 수 있다. 왜냐하면 비트겐슈타인은 브라우워의 무한진행열 더 나아가 펼침에 대한 그 어떤 직접적인 언급도 제시하지 않았기 때문이다. 그런데 공교롭게 브라우워 자신도, 필자가 아는 한, α_ν가 선택열 혹은 무한진행열의 하나인지 여부를 구체적으로 명시한 적이 없다. 필자는 다음과 같은 이유에서 α_ν가 선택열의 한 사례라고 생각한다. 첫째, α_ν의 각 항은 미리 결정된 것이 아니라 소산성질에 의거해 전개된다. 둘째, 소산성질을 만족하는 n인 k_f를 찾는 절차, 즉 π의 값을 구하는 것은 실질적인 계산이므로 무작위 열이 아니다.

겐슈타인의 관점에서는 처음부터 잘못된 것임을 의미한다. 따라서 비트겐슈타인의 반론은 배중률의 부당성 주장에 대해서는 물론이거니와 근본적으로는 수학의 본성에 관한 직관주의 관점에 직접 해당한다.

하지만 이 귀결을 선뜻 받아들이기는 어려워 보인다. 왜냐하면 조금 전에 보았듯이 비트겐슈타인이 α_ν를 조건(1)을 만족하는 적법한 수학적 대상으로 인정한 것이 분명하기 때문이다.[55] 즉, α_ν가 코시조건을 만족하고 각 항이 결정되는 방식이 수학적이라면, 그것이 정의하는 이원진동수 α를 진정한 수학적 대상이 아닐 수 없기 때문이다. 두 조건 사이에 놓인 이 긴장은 특히 조건(2)에 관한 다음 주장을 볼 때 두드러진다.

> 법칙과 법칙을 비교할 수 있는 것이지 법칙을 법칙이 아닌 것과 비교할 수 없다. (Wittgenstein(1975), §181)

즉, 이원진동수에 관한 비트겐슈타인의 생각이 일관적이라면 여기서 말하는 '법칙'은 분명 조건(1)에서 말하는 '효과적인 규칙'과 달라야 한다. 하지만 다음 글을 볼 때 과연 그러한지는 의문이다.

> 실수는 외연들을 *산출*한다. 그것은 외연이 아니다.
> 실수란 이러한 것이다. 소수의 각 항을 끊임없이 산출하는 산수학적 법칙. (Wittgenstein(1975), §186, 강조 원저자)

따라서 그 둘의 차이가 없다면, 조건(2)는 별도의 의미를 갖지 않는다고 보아야 할 것이다. 이는 이원진동수 'α'에 대한 반론이 유효하지 않음을 뜻한다.

이 결론은 결국 선택열이 조건(1)을 만족한다고 본 데에서 비롯된다. 즉 선택열을 법칙적 열로 이해한 때문이다. 그런데 만일 비트겐슈타인이

55) Marion(1998), 196쪽 참조.

각 항이 이미 결정되어 있는 열, 즉 종래의 법칙적 열만을 염두에 두었다면 그러한 이해는 당연히 올바르지 않다. 반면 그것이 올바른 이해라면 비트겐슈타인이 언급하는 '그' 법칙의 외연은 선택열을 산출하는 절차를 포함할 만큼 넓다. 바로 이 경우에 조건(2)로 이원진동수를 배제하려는 시도가 적절하지 않게 된다. 물론 법칙의 외연을 이렇게 확장하면, 수학의 본성에 관한 비트겐슈타인과 브라우워의 입장이 근본적인 면에서 다르지 않다고 볼 충분한 여지도 생겨난다. 다음을 보자.

> 수학은 전적으로 계산들로 이루어진다.
> 수학에서 *모든 것*은 앨거리듬이며, 의미란 *없다*.
> (Wittgenstein(1974), 468쪽, 강조 원저자)

> 우리는 수학을 기술할 수 없고 단지 수학을 할 뿐이다.
> (Wittgenstein(1975), §159)

이 글들을 보면, 비트겐슈타인이 생각하는 수학은 언어가 아닌 행위로서의 계산들의 체계이다.[56] 계산이 그 본성상 언어와 무관한[57] 정신활동이라는 점을 배제하지 않는 한[58] 그의 생각이 브라우워의 기본 입장과 다르다고 말할 수 없다. 이는 조건(2)에 의한 반론이 적절하지 않다는 또 다른 근거가 된다.

56) Marion(2003), 115쪽. 예컨대 비트겐슈타인은 무리수를 하나의 절차로 이해한다. Wittgenstein(1979a), 221쪽.

57) "수학은 항상 기계, 계산이다. 계산은 어떤 것도 묘사하지 않는다. 계산이란 주판이며 계산기이며 계산 장치이다. 계산은 획이나 숫자들로 작동한다." (Wittgenstein(1979b), 106쪽)

58) 수학의 본성과 관련, 계산, 앨거리듬, 결정 절차의 관계에 관해서는 Marion (1998), 2-4쪽., 160-162쪽을 참조할 수 있는데 거기에서 매리언은, 비트겐슈타인의 계산 개념을 크로네커가 수학의 특징이 계산에 있다고 말할 때의 그것과 동일한 것으로 보아야 한다고 주장한다. 본문에서 필자의 논의는 그것을 출발점으로 한다. 참고로 비트겐슈타인과 브라우워를 비교한 가장 최근의 글은 필자가 아는 한, Marion(2003)이다.

한편, 비트겐슈타인에게는 선택열에 대한 적확한 이해가 없었을 가능성도 있다. 왜냐하면 그가 조건(1)과 관련, 브라우워의 선택열 자체가 수학적인지 여부에 관한 논변을 제시한 것은 아니기 때문이다.[59] 또한 이원진동수 α를 정의하는 α_{ν}가 왜 수학적으로 허용될 수 없는지와 더 나아가 그 구성, 즉 'α_{ν}'로 α를 '정의하기'가 허용될 수 없다는 취지의 논의도 없기 때문이다. 즉, 'α_{ν}로 α를 정의하기'가 사이비 구성이라는 비트겐슈타인의 논변은 없기 때문이다.[60] 이는 비트겐슈타인이 선택열을 골자로 한 브라우워의 전체 그림이 아닌 '진자수 α'만을 인지했고, 그로 인해 조건(2)를 제시했을 가능성을 보여준다. 이 점은 다음과 같이 좀 더 구체적으로 설명될 수 있다. 선택열은 무한한 소수 전개의 종결을 가정하지 않는다. 그리고 각 항의 전개에서는 언제나 새로운 성질을 가질 수 있다. 그러한 의미에서 그 열은 본성상 '완결되지 않은 대상(incomplete object)'[61]이다. 직관주의 수학이 실무한에 의존하지 않는 한, 그러한 대상이 적법하지 않을 이유는 없다. 바꿔 말하면 잠재적 무한을 가정하는 한, 수학은 배중률의 반례를 낳는 그러한 대상[62]을 반드시 허용한다. 브라우워의 의도는 바로 그 점을 보임으로써 궁극적으로, 논리-언어적 대상을 허용하지 않는 직관주의 수학에서는 배중률 없는 논리가 요구된다는 것을 말하는 데 있다.[63] 그러므로 조건(2)를 이원진동수에 적용하는 것은 그와 같은 의도에 대한 적확한 포착이 아니다.

59) 매리언에 따르면, 선택열의 수학적 합법성을 부정하는 비트겐슈타인의 직접적인 논변은 없다. Marion(1998), 207쪽 참조.

60) α_{ν} 자체에 대한 논변이 없다는 것은 비트겐슈타인의 문헌을 통해 확인할 수 있다. 한편, 필자는 이원진동수 정의에 요구되는 '소산성질'에 대해, 비트겐슈타인이 관련된 논의를 제시했어야 한다고 생각한다.

61) van Atten(2004), 20쪽 참조.

62) 이원진동수의 성질은 그것을 정의하는 선택열이 본질적으로 완결되지 않은 대상이라는 증거이다.

63) Marion(1998), 167-168쪽 참조.

이상의 논의는 α_ν가 진정한 수학적 대상인 한 α를 진정한 수학적 대상이 아닌 것으로 볼 적극적이고 합당한 이유가 없다는 것이다. 이 점을 고려하면 적어도 이원진동수에 관한 한 조건(1)과 조건(2)에 담긴 비트겐슈타인의 주장은 일관적이지 않다.[64)]

64) 이와 관련, 필자는 두 조건이 모두 유효할 수 있는 다른 경우가 있다고 생각한다. 왜냐하면 비트겐슈타인이 조건(1), (2)를 제시한 까닭이 다음을 보이려 했을 수 있기 때문이다. “코시열을 적법하게 ‘구성한다’는 사실과 그 열이 어떤 수를 ‘정의한다’는 사실 사이에는 넘기 어려운 이론적 간극이 존재한다.” 이에 대한 논의는 다음 과제로 남긴다.

참고문헌

van Atten, M (2002), “The Irreflexivity of Brouwer's Philosophy”, *Axiomathes* 13. 65-77쪽.

______(2004), *On Brouwer*, Wadsworth Philosophers Series, Thomson Learning, London.

Brouwer, L.E.J (1905), Life, Art and Mysticism”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 37, no. 3, 391-429쪽.

______(1907), “On The Foundations of Mathematics”, in *BCW*, 11-101쪽.

______(1908a), “Die Mögliche Mächtigkeiten”, in *BCW*, 102-104쪽.

______(1908c), “The Unreliability of The Logical Principles”, in *BCW*, 107-111쪽.

______(1912a), “Intuitionism and Formalism”, in *BCW*, 123-138쪽.

______(1918b), “Begründung der Mengenlehre unabhänig vom logischen Satz vom ausgeschlossen Dritten”, Erst Teil, in *BCW*, 151-190쪽.

______(1923b), “On the Significance of the Principle of Excluded Middle in Mathematics, especially in Function Theory”, in van Heijenoort (1977), 334-341쪽.

______(1925a), “Zur Begründung der Intuitionistischen Mathematik I”, in *BCW*, 301-314쪽.

______(1927), “On the Domains of Definition of Functions”, in van Heijenoort[1977], 457-463쪽.

______(1929), “Mathematics, Science, and Language” in Mancosu[1998], 45-53쪽(“Mathematik, Wissenschaft und sprache”, in *BCW*, 417-428쪽.)

______(1930a), “The Structure of the Continuum”, in Manscou[1998], 54-63쪽.(“Die Struktur des Kontinuums”, in *BCW*, 429-440쪽.)

______(1933), “Will, Knowledge and Speech”, in van Stigt[1990], 418-431쪽(“Volition, Knowledge, Language”, in *BCW*, 443-446쪽)

______(1947), “Guidelines of Intuitionistics”, in *BCW*, 477쪽.

______(1948c), “Consciousness, Philosophy, and Mathematics”, in *BCW*, 480-494쪽.

______(1952b), “Historical Background, Principles and Method of Intuitionism”, in *BCW*, 508-515쪽.

______(1954a), “Points and Spaces”, in *BCW*, 522-538쪽.

______(BMS15), Notes for a course on set theory. 50-page Dutch manuscript of a course on set theory in Amsterdam between 1914 and 1916.

______(BMS37), “Real Functions” in van Stigt(1990), 469-480쪽.

______(BMS59), “Changes in the Relation between Clasical Logic and Mathematics” in van Stigt(1990), 453-458쪽.

van Dalen. D (ed.)(1981), *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*, Cambridge university Press, Cambridge.

Dedekind, R (1872), “Continuity and Irrational Numbers”, in *Ewald*(1996), 765-779쪽.

______(1877), *Theory of Algebraic Integer*, Cambridge University Press, Cambrodge.

______(1888), “Was Sind und Was Sollen die Zahlen?”, in *Ewald(*1996), 787-833쪽.

Ewald, W(ed.) (1996), *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, vol. I, II, Clarendon Press, Oxford.

Goldfarb, W(1988). 'Poincaré against the logist', Asprey, W and Kitcher, P(eds.), *History and Philosophy of Modern Mathematics*, Minneapolis: University of Minnesota Press, van Heijenoort, J(ed.)(1977), *From Frege to Gödel: A Source Book in Manthematical Logic*, 1879-1931, Harvard University Press, Cambridge.

Heyting, A (1931), “The Intuitionist Foundation of Mathematics”, in Benaceraff. P and Putnam. H[1983], 52-61쪽.

_______(1966), *Intuitionism, An Introduction,* Amsterdam, north Holland.

Kant, I (1970), *Kritik der reinen Vernunft*, (*Immanuel Kant's Critique of Pure Reason*, trans. by N.K. Smith., Macmillan, London, 2nd, 1970.)

Mancosu, P (1998), *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, Oxford uiversity Press, New York-Oxford.

Marion, M (1998), *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics*, Clarendon Press, Oxford.

______(2003), “Wittgenstein And Brouwer”, *Synthese* 137, 103-127쪽.

McCarty. D.C (2007), “Intuitionism in Mathematics” in Shapiro(2007), 356-386쪽.

Parsons, C (1966), “An Introductory Note to Brouwer(1927)”, in van Heijenoort(1977), 446-457쪽.

Shapiro, S (ed.)(2007), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford Univesrity Press, Oxford.

van Stigt, W.P (1990), *Brouwer's Intuitionism*, North-Holland, Amsterdam.

Troelstra, A.S (1969), *Principles of Intuitionism*, *Lecture notes in mathematics*, vol. 95, Springer, Berlin.

______(1982), “The Origin and Development of Brouwer's Concept of Choice”, in Troelstra, A.S,. van Dalen, D(1982), 465-486쪽.

Troelstra, A.S and van Dalen, D(eds.)(1982), *The L.E.J. Brouwer's*

Centenary Symposium, North Holland, Amsterdam.

Weyl, H (1921), 'On the New Foundational Crisis of Mathematics' in Mancosu(1998)

Wittgenstein, L (1974), *Philosophical Grammar*, Blackwell, Oxford.

______(1975), *Philosophical Remarks*, Blackwell, Oxford.

______(1979a), *Wittgenstein's Lectures*, Cambridge 1932-1935, from the otes of J. King and D. Lee, Blackwell, Oxford.

______(1979b), *Ludwig Wittgenstein and the Vienna Circle*, from the notes of Waismann, Blackwell, Oxford.

Yap, A (2009), “Predicativity and Structualism in Dedekind's Construction of the Reals” *Erkenntnis,* 71, 157-173쪽.

Brouwer's Intuitionism and Construction

Kim, Jinhyeong (Univ. of Seoul)

This paper purposes to show that Brouwer's intuitionism can be regarded as a philosophical account of the early constructivism, a trend exemplified by the works of Kronecker and Poincaré, and then to consider its implications on classical mathematics. For these, I first reconstruct Brouwer's claim that mathematics is a mental activity. Next, I argue that the claim plays an important role in the development of constructivism. Thirdly, after showing that choice sequences define real numbers, I examine the argument that the choice sequence method leads to undermining of the classical notion of truth and may be regarded as an alternative way to the classical definition of real numbers. Finally, I argue that Wittgenstein's objection to Brouwerian real number construction is not successful.

Key words: mental construction, Brouwer, intuitionism, intuition of two-ity, choice sequences, pendulum number, Wittgenstein.

김진형 E-mail: musoyu108@hanmail.net

투 고 일	2016년 10월 20일
심 사 일	2016년 10월 26일
게재확정	2016년 11월 09일